3 1761 06705933 7

Digitized for Microsoft Corporation
by the Internet Archive in 2007.
From University of Toronto.
May be used for non-commercial, personal, research,
or educational purposes, or any fair use.
May not be indexed in a commercial service.

TRAITE D'ASTRONOMIE PRATIQUE.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

TRAITÉ
D'ASTRONOMIE PRATIQUE,

COMPRENANT

L'EXPOSITION DU CALCUL DES ÉPHÉMÉRIDES

ASTRONOMIQUES ET NAUTIQUES,

D'APRÈS LES MÉTHODES EN USAGE DANS LA COMPOSITION DE LA *Connaissance des Temps* ET DU *Nautical Almanac,*

AVEC UNE

INTRODUCTION HISTORIQUE

ET DE NOMBREUSES NOTES,

PAR M. ABEL SOUCHON,

Membre adjoint du Bureau des Longitudes attaché à la rédaction de la *Connaissance des Temps*.

87306
10/6/08

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1883

(Tous droits réservés.)

A LA MÉMOIRE

DE M. CH. DELAUNAY.

Hommage pieux de ma reconnaissance et de mes regrets.

ABEL SOUCHON.

AVERTISSEMENT.

Il n'existe aucun Ouvrage où le *Calcul des Éphémérides* ait été exposé d'une manière complète. Delambre et Francœur, dans leurs excellents Traités d'Astronomie, ont compris ce sujet dans le programme des matières qu'ils avaient à traiter, mais ces savants auteurs n'ont abordé qu'un très petit nombre de questions relatives à la composition des Éphémérides, et ils les ont résolues, en général, par des méthodes que l'on s'accorde à regarder aujourd'hui comme surannées. Nous avons donc cru faire une chose utile en composant un Ouvrage destiné à combler la lacune importante que nous signalons.

Ce Traité est divisé en cinq Parties dont nous allons rendre un compte succinct.

La première Partie contient les principes généraux de l'Astronomie sphérique et est une Introduction aux deux suivantes; elle a pour titre : *Correction des positions célestes.* On trouve, en effet, dans cette première Partie, et sous la forme la plus commode pour les applications, toutes les formules qui servent à opérer la transformation des lieux apparents en lieux vrais, et réciproquement.

La deuxième et la troisième division du Livre traitent respectivement de la *Construction des Éphémérides* et de la *Prédiction des phénomènes astronomiques;* leur ensemble constitue la partie essentielle de l'Ouvrage. L'ordre dans lequel les matières y sont exposées est le même que celui où on les trouve classées dans la *Connaissance des Temps,* Ouvrage que nous avons pris pour modèle et dont nous nous sommes proposé d'expliquer la composition.

On trouvera dans la quatrième Partie le résumé des formules contenues dans les Parties II et III, et, dans la cinquième, une suite de Tables numériques destinées à faciliter le calcul des Éphémérides. La plupart de ces Tables sont inédites.

L'Ouvrage est précédé d'une *Introduction historique,* divisée en deux Sections. La première résume l'histoire des Éphémérides astronomiques et des Tables qui ont servi de fondement à leur calcul; la seconde contient l'historique des principaux phénomènes dont la prédiction fait le sujet des Éphémérides.

Ce Traité s'adresse principalement aux élèves des Observatoires, aux calculateurs d'Éphémérides et aux marins; mais il pourra être lu avec fruit par toutes les personnes qui voudront se familiariser avec les méthodes et les calculs de l'Astronomie pratique. Les auditeurs des cours de Facultés, en particulier les candidats à la licence ainsi que les élèves de nos Écoles, y puiseront des connaissances très utiles.

A. S.

INTRODUCTION HISTORIQUE.

PREMIÈRE SECTION.

HISTOIRE DES ÉPHÉMÉRIDES ASTRONOMIQUES ET NAUTIQUES ET DES TABLES QUI ONT SERVI DE FONDEMENT A LEUR CALCUL.

I.

Éphémérides astronomiques.

Le degré de perfection que l'Astronomie a atteint de nos jours est dû aux efforts réunis des géomètres et des astronomes. Les premiers, par une analyse profonde, sont parvenus à déterminer théoriquement toutes les inégalités des mouvements célestes et à nous donner l'explication physique des singuliers phénomènes que nous présentent ces mouvements. Les seconds, par un soin et une persévérance infatigables dans les observations et dans les calculs, sont arrivés à réduire en nombres les formules de la théorie et à construire des Tables numériques dont l'usage est aujourd'hui fort commode et fort répandu. C'est à l'aide de ces *Tables fondamentales,* relatives aux principaux corps du système solaire, que l'on peut composer des *Éphémérides,* faisant connaître jour par jour et longtemps à l'avance la position des astres dans le ciel, ainsi que toutes les circonstances des phénomènes qui peuvent le plus intéresser les astronomes et les navigateurs.

Le plus ancien de ces Ouvrages dont la publication ait eu un cours suivi est celui de Jean Müller, dit Regiomontanus, imprimé à Nuremberg en 1474. On y trouve le lieu des planètes, leurs aspects et diverses prédictions d'éclipses pour toutes les années écoulées depuis 1475 jusqu'à 1531. Mathias, roi de Hongrie, qui en avait accepté la dédicace, fit présent à l'auteur d'une somme de huit cents écus d'or. Ces Éphémérides eurent un tel succès que, malgré le prix fort élevé de douze écus d'or que coûtait chaque exemplaire, l'édition entière se répandit dans toutes les contrées de l'Europe et fut rapidement épuisée. Peu de temps après la publication de cet Ouvrage, en 1476, le même auteur fit paraître son *Kalendarium novum,* Ouvrage du même genre que le précédent et qui fut réimprimé en 1482, 1483, 1485, 1489, 1495, puis une dernière fois à Augsbourg en 1499. Ce calendrier et les Éphémérides qui le précédèrent furent imprimés par les soins de Bernard Walter, riche amateur d'Astronomie qui avait établi à ses frais une imprimerie à Nuremberg et chez lequel Regiomontanus s'était retiré, en 1471, lors des troubles de Bohême. Avant Regiomontanus, il existait des Éphémérides, mais ces Ouvrages étaient si défectueux, si mal en ordre et si peu étendus, qu'il est inutile d'en faire ici une longue mention. Citons seulement pour mémoire les *Tabulæ astronomicæ et Ephemerides,* de Salomon Jarchus, qui datent de 1150; celles du célèbre Purbach, le maître de Regiomontanus, composées de 1450 à 1461 sous le titre de *Almanach perpetuum pro omnibus planetis ad plures annos,* et enfin un volume d'Éphémérides que l'on conserve à la Bibliothèque nationale et qui date de l'an 1442.

L'empressement avec lequel les Éphémérides astronomiques de Regiomontanus furent reçues par les diverses nations de l'Europe, l'Italie, la France, la Hongrie, la Grande-Bretagne, etc., et la réputation que cet Ouvrage valut à son auteur, engagèrent les savants de ces pays à en calculer de semblables. En 1482, parurent, sans nom de lieu, les Éphémérides de J. Stoffler pour une période de 36 ans, depuis 1482 jusqu'à 1518. Ces Éphémérides furent ensuite étendues jusqu'à 1550 et réimprimées plusieurs fois en Allemagne et en Italie, avec ou sans commentaires. Dans l'édition que Stoffler publia lui-même de ses Éphémérides, en 1513, sous le titre de *Almanach nova plurimis annis venturis inservientia,* etc., il annonce, pour le commencement de l'année 1524, un grand déluge qui devait bouleverser toute la surface de la Terre, ce qui ne l'empêcha pas de continuer ses calculs et de donner des prédictions pour les années qui devaient suivre ce terrible événement. Toutes les éditions des Éphémérides de Stoffler sont rares, mais ce sont surtout celles imprimées à Venise en 1504 et 1506 qu'il est bien difficile de se procurer.

Aux Éphémérides de Stoffler succédèrent celles de Bernard de Granollach : *Sumario en el qual se contienen las conjonciones y oposiciones, los eclipses de Sol et Luna, fiesta mobile desde el anno* 1488 *hasta* 1550; in-4°. Ce Bernard de Granollach, à ce que nous apprend Nicolas Antonio dans sa *Bibliotheca Hispaña,* était un docteur en médecine de Barcelone; l'Ouvrage, quoique sans date, est probablement de 1487 ou de 1488. Puis, furent successivement publiées les Éphémérides de Zacutus, dont la première édition date de 1496(¹); celles de J. Angeli, imprimées à Vienne, et qui vont de 1494 à 1500; celles de Stadius qui s'étendent de 1554 à 1606 : la dernière édition date de 1570. Les Éphémérides de Leovitius forment un grand volume in-folio et vont de 1556 à 1606; celles de Pitatus, imprimées à Vienne, s'étendent de 1552 à 1562; celles de Moleti comprennent vingt années, depuis 1564 jusqu'à 1584; Scala en a donné qui vont de 1589 à 1600; celles de Magini s'étendent de 1581 à 1630. Les Éphémérides de Carelli calculées pour le méridien de Vienne vont de 1558 à 1577; celles de Nicolas Simi de 1554 à 1568; celles de Mœstlini de 1564 à 1584; celles d'Everhardt de 1590 à 1610. Enfin, en 1595, Dorigan publia des Éphémérides qui s'étendent de 1595 à 1654 et qui eurent trois éditions : la première parut à Francfort-sur-l'Oder et date de 1595; la seconde est de 1599 et la troisième de 1609.

Au commencement du XVIIᵉ siècle, on imprima à Madrid des *Efémerides generales de los movimentos de los cielos,* in-folio, par Suarez de Arguello. Ces Éphémérides, qui vont de 1607 à 1618, furent calculées sur les Tables Alphonsines et sur celles de Copernic. Vers la même époque, parurent à Londres les *Ephemeris from the year* 1609 *to the year* 1617; in-4° de J. Searle, ouvrage qui fut probablement le premier en ce genre publié en Angleterre. Kepler publia aussi des Éphémérides qui eurent beaucoup de succès et qui furent successivement étendues de 1617 jusqu'à

(¹) Les autres éditions sont de 1499, 1502 et 1572. L'édition originale de 1496 est fort rare; on n'en connaît qu'un exemplaire, qui est à la Bibliothèque royale de Lisbonne.

1636 : la première édition date de 1616 et va de 1617 à 1628; la seconde s'étend de 1629 à 1636.

Les Éphémérides d'Argoli, imprimées pour la première fois à Rome en 1621, vont de cette époque à 1640; mais elles furent plusieurs fois réimprimées et étendues jusqu'en 1700. On a encore de la même époque : les *Effemeridi nuove dei moti celesti*, in-folio, de Marc-Auguste Céleste, qui vont de 1629 à 1640; celles de J. Eichstadius, imprimées à Stetin et qui s'étendent de 1636 à 1640; la suite parut à Dantzig en 1639 et 1644 et fut prolongée jusqu'en 1675; celles de L. de Silva, publiées à Barcelone sous le titre de *Efémerides generales de los movimentos de los cielos*, in-4°; et enfin les Éphémérides de F. Montebruni, imprimées à Rome en 1640 et qui s'étendent de 1641 à 1660. En 1645, une autre édition de cet ouvrage fut donnée avec des additions et des commentaires.

Noël Duret, professeur de Mathématiques à Montbrison, fut le premier Français qui se livra à ces sortes de calculs. Les Éphémérides qu'il publia à Paris, en 1641, sous le titre de *Ephemerides motuum cœlestium Richelianæ*, vont de 1637 à 1700 et furent construites sur les Tables de Lansberg. En 1652, parurent à Londres les Éphémérides de Vincent Wing, étendues de 1652 à 1658, puis prolongées jusqu'en 1671. L'année précédente, l'auteur avait donné, en un volume in-8°, des Éphémérides pour 30 années. Un peu plus tard, parurent au même lieu les *Ephemeris of the celestial motion* de John Gadbury pour toutes les années comprises entre 1672 et 1681; la suite en fut donnée successivement en 1680 et 1719 et étendue jusqu'à 1740. Malsavia, sénateur de Bologne et général en chef des troupes du roi de Modène, publia aussi des Éphémérides qui s'étendent de 1661 à 1666. Cassini les avait enrichies de ses Tables et de ses observations, ce qui leur donna un grand prix. En 1662, parurent les *Ephemerides motuum cœlestium* de J. Hecker, pour toutes les années comprises entre 1666 et 1680. Ces Éphémérides, calculées sur les Tables Rudolphines, étaient assez exactes et furent les seules dont se servirent les astronomes jusqu'en 1680. Citons encore, comme ayant eu quelque réputation dans leur temps, les *Éphémérides du mouvement du Soleil*, par Pierre Palati, étendues de 1664 à 1670 et imprimées à Rome la même année; celles de G. Kirch, parues à Leipzig en 1681 et dont la suite va jusqu'en 1702 : Marguerite Kirch, sa femme, et plusieurs de ses filles y collaborèrent ; celles de H. Hofmann, qui s'étendent de 1701 à 1713 ; celles de Mezzavacca ou Mezzavachi, qui vont de 1675 à 1684 ; la suite parut en 1701 et fut étendue jusqu'en 1720 inclusivement ; enfin celles de Ant. Ghisleri, *Ephemerides motuum cœlestium ab anno* 1721 *ad annum* 1740, in-4°, entreprises en continuation de celles de Mezzavachi et dont la suite, parue en 1739, fut prolongée jusqu'en 1756.

C'est en 1678 que commença à paraître la *Connaissance des Temps,* sous la forme d'un petit in-12 de 60 pages, sans nom d'auteur. Comme tous les ouvrages de ce temps-là, il était dédié au Roi et avait pour titre : *La Connaissance des Temps, ou Calendrier et Éphémérides du lever et du coucher du Soleil, de la Lune et des autres planètes, avec les éclipses pour l'année* 1679, *calculées sur Paris, et la manière de s'en servir pour les autres élévations, avec plusieurs autres Tables et Traités d'Astronomie, de Physique et des Éphémérides de toutes les planètes en figures. A Paris, chez J.-B. Cognard, imprimeur du Roi, rue Saint-Jacques, à la Bible d'Or.* Picard, l'un des plus célèbres astronomes de cette époque, et le fondateur de notre Observatoire, était l'auteur anonyme de cet Ouvrage, qu'il avait entrepris pour faire suite aux Éphémérides de Hecker qui finissaient en 1680. Dans ce premier Volume, on trouve d'abord un calendrier annuel avec le lever et le coucher du Soleil et de la Lune, pour tous les jours de l'année ; le lieu de la Lune dans le Zodiaque ; l'aspect des planètes soit entre elles, soit à l'égard de la Lune ; un Tableau des éclipses pour l'année 1679 ; une Table des jours auxquels la Lune change ; une autre Table du lever et du coucher du Soleil pour Calais, Paris, Lyon, Marseille, avec la manière de s'en servir pour les autres contrées de la France. On y voit encore un Tableau des ascensions droites du Soleil, exprimées en heures et minutes seulement, avec l'équation de l'horloge (équation du temps) ; une Table de l'entrée du Soleil dans les douze signes du Zodiaque ; un Tableau des planètes observables sur l'horizon de Paris en 1679 ; une Table des plus longs jours et des plus longues nuits de l'année pour différentes latitudes ; une Table de réfraction, une autre Table des déclinaisons du Soleil ; le passage de la Lune au méridien pour tous les jours de l'année, et enfin la longitude et la latitude des vingt-trois principales villes de France. Toutes ces Tables sont accompagnées d'explications pour en montrer et la disposition et l'usage, et des exemples, choisis dans l'Astronomie pratique et la Navigation, sont donnés à la fin de la plupart d'entre elles.

Dans les années suivantes, Picard augmenta son recueil de Tables et de Notices intéressantes. Dans la *Connaissance des Temps* de 1682, il fit paraître un petit Traité de Topographie, une Table des longueurs du pendule, et une Notice sur les dimensions de la Terre et sur sa mesure. Le Volume de 1683 fut le dernier que publia ce savant astronome, mort un an après. Les Volumes des années suivantes furent rédigés sur le même plan par Lefebvre, que Picard avait attaché à la rédaction de la *Connaissance des Temps* dès 1682. En 1702, Lieutaud remplaça Lefebvre, à qui l'Académie venait de retirer le privilège et qu'elle avait même rayé de la liste de ses membres; Godin succéda à Lieutaud en 1730, et Maraldi à ce dernier en 1735.

C'est à la suite d'une dispute qu'il eut avec La Hire fils que Lefebvre se vit rayé de la liste des membres de l'Académie, et que le privilège de la *Connaissance des Temps* lui fut retiré. Comme les raisons qui amenèrent ce regrettable incident sont peu connues et intéressent particulièrement l'histoire des Éphémérides, nous allons les rapporter ici.

La Hire fils, dans l'un des Volumes d'Éphémérides publié en 1701, 1702 et 1703, sous le titre de *Regiæ Scientiarum Academiæ Ephemerides,* etc., in-4°, avait reproché à Lefebvre, auteur de la *Connaissance des Temps,* de s'être trompé d'une demi-heure dans la prédiction de l'éclipse du 15 mars 1699, que celui-ci avait donnée dans la *Connaissance des Temps* de cette année. Lefebvre, dans le Volume de 1701, répondit à La Hire et fit voir que cette erreur était inhérente à l'imperfection des Tables qu'il avait employées (les Tables Rudolphines); mais que, dans tous les cas, elle n'excédait pas 7^m, et, à cette occasion, traita Gabriel La Hire de « jeune novice », de « mensonger et de menteur qui impose le faux et qui ne pourrait faire voir ce qu'il avance avec témérité dans ses Éphémérides ». Il s'en prit même à La Hire père, qu'il accusa de s'être trompé de 7^m à 8^m dans le calcul de l'éclipse de Lune du 20 novembre 1695, et, chose bien plus grave, d'avoir « falsifié son observation pour l'accommoder à son calcul ». Voici, en effet, en quels termes peu mesurés s'exprime Lefebvre à l'égard de La Hire père, dans la préface de la *Connaissance des Temps* de 1701, préface qui fut ensuite supprimée avec soin et qu'on ne retrouve plus sur aucun exemplaire. « Or, dit-il, puisque l'on reprend une faute commise par mégarde dans le calcul d'une éclipse, je rapporterai ici une autre faute faite par un célèbre astronome dans une autre éclipse de Lune, pour faire voir que ceux qui condamnent sont quelquefois plus criminels que les autres. L'astronome, auteur des Tables astronomiques (¹) dont ce nouvel auteur (²) s'est servi pour supputer ses Éphémérides, ayant calculé par ses Tables l'éclipse de Lune qui arriva le 20 novembre 1695, cet astronome communiqua son calcul dans une compagnie où j'ai l'honneur d'avoir été présent, et l'on trouva que cet astronome faisait finir l'éclipse le 20 novembre à $8^h 42^m$ du soir, et que la grandeur de l'éclipse devait être de 6 doigts 15′. Une autre personne donna aussi un calcul de la même éclipse; et l'on trouva que ce calcul faisait finir l'éclipse à $8^h 35^m 28^s$, et que l'éclipse ne devait être que de $5^d 12'$. Cependant l'astronome ci-dessus observa l'éclipse dans la suite et trouva par son observation que l'éclipse finit où il la fait finir, à $8^h 41^m$, à une minute près de son calcul. Pour lors, cet astronome triompha, en faisant voir que son calcul était plus juste que celui des autres, qu'il traita avec mépris. Mais il arriva que M. Cassini, étant à Bologne, en Italie, observa l'éclipse fort exactement et envoya son observation à Paris, laquelle, étant réduite au méridien de cette ville, donna la fin à $8^h 34^m 30^s$. M. Chazelles, hydrographe à Marseille, observa aussi la même éclipse, et trouva que la grandeur de l'éclipse était justement de $5^d 15'$. Notre astronome voyant ces observations en fut entièrement mortifié; car, ayant comparé son calcul et son observation avec l'observation de M. Cassini, on trouva qu'il s'écartait de 7^m à 8^m dans l'un et dans l'autre; et il fut aisé de voir qu'il avait accommodé son observation à son calcul. Quant à la grandeur de l'éclipse, on trouva que cet astronome ne s'était trompé que d'un doigt tout entier; car il avait dit que l'éclipse serait de $6^d 15'$ et elle ne fut que de $5^d 15'$; mais c'est peu de chose pour lui. »

(¹) La Hire père.
(²) Gabriel La Hire.

Le comte de Pontchartrain, alors chancelier de France, à qui le cas avait été déféré, trouva la conduite de Lefebvre si inconvenante, si irrévérencieuse envers l'Académie, qu'il voulut tout d'abord l'exclure de cette assemblée; mais, à la prière du Président et de quelques membres, il se laissa fléchir et permit à Lefebvre de continuer à y prendre séance, à la condition, toutefois, qu'il retirerait la préface de la *Connaissance des Temps* de 1701, qu'il en ferait une autre dans laquelle il rétracterait tout ce qu'il avait dit d'injurieux à l'égard de La Hire père et fils, et que de plus il leur en demanderait pardon en pleine assemblée. Lefebvre, à qui cette décision du Ministre fut communiquée, écrivit, dans la séance suivante (séance du 15 décembre 1700), qu'il était prêt à se soumettre à tout plutôt que de renoncer à l'Académie, et qu'il irait, aussitôt que sa santé le lui permettrait, faire telle réparation que l'on exigerait de lui. Il paraît que plusieurs membres, auxquels se joignirent les La Hire, prièrent le Président d'épargner à Lefebvre cette humiliation, mais la complaisance ne fut qu'apparente; car, à quelque temps de là, Lefebvre ayant été forcé de manquer quelquefois de suite aux séances de l'Académie, cet astronome en fut exclu sous prétexte que le règlement exige l'assiduité. « Ce fut, dit Lalande, de qui nous tenons ces détails (*Bibliographie astronomique,* p. 344), une perte pour l'Astronomie; il calculait mieux les éclipses que La Hire, parce qu'il employait la période de dix-huit ans, qu'il tenait peut-être de Rœmer. » Lefebvre mourut en 1706. Outre la *Connaissance des Temps,* qu'il rédigea de 1684 à 1701, on a encore de cet excellent astronome des *Éphémérides pour les années* 1684 *et* 1685*, calculées sur le méridien de Paris,* et des *Tables astronomiques* qui eurent la réputation de bien représenter les éclipses de Lune et de Soleil.

Nous avons dit qu'après Lefebvre, Lieutaud, Godin et Maraldi furent successivement chargés de composer la *Connaissance des Temps;* mais c'est surtout dans les années publiées par Godin, de 1730 à 1734, que de notables et utiles perfectionnements furent introduits dans la rédaction de cet Ouvrage. Aux données déjà nombreuses que renfermaient les Volumes des années 1702-1727, Godin ajouta l'ascension droite du Soleil, exprimée, ainsi que sa déclinaison, en degrés, minutes et secondes; les éclipses des trois derniers satellites de Jupiter, et les distances du Soleil à la Terre exprimées en demi-diamètre terrestre et calculées de dix jours en dix jours pour tous les mois de l'année. Maraldi, qui remplaça Godin en 1735, continua à rédiger la *Connaissance des Temps* sur le même plan, mais il l'enrichit de Tables nouvelles et de remarques intéressantes ; il y ajouta surtout un Tableau fort important, celui de la configuration des satellites de Jupiter, tel à peu près qu'on le trouve de nos jours. En 1760, Lalande ayant été appelé, par ordre du Roi et sur le choix de l'Académie, à continuer l'œuvre de ses prédécesseurs, en modifia considérablement la forme et y rassembla tout ce que les astronomes pouvaient désirer de plus nouveau et de plus intéressant pour leurs travaux, et tout ce que les navigateurs avaient besoin de connaître pour être en état de déterminer avec précision la longitude en mer, problème dont la solution était, à cette époque, ardemment poursuivie. Il rétablit l'annonce des phénomènes à observer et celle des occultations d'étoiles que Maraldi avait cru pouvoir supprimer, et calcula les lieux du Soleil, de la Lune et des planètes avec beaucoup plus de précision qu'on ne l'avait fait avant lui, en employant pour cela les Tables les plus récentes et les plus exactes que l'on possédât alors, à savoir : les Tables de La Caille pour le Soleil, celles de T. Mayer pour la Lune et celles de Halley pour les cinq planètes principales : Saturne, Jupiter, Mars, Vénus et Mercure. Les éclipses des satellites de Jupiter, que cet astronome donna aussi avec beaucoup de soin et d'étendue, furent calculées sur les Tables de Wargentin, dont il venait de donner lui-même une édition beaucoup plus parfaite que ne l'était celle qui avait paru à Stockholm en 1746. La publication du Volume de 1774 est surtout remarquable par l'addition d'un Chapitre important pour la navigation, celui des distances lunaires, que Lalande emprunta au *Nautical Almanac,* Ouvrage qui, depuis quelques années, se publiait à Londres sous la direction du célèbre Maskelyne. Cette méthode de déterminer la longitude en mer au moyen de la Lune n'était pas nouvelle ; depuis longtemps Halley l'avait proposée, et La Caille, qui s'en était servi dans son voyage au Cap, l'avait, à son retour en France, vivement recommandée aux navigateurs. Cet excellent astronome avait même donné, dans le second Volume de ses Éphémérides, publié en 1755, le plan détaillé d'un *Almanach nautique* où ces distances devaient se trouver calculées pour tous les jours de l'année et de trois heures en trois heures. Mais ses occupations ne lui ayant pas permis de donner suite à ce projet, ce fut Maskelyne qui, le premier, eut le mérite de le réaliser en publiant le *Nautical Almanac,* Ouvrage dont nous aurons bientôt à reparler.

Jeaurat, qui remplaça Lalande en 1776, suivit les mêmes principes que ce dernier, mais il donna avec beaucoup plus d'étendue les calculs de la Lune, en fournissant la déclinaison de cet astre de six heures en six heures. Il continua du reste, comme Lalande, à tirer du *Nautical Almanac* les distances de la Lune au Soleil et aux principales étoiles, éléments que Maskelyne avait même la complaisance de lui envoyer avant leur impression, et dès qu'il en avait vérifié l'exactitude. Méchain remplaça Jeaurat en 1788, et apporta, dans la rédaction de la *Connaissance des Temps,* un soin et une perfection que l'on n'y avait pas encore rencontrés. Il donna, dans les premières années publiées à partir de 1788, une Table fort étendue et fort précise des positions géographiques des principaux lieux du globe; les éléments de cinq comètes nouvelles; une Table des amplitudes par Degaule; des Tables du mouvement horaire de la Lune; des Tables d'aberration et de précession par Delambre; des formules de parallaxe par Carouge, etc. Tous les calculs furent exécutés à l'aide des Tables les plus exactes et les plus récentes que l'on eût alors, et vérifiés avec un soin scrupuleux. Les lieux du Soleil furent calculés sur les Tables de T. Mayer; ceux de la Lune sur les Tables du même astronome, mais revues par Ch. Masson. Les calculs de Mercure et de Vénus furent faits à l'aide des Tables que Lalande venait de faire paraître (1789); ceux de Mars, Jupiter et Saturne sur les Tables du même auteur insérées dans la seconde édition de son *Astronomie,* mais corrigées, pour Saturne, à l'aide des Tables de Halley et des formules de Laplace. Enfin, pour Uranus, on se servit des Tables publiées dans la *Connaissance des Temps* de 1787 et dressées sur les éléments déterminés par Laplace, d'après les observations mêmes de Méchain.

C'est le 7 messidor de l'an III, ou le 25 juin 1795, que, par une loi rendue sur la proposition de Lakanal et d'après le rapport du représentant du peuple Grégoire, le Bureau des Longitudes fut établi en France; et c'est à partir de cette époque mémorable que la rédaction de la *Connaissance des Temps* fut spécialement confiée à ce corps savant (¹). Lalande, qui en prit la direction pour la seconde fois, fit paraître le Volume de l'an III (1795), dont la publication avait été longtemps retardée par les troubles de la Révolution, la détention de Cassini et aussi par le nouveau calendrier que l'on voulait alors faire entrer dans la composition de cet Ouvrage. Le Volume de l'année suivante éprouva le même retard, et ce n'est qu'en l'an V qu'on put en continuer régulièrement la publication et le donner deux ans à l'avance, comme on avait coutume de le faire auparavant. Lalande, aidé de Prony, Borda, Bouvard et Méchain, continua à rédiger la *Connaissance des Temps* jusqu'en 1803, époque à laquelle Delambre en prit la direction. Largeteau commença à s'en occuper en 1849 et L. Mathieu en fut chargé à partir de 1856. Outre les astronomes dont nous venons de citer les noms, d'autres savants, tels que Laugier, Le Verrier, Delaunay, Puiseux, y ont coopéré d'une manière plus ou moins suivie. De nos jours, c'est M. Maurice Lœwy qui en est chargé et, grâce aux soins éclairés de ce savant, la rédaction de nos Éphémérides ne laisse plus rien à désirer.

Beaucoup d'autres Éphémérides importantes parurent en même temps que la *Connaissance des Temps,* et c'est ici le lieu d'en parler avec quelques détails.

Lorsque l'Académie des Sciences vit, en 1700, que les Éphémérides d'Argoli finissaient, elle chargea La Hire fils de les continuer; mais, comme nous l'avons vu, celui-ci ne fit paraître que les années 1701-1703 : l'incident regrettable auquel donna lieu l'un de ces Volumes fut sans doute la cause qui obligea leur auteur à en interrompre la publication. Desforges, sous le nom de Beaulieu, en calcula d'autres qui vont de 1701 à 1714 inclusivement. Ces Éphémérides furent ensuite étendues jusqu'à 1744 par Desplaces, et continuées par La Caille et Lalande jusqu'en 1792. Outre les Éphémérides de 1715-1744 dont nous parlons, Desplaces avait donné trois Volumes d'Éphémérides de 1706 à 1708, qui furent calculées sur les Tables de La Hire père; cet astronome était

---

(¹) Depuis 1797, le Bureau des Longitudes rédige et publie un *Annuaire* dont la partie astronomique est principalement extraite de la *Connaissance des Temps*. Arago et Delaunay ont beaucoup contribué, par leurs intéressantes Notices, à rendre cet Ouvrage populaire en France.

aussi l'auteur de petits calendriers qui parurent à partir de 1720 sous le titre d'*État du Ciel* et dont la suite va jusqu'en 1735. Vers la même époque, Lieutaud, qui dirigeait la *Connaissance des Temps*, fit paraître huit années d'Éphémérides qui s'étendent de 1704 à 1711 inclusivement. C'est par ordre de l'Académie et pour faire suite aux Éphémérides de La Hire fils, que ce travail fut entrepris; mais il paraît que Lieutaud n'y prit aucune part, et que Desplaces et Bomie en furent seuls chargés. Ce dernier donna les années 1709, 1710 et 1711, mais il copia entièrement et sans les rectifier, car elles étaient fautives, les Éphémérides de Beaulieu dont nous avons parlé plus haut.

Cette suite d'Éphémérides françaises fut imitée, en Italie, en Autriche, en Angleterre, en Allemagne, etc., par divers savants. En 1715, Eustache Manfredi, aidé de plusieurs calculateurs, fit paraître, en deux Volumes in-4°, des Éphémérides qui s'étendent jusqu'à 1725. Elles furent imprimées à Bologne et calculées sur les Tables de Cassini. La suite en fut donnée par l'auteur lui-même en 1725 et étendue jusqu'à 1750; Zanotti et Matteucci les continuèrent jusqu'en 1810. Jean Gauppe, ministre à Lindeau, publia aussi des Éphémérides qui s'étendent de 1717 à 1720 et des calendriers astronomiques à la suite desquels on trouve plusieurs observations d'éclipses. En 1721, on imprima à Londres les Éphémérides de Parker, en quatre Volumes in-12, pour les années 1721-1724, qui eurent quelque succès : Halley fournissait à l'auteur tous les calculs relatifs aux planètes supérieures, ce qui contribua beaucoup à les accréditer. Un peu plus tard, parurent à Venise les Éphémérides de Aug. Capelli pour les années 1731-1736 inclusivement : ces Éphémérides étaient calculées sur les Tables de Flamsteed et assez exactes.

Les Éphémérides que le P. Hell publia à Vienne en 1756 jouirent d'une grande réputation, à cause du nombre considérable de dissertations, d'observations et de Tables astronomiques que l'auteur y avait rassemblées. Elles furent continuées, chaque année, sans interruption, par les soins de cet excellent astronome, aidé du P. Pilgram et de A. Mayr. En 1787, Triesnecker commença à seconder Hell dans ce travail et Bürg s'y associa en 1796.

L'Académie de Berlin suivit l'exemple des savants autrichiens et fit paraître en 1774 ses *Astronomische Jahrbuch*, etc., in-8°, pour 1776, dont la publication n'a pas été interrompue depuis cette époque. Bode, qui en fut le premier chargé, continua à rédiger cet Ouvrage jusqu'en 1829, aidé de Schulze et d'autres savants. Lambert, Bernoulli, Lexell y collaborèrent aussi et ne cessèrent de l'enrichir chaque année du fruit de leurs recherches et de leurs observations. En 1793, 1795 et 1798, on fit paraître trois Volumes de supplément dans lesquels se trouvaient renfermés des Mémoires et des observations qui avaient été envoyés à Bode en trop grand nombre pour pouvoir entrer dans ses Éphémérides ; on trouve dans le second de ces Volumes une Table très utile des articles contenus dans ce Recueil depuis 1776 jusqu'à 1797. Encke succéda à Bode en 1830, et de nos jours ce sont MM. W. Fœrster et F. Tietjen qui sont chargés du soin de cette importante publication.

En même temps que parurent les Éphémérides de Berlin, on publia en Italie celles de l'abbé de Cesaris, auxquelles F. Reggio mit son nom un peu plus tard. Ces Éphémérides, qui ont été continuées chaque année sans interruption, parurent pour la première fois à Milan, sous le titre de *Effemeridi astronomiche per l'anno 1775, calculate per meridiano di Milano ;* in-4°. On y trouve un grand nombre d'observations astronomiques et météorologiques, et des Mémoires intéressants rédigés sur divers sujets d'Astronomie par les PP. Lagrange, Gerra et Boscovich. Delambre, Méchain, Callandrelli, Piazzi et autres y collaborèrent aussi et en accrurent considérablement l'importance et la réputation par les nombreux travaux qu'ils y laissèrent. A notre époque, ces Éphémérides ont été continuées avec beaucoup de succès par Oriani et Carlini, astronomes du plus grand mérite.

Ce n'est qu'en 1766 que le Bureau des Longitudes d'Angleterre fit paraître le *Nautical almanac and Astronomical Ephemeris,* in-8°, pour l'année 1767. Maskelyne, qui en prit la direction à cette époque, suivit dans l'exécution de cet Ouvrage le plan tracé par La Caille dans ses Éphémérides de 1755, en adoptant à peu près la forme et la disposition de la *Connaissance des Temps;* mais il donna avec un soin particulier et une extension très grande tous les calculs relatifs à la Lune, et fut le premier, comme nous l'avons dit, à fournir les distances de cet astre au Soleil et aux principales étoiles, éléments que Lalande transporta un peu plus tard dans la *Connaissance des Temps,* n'ayant ni le loisir de les calculer lui-même, ni les moyens que le Bureau des Longitudes d'Angleterre fournissait à l'illustre Astronome Royal pour les faire calculer. J. Pond et Stratfort, qui furent successivement chargés, après Maskelyne, de rédiger le *Nautical Almanac*, apportèrent dans la rédaction de cet Ouvrage un soin et une perfection qui ne tardèrent pas à le placer au-dessus de toutes les publications de ce genre, et même de la *Connaissance des Temps* qui, elle aussi, cependant, recevait à cette époque de notables améliorations. De nos jours et malgré le nouveau degré de perfection que le *Nautical Almanac* a acquis entre les mains de M. Hind, cette prépondérance n'existe plus. La *Connaissance des Temps* est, de l'avis de tous, un Recueil aussi complet, aussi précis et aussi bien approprié aux usages de la Navigation et de l'Astronomie que le *Nautical Almanac*.

Cette sorte d'Éphéméride à l'usage de la Marine avait été depuis longtemps projetée en France par J.-B. Morin, docteur en Médecine et professeur de Mathématiques à Paris. En 1655, le P. Léonard Durilis fit paraître un essai en ce genre, en publiant ses *Éphémérides maritimes pour observer en mer la longitude et la latitude, avec un nouveau moyen de perfectionner l'éphéméride du Soleil pour avoir toujours sa déclinaison*, etc., in-folio, Éphémérides qui s'étendent de 1655 à 1675. Un siècle plus tard, Pingré, à la prière de Le Monnier, entreprit d'en calculer de semblables et donna son *État du Ciel pour l'an 1754, calculé sur les Tables de Halley et rapporté à l'usage de la Marine*, in-8°. Cet Ouvrage, quoique conçu sur un plan excellent et rédigé avec le plus grand soin, fut si peu goûté de ceux auxquels il était destiné que, dès 1757, l'auteur dut renoncer à en continuer la publication. Citons encore, parmi les Ouvrages du même genre qui eurent quelque succès : l'*Almanach nautico per el anno* 1786, in-8°, imprimé à Madrid l'année précédente, et dont la publication, interrompue d'abord, fut reprise au commencement de ce siècle; les Éphémérides de D. Pereira, publiées à Lisbonne en 1789, sous les auspices de l'Académie de cette ville, et qui furent continuées jusqu'en 1798; celles publiées à Amsterdam par ordre du Comité de Marine et auxquelles Nieuwlang mit le premier son nom; les Éphémérides de Damoiseau de Montfort, parues à Lisbonne en 1798, et qui vont de cette époque jusqu'à 1806; celles de Monteira de Rocha, publiées à Coïmbre en 1804, et qui renferment d'importantes innovations, et enfin les Éphémérides de E. Veiga, publiées à Rome en 1788, sous le titre de *Tavole dell' Effemeridi astronomiche per l'anno* 1789, Éphémérides étendues jusqu'en 1798 et dont la suite fut donnée au même lieu par Oddi et continuées seulement pour 1799 et 1800 (1). De nos jours, on peut citer comme un modèle en ce genre *The american Ephemerides and Nautical Almanac,* Ouvrage qui depuis 1849 se publie à Washington par ordre du comité de Navigation. Depuis quelques années, c'est M. Simon Newcomb qui est chargé de la rédaction de ces Éphémérides.

II.

Tables du mouvement de la Lune.

Jusque vers la fin du XVIIe siècle, les Tables astronomiques furent peu répandues et fort imparfaites. Basées sur la connaissance des effets plutôt que sur celle des causes, elles ne tardaient pas à présenter des divergences sensibles avec les observations, et avaient besoin d'être sans cesse rectifiées sur de nouvelles données de la pratique. Les progrès que les recherches de Clairaut, de d'Alembert et d'Euler firent faire à la théorie des mouvements célestes, contribuèrent beaucoup à les rendre plus parfaites; mais ce n'est qu'à partir du XVIIIe siècle, et grâce surtout aux travaux des Laplace et des Lagrange, qu'elles acquirent un degré suffisant d'exactitude. Nous allons, dans cette Notice, indiquer succinctement les principales Tables astronomiques qui ont paru depuis le commencement du siècle dernier jusqu'à nos jours, en nous attachant particulièrement à celles publiées par les soins ou sous les auspices des Bureaux de Longitudes de France et d'Angleterre, Tables qui ont servi pendant longtemps de fondement aux calculs de la *Connaissance des Temps* et du *Nautical Almanac.*

Les premières Tables astronomiques que l'on puisse citer comme se rattachant à la période remarquable que nous allons considérer sont celles du Soleil par La Caille (1758) et celles du Soleil et de la

---

(1) Les Éphémérides d'Oddi, comme celles de Damoiseau, étaient principalement extraites de la *Connaissance des Temps* et du *Nautical Almanac.*

Lune par Tobie Mayer. Ces dernières parurent à Londres en 1760, sous le titre de *Tabulæ motuum Solis et Lunæ novæ et correctæ*, in-4°, et furent éditées par les soins et aux frais du Bureau des Longitudes d'Angleterre; les astronomes de tous les pays les adoptèrent presque immédiatement. Dans le discours qui est en tête des Tables du Soleil, Mayer annonce qu'il n'a pas eu l'intention, en composant ses Tables, d'en donner précisément de nouvelles, mais seulement de perfectionner celles de La Caille, en leur faisant subir quelques changements que ses propres observations lui avaient indiquées. Ces changements, dont il rend compte, consistent principalement dans la substitution des inégalités déduites de la théorie à celles que La Caille avait adoptées d'après Clairaut, et dans l'addition au mouvement séculaire du Soleil de la quantité 27°. Mais il faut croire que ces corrections étaient peu heureuses, la dernière surtout; car Delambre, ayant entrepris en 1786 une nouvelle vérification des Tables solaires, sentit la nécessité de se rapprocher du mouvement trouvé par La Caille et dut même, un peu plus tard, l'adopter entièrement. Quant aux inégalités provenant des actions de Jupiter, de Vénus et de la Lune, que Mayer considérait, elles diffèrent fort peu de celles introduites par La Caille, si ce n'est toutefois à l'égard de l'inégalité provenant de Vénus, que Mayer fait un peu plus faible, mais à tort, car il a été reconnu depuis que l'équation de La Caille était préférable.

Si les Tables solaires de Mayer ne méritaient pas, comme on voit, la préférence que les astronomes leur avaient accordée, il est juste de dire que les Tables de la Lune du même auteur étaient d'une précision bien surprenante pour le temps où elles parurent, et qu'elles surpassaient de beaucoup en exactitude celles de Newton et de Halley, les meilleures que l'on eût alors. Dans ces dernières, en effet, l'erreur pouvait aller jusqu'à 7^{m} ou 8^{m}, tandis que dans celles de Mayer, cette erreur n'excédait pas 2^{m}. Mayer était parvenu à ce résultat heureux, en sacrifiant un peu la théorie à l'observation, c'est-à-dire en corrigeant celle-ci au moyen de celle-là, toutes les fois que les nombres déduits de la théorie différaient sensiblement de ceux fournis par l'observation. Quant à la théorie dont Mayer se servit pour construire ses Tables, elle ne diffère pas quant au fond de celle exposée par Euler dans son *Theoria motus Lunæ* (1753), comme Mayer en convient lui-même. Cet astronome publia ses Tables dans le tome II des *Mémoires de la Société Royale de Göttingue* (1753), et les envoya deux ans plus tard à Londres pour concourir au prix des Longitudes que le Parlement anglais avait institué dès 1714 (¹). Mais il ne fut pas assez heureux pour jouir de la récompense qui lui était promise, et il mourut en 1762, laissant deux exemplaires de ses Tables auxquelles il avait fait d'importantes corrections. Sa veuve les envoya l'année suivante au Bureau des Longitudes d'Angleterre qui, sur le rapport de Bradley, accorda aux héritiers de l'auteur une première récompense de 3000 livres sterling, et, peu de temps après, une seconde récompense de 2000 livres. Ce corps savant ordonna en outre la publication des Tables manuscrites de Mayer, qui parurent à Londres en 1760, sous le titre que nous avons rapporté plus haut. Lalande s'en servit pour les calculs de la *Connaissance des Temps*, et Maskelyne, en 1767, les adopta pour la rédaction du *Nautical almanac*.

Malgré les soins dont les Tables de Mayer avaient été l'objet de la part de leur auteur et les améliorations que Bradley et Maskelyne y avaient successivement introduites (ce dernier avait corrigé les longitudes moyennes de la Lune, celles de l'apogée et de son nœud), le Bureau des Longitudes d'Angleterre jugea nécessaire d'entreprendre une revision complète desdites Tables et chargea Charles Masson, alors astronome à l'Observatoire de Greenwich, du soin de ce travail important. Ce savant l'entreprit aussitôt sous la direction de Maskelyne; et, après avoir comparé les Tables de Mayer à 1200 observations inédites de Bradley (1750-1760) et introduit dix inégalités nouvelles que Mayer avait négligées comme étant trop peu sensibles ou incertaines, il parvint à réduire l'erreur dont les Tables de Mayer étaient affectées à 30″ seulement, ce qui était un résultat inespéré. Ces nouvelles Tables de Mayer, corrigées par Masson, parurent à Londres en 1787 sous le titre de *Mayer's Lunar Tables, improved by Charles Masson, published by order of the Commissionen of Longitudes*, in-4°, et furent un peu plus tard insérées par Méchain dans la *Connaissance des*

(¹) Ce prix assurait une somme de 20000 livres sterling (500000ᶠʳ) à celui qui trouverait la longitude en mer à $\frac{1}{2}$ degré près, et pouvait être réduit à 15000 livres et à 10000 livres, suivant que la précision atteinte serait de $\frac{2}{3}$ de degré ou de 1°.

Temps de 1790. Lalande en donna une autre édition, un peu modifiée, dans son *Astronomie* de 1792, et pendant longtemps elles servirent de fondement aux calculs de la *Connaissance des Temps* et des autres Éphémérides.

A l'époque où furent construites les Tables lunaires de Mayer, ce qui s'opposait surtout au perfectionnement des Tables astronomiques, c'était le nombre des bonnes observations, qui était insuffisant. Grâce, cependant, au zèle et à la persévérance des astronomes de Greenwich, ce nombre allait en augmentant et, de 1787 à 1797, il s'était considérablement accru. L'Institut de France, en 1798, jugeant avec raison que ces observations pourraient concourir utilement au perfectionnement des Tables lunaires, prit pour sujet du prix qu'il devait décerner en 1800 la question suivante : « Déterminer par les observations, les meilleures et les plus modernes, les époques de la longitude moyenne de la Lune, de son apogée et de son nœud ascendant (¹). » Le nombre des observations qui devaient servir à fixer ces trois éléments ne pouvait pas, aux termes du programme, être inférieur à 500. En outre, les concurrents étaient invités à fournir les arguments

---

(¹) L'Institut n'avait demandé que 500 observations pour fixer les époques de la longitude moyenne de la Lune, de son apogée et de son nœud; mais les deux pièces couronnées en contenaient chacune un bien plus grand nombre. Le travail de Bürg, notamment, reposait sur la discussion approfondie de plus de 3000 observations.

Par ces recherches de Bouvard et de Bürg, il est démontré que le moyen mouvement de la Lune est, dans les Tables de Mayer, trop fort d'environ 27″, résultat auquel Delambre, comme nous l'avons dit, était parvenu en comparant les observations de La Hire et de d'Agelet entre elles et à celles de Bradley et de Maskelyne. Les autres résultats qui se déduisent des recherches de Bouvard et de Bürg sont, en général, assez concordants entre eux. Ainsi, d'après Bouvard, la correction que l'on doit appliquer au mouvement séculaire de l'anomalie moyenne donnée dans les Tables de Masson est de 8′12″ et, d'après Bouvard, de 7′14″. La longitude moyenne en 1779 doit être diminuée suivant Bouvard de 12″,2 et d'après Bürg de 9″,2. L'accord est moins satisfaisant toutefois à l'égard du lieu du nœud de la Lune et de son mouvement séculaire, ce qui peut tenir au choix des observations employées et à leur nombre. Bouvard, qui avait fait servir à la détermination de ces éléments les observations de Bradley et de Maskelyne, fixe la correction de l'époque, en 1789, à — 60″ et la diminution du mouvement séculaire du nœud à 2′,50. Bürg trouve environ — 6″ pour l'époque et 40″ pour la diminution du mouvement séculaire du nœud. Quant à la correction à appliquer à l'inclinaison de l'orbe lunaire, les deux auteurs s'accordent à lui donner à très peu près la même valeur : Bürg la trouve en effet de — 6″ et Bouvard de — 6″,5.

des principales inégalités qu'ils auraient à calculer, afin de rendre plus faciles les comparaisons.

Deux pièces furent envoyées au concours et partagèrent également le prix, qui fut même doublé en considération du mérite des deux Ouvrages. L'un était de Bouvard, astronome français, et l'autre de Bürg, astronome adjoint à l'Observatoire impérial de Vienne. Les recherches de ces deux astronomes satisfaisaient non seulement aux conditions du programme de la manière la plus complète, mais elles démontraient encore la nécessité de corriger des éléments autres que ceux indiqués dans le programme de l'Académie ; en même temps elles décelaient l'existence d'une inégalité encore inconnue (la nutation lunaire) et dont la loi ne pouvait être trouvée que par la théorie. Ces raisons engagèrent le Bureau des Longitudes de France, en 1800, à solliciter du Gouvernement l'autorisation de proposer un second prix dont l'objet serait : « 1° de discuter et d'établir, par la comparaison avec un grand nombre de bonnes observations, la valeur des coefficients des inégalités de la Lune, et de donner pour la longitude, la latitude et la parallaxe de cet astre, des formules plus exactes encore et plus complètes que celles qui servent de fondement aux Tables actuellement en usage; 2° de construire sur ces formules des Tables d'une étendue suffisante pour la commodité et la suite des calculs ». Aucun terme n'était fixé pour la durée du concours, auquel le Bureau des Longitudes avait attaché un prix de 6000 francs.

Bürg, qui n'avait cessé de poursuivre ses recherches sur les mouvements de la Lune, et qui était déjà en possession d'un grand nombre d'observations faites par des astronomes réputés les plus habiles, envoya au Bureau des Longitudes, dès le mois de décembre 1801, de nouvelles Tables qui, par l'incontestable supériorité qu'elles présentaient sur toutes celles parues jusqu'alors, furent jugées tout à fait dignes du prix proposé. Ce prix fut même doublé par Bonaparte, alors premier Consul, sur le rapport que Lalande lui en fit au nom du Bureau des Longitudes.

Les Tables de Bürg présentaient la même disposition que celles de Masson et, comme celles-ci, empruntaient à la théorie la forme des principaux arguments. Pour les construire, Bürg avait rassemblé toutes les observations de Maskelyne faites à Greenwich de 1765 à 1793; et c'est de l'ensemble de ces observations, dont le nombre dépassait 3000, qu'il avait tiré les corrections dont les Tables de Masson avaient encore besoin. Ces corrections étaient assez légères et n'auraient peut-être pas amélioré sensiblement les Tables de Masson, si l'auteur n'y avait introduit plusieurs inégalités nouvelles, les unes indiquées par Mayer, les autres signalées par Laplace, qui les avait déduites de la théorie. Au nombre de ces dernières se trouvait une inégalité périodique fort remarquable, dépendante de la longitude vraie de la Lune, et dont la période semblait être la même que celle des nœuds de cet astre, c'est-à-dire de dix-huit ans et demi environ. Les observations l'avaient indiquée à Bürg au début de ses recherches, mais ce savant n'avait jamais pu parvenir à en déterminer la loi (¹). Laplace, qui y fut conduit par l'analyse, prouva que cette inégalité était le résultat d'un mouvement de nutation produit par l'attraction du sphéroïde terrestre et analogue à celui que la Lune produit sur l'équateur terrestre, de manière que l'un de ces effets est la réaction de l'autre. Il détermina le coefficient dans l'inégalité qui en résulte pour la latitude et le trouva égal à $-6'',5$ pour un aplatissement de $\frac{1}{334}$ et à $-13'',5$ pour un aplatissement de $\frac{1}{230}$. Bouvard reprit un peu plus tard la détermination de cette inégalité, et, l'ayant comparée à 220 observations de Maskelyne dans lesquelles elle était à son maximum, et à 220 observations du même astronome dans lesquelles elle était à son minimum, il trouva pour son coefficient $-7'',5$, ce qui donne $\frac{1}{313}$ pour l'aplatissement de la Terre. C'est cette inégalité dont l'influence se fait sentir à la fois sur la position des nœuds de la Lune et sur l'inclinaison de son orbite qui a été introduite depuis dans les calculs astronomiques sous le nom de *nutation lunaire*.

Ce résultat important, déduit de la théorie et confirmé par les observations, conduisit Laplace à une nouvelle détermination de l'inégalité de la Lune qui dépend de la longitude du nœud et

---

(¹) Par la discussion des observations qu'il possédait, Bürg avait, en effet, reconnu que le maximum positif de cette inégalité paraissait répondre aux années 1778 et 1795 et le maximum négatif aux années 1768 et 1787 : l'intervalle du maximum positif au maximum négatif ou la durée de l'intervalle était donc bien d'environ 18 ans.

dont la cause est l'aplatissement du sphéroïde terrestre. Ce grand géomètre l'avait d'abord fixée à environ 2″ par la seule théorie; mais, ayant reconnu depuis que la nutation lunaire avait une influence marquée sur sa marche, il reprit le calcul de cette inégalité et trouva pour son coefficient 5″,6, ce qui répond à $\frac{1}{334}$ d'aplatissement. Avant Laplace, aucune théorie n'avait indiqué l'inégalité dont nous parlons, mais les observations l'avaient depuis longtemps révelée à Bürg, Masson et Mayer. Ce dernier ne l'avait fixée qu'à 4″; mais, par la comparaison d'un plus grand nombre d'observations, Masson et Bürg la trouvèrent, le premier de 7″,7 et le second de 6″,8.

Nous avons dit que les observations dont Bürg s'était servi pour construire ses Tables s'arrêtaient à l'année 1793. Depuis cette époque jusqu'à celle de la présentation desdites Tables au Bureau des Longitudes (novembre 1801), il s'était écoulé neuf ans. Ce temps devait suffire aux erreurs tabulaires pour se manifester, s'il en existait d'un peu considérables. Or c'est ce dont on ne tarda pas à s'apercevoir. Bürg, ayant, en effet, comparé ses Tables à un grand nombre d'observations récentes, reconnut qu'elles étaient déjà en erreur de 10″. Laplace, à qui Bürg communiqua ce résultat, en rechercha la cause dans l'action que le Soleil exerce sur la Lune et ne tarda pas à reconnaître que cette action produisait dans le mouvement de ce dernier corps une inégalité à longue période dépendante de l'argument (périgée ☾ — 3 périgée ⊙ + 2 long ☊) et dont il fixa la période à environ 184 ans. Quant à la détermination de son coefficient, Laplace préféra, à cause de la difficulté extrême que présentait cette détermination, s'en rapporter à l'observation même, et engagea Bürg à s'occuper de cette recherche. Ce savant l'entreprit aussitôt et, par la comparaison des moyens mouvements de la Lune conclus d'un grand nombre d'observations faites de 1709 à 1802, il parvint à fixer à 15″ la valeur du coefficient dans l'inégalité en question. Bürg corrigea d'après cette inégalité les époques et les moyens mouvements de ses Tables et parvint ainsi à réduire considérablement l'erreur dont elles étaient affectées. On voit, en effet, par la comparaison que Delambre en fit en 1804, que cette erreur n'excédait pas 10″ pour la longitude et qu'elle n'était que d'environ — 6″ pour la latitude. Ces Tables corrigées de Bürg furent publiées sous les auspices et aux frais du Bureau des Longitudes de France (¹) et parurent en même temps que celles du Soleil de Delambre dans la première partie du Recueil, publié en 1806 par cette célèbre institution, sous le titre de *Tables astronomiques*.

Les Tables de Bürg furent suivies de celles de Burckhardt, publiées en 1812. Ces dernières n'étaient pas précisément des Tables nouvelles, mais des Tables de Bürg présentées sous une forme plus commode pour les applications et rectifiées par la comparaison avec un grand nombre d'observations récentes. Déjà Schulze, de Berlin, et, après lui, un savant géomètre italien, Carlini, avaient senti la nécessité qu'il y aurait à refondre les Tables lunaires pour ramener toutes les équations qu'elles renferment à ne dépendre que des arguments moyens. Burckhardt s'attacha à cette idée et, après avoir donné à ses Tables la disposition que cette transformation des arguments exigeait, il les compara à toutes les observations que Bürg avait réduites et à un grand nombre d'autres plus récentes, et parvint ainsi à déterminer à la fois, et les corrections des éléments employés par Bürg, et les coefficients des nouvelles équations que les observations lui indiquaient comme sensibles. Ces Tables de Burckhardt furent adoptées par le Bureau des Longitudes en 1816, et servirent, à partir de 1817, aux calculs de la *Connaissance des Temps* et des autres Éphémérides (²).

(¹) Delambre, qui avait été chargé par le Bureau de vérifier les Tables de Bürg et d'en surveiller l'impression, dut leur faire subir quelques changements, afin de les présenter en la même forme que les Tables du Soleil : il rendit additives toutes les équations pour la commodité et la sûreté des calculs et étendit aux dizaines de minutes les Tables de l'équation du centre et de la latitude que Bürg n'avait données que de degré en degré. En outre, il changea la disposition des Tables du mouvement horaire, que leur auteur avait calculées, d'après les formules données dans la *Connaissance des Temps* de l'an IX et ajouta quelques Tables subsidiaires, destinées à faciliter le calcul des observations de la Lune. Aucun des coefficients de Bürg ne fut changé, mais on rendit la longitude moyenne 4″ plus faible que Bürg ne l'avait faite, en avertissant toutefois les astronomes de cette correction, afin qu'ils pussent l'adopter ou la rejeter suivant qu'ils le jugeraient convenable.

(²) Avant de les adopter et de les substituer à celles de Bürg, le Bureau des Longitudes voulut connaître leur degré relatif de précision, et chargea une Commission composée de Laplace, Delambre, Poisson et Arago de les examiner et d'en faire un rapport. Cette Commission décida que l'on comparerait concurremment les Tables de Buckhardt et celles de Bürg à un grand nombre d'observations ré-

Les diverses Tables lunaires, que nous venons de passer en revue, étaient fondées sur la réunion de la théorie et de l'observation, mais s'appuyaient davantage sur l'observation que sur la théorie, dont elles ne faisaient qu'emprunter la forme des arguments. A une époque où la théorie des mouvements lunaires était loin d'avoir atteint la perfection que nous lui connaissons, cette méthode était, peut-être, la seule que l'on pût suivre dans la solution d'un problème où le nombre des inégalités est si grand et les approximations si difficiles à conduire. Les progrès que les recherches des géomètres du XIX^e siècle firent faire à la théorie de la Lune, en permettant de déterminer sous forme analytique les expressions des diverses inégalités qui troublent le mouvement de cet astre, firent concevoir l'espoir de voir cette théorie résulter uniquement du principe de la gravitation universelle sans emprunter à l'observation d'autres données que celles nécessaires pour fixer les éléments du mouvement elliptique. Déjà Laplace, au Livre VII de la *Mécanique céleste,* avait prouvé la possibilité de cette solution théorique et montré les avantages que l'on pouvait

---

centes faites tant à Greenwich qu'à Paris et que l'on adopterait, dans le calcul de l'erreur la plus probable, la méthode des moindres carrés. Voici les résultats de cette comparaison, tout à fait favorable aux Tables de Burckhardt.

Tables de Bürg	Erreur moyenne en longitude (1660 obs.) pour le milieu de 1804	+ 0″,18
	Sommes des carrés des erreurs	7080
	Erreur moyenne en distance polaire	— 3,3
	Sommes des carrés des erreurs	6729,4
	Erreur moyenne en ascens. droite (138 obs.) pour le milieu de 1811	+ 1,4
	Sommes des carrés	6439,0
Tables de Burckhardt.	Erreur moyenne en longitude (1670 obs.) pour le milieu de 1804	+ 0″,10
	Sommes des carrés des erreurs	4602,4
	Erreur moyenne en distance polaire	— 2,3
	Somme des carrés des erreurs	5650,5
	Erreur moyenne en ascens. droite (138 obs.) pour le milieu de 1811	— 0,1
	Somme des carrés	4181,6

La comparaison des mêmes Tables aux observations plus anciennes de La Hire et de Flamsteed donnait encore l'avantage aux Tables de Burckhardt, mais ici les différences étaient beaucoup moins sensibles.

en retirer pour la détermination de plusieurs éléments importants; mais ce géomètre, ayant eu pour principal objet cette démonstration, n'avait pas poussé assez loin ses développements, et de nouvelles recherches devenaient nécessaires pour assurer aux résultats déduits de la théorie une précision au moins comparable à celle des observations. C'est cet important objet que l'Académie des Sciences de Paris proposa aux géomètres et aux astronomes, en prenant pour sujet du prix qu'elle devait décerner en 1820 la formation par la seule théorie des Tables lunaires aussi exactes que celles que l'on avait jusque-là construites, par le secours de la théorie et de l'observation réunies. Deux pièces également remarquables et satisfaisant aux conditions prescrites furent envoyées au concours et partagèrent le prix. L'une de ces pièces était de Damoiseau, l'autre de Plana et Carlini, géomètres italiens. Quoique basées sur des méthodes différentes (la méthode de Damoiseau ne différait pas de celle de Laplace), les théories exposées par ces savants auteurs conduisaient à des résultats presque identiques entre eux, et s'accordaient assez exactement avec ceux fournis par les meilleures Tables lunaires (¹). Ainsi le vœu exprimé par l'Académie était rempli : par ces nouvelles recherches de Damoiseau, Plana et Carlini, il était démontré que la gravitation universelle est l'unique cause des inégalités qui troublent le mouvement de la Lune et que l'on peut, sans emprunter à l'observation d'autres données que celles qui sont indispensables au problème, former des Tables lunaires assez exactes pour suffire à tous les besoins de la pratique. Le Mémoire de Plana et Carlini ne fut pas imprimé; mais, un peu plus tard, Plana reprit pour son compte les recherches commencées en commun avec Carlini, et les étendit considérablement dans un

---

(¹) Cet accord était surtout manifeste pour les *inégalités périodiques*. Pour les *inégalités séculaires*, et en particulier pour les inégalités du mouvement moyen du périgée et des nœuds, les résultats fournis par les deux théories étaient conformes aux observations et parurent à Laplace préférables à ceux qu'il avait lui-même déterminés, bien que les différences entre ces résultats et les siens fussent peu sensibles. Voici un Tableau de ces différences en fixant, d'après Laplace, l'origine du temps au commencement de 1801 :

	Damoiseau.	Plana et Carlini.	Laplace.
Variation séculaire de la long..	0,0086457	0,0076010	0,0083660
Variation séculaire du périgée.	— 0,0229890	— 0,0311110	— 0,0251023
Variation séculaire du nœud..	0,0051936	0,0053877	0,0061528

Ouvrage en 3 volumes in-4°, publié à Turin sous le titre de *Théorie de la Lune*. Le premier Volume parut en 1831 et les deux suivants en 1832. En 1853, de nouvelles Tables lunaires ont été construites d'après la théorie de Plana et ont paru à Washington sous le titre de *Tables of the Moon, constructed from Plana's theory*, et in-4°. Quant à la théorie de Damoiseau, elle fut imprimée, par ordre de l'Académie, dans le Tome III des *Mémoires des Savants étrangers* et servit de fondement à de nouvelles Tables lunaires qui parurent en 1824 et en 1828. Les premières de ces Tables sont construites dans le système centésimal et les secondes suivant la division sexagésimale; le nombre des arguments pour la longitude y est de 47, tandis que dans les Tables de Plana ce nombre s'élève à 79.

De même que Laplace, et à l'exemple des géomètres du xvii^{e} siècle siècle, Damoiseau et Plana avaient établi les équations différentielles du mouvement de la Lune, en prenant pour variable indépendante la longitude vraie de cet astre, c'est-à-dire, en regardant comme constante la différentielle de la longitude vraie, et exprimant l'élément du temps en fonction de cette longitude. On pouvait se demander si, en renversant le problème, c'est-à-dire, en prenant le temps pour variable indépendante, comme cela se pratique dans la théorie des planètes, on ne rendrait pas plus convergente la série des approximations par lesquelles on est obligé de passer, pour parvenir à la connaissance exacte des mouvements lunaires. C'est cet essai que tentèrent les successeurs de Damoiseau et Plana, et leurs efforts furent couronnés de succès. Le premier pas dans cette voie nouvelle fut fait par John Lubbock, géomètre anglais. De 1832 à 1849, ce savant fit paraître, dans les *Transactions philosophiques*, une série de recherches sur la théorie de la Lune, qui furent plus tard réunies en un Volume, et publiées à Londres sous le titre de *Theory moon Lunar*, etc. Lubbock y adopte le temps pour variable indépendante; mais, n'ayant pas poussé les développements analytiques au delà des termes qui sont du premier ordre par rapport à la masse perturbatrice, il n'a pu entreprendre la réduction en nombres de ses formules, et sa théorie est demeurée sans application. Vers la même époque, Poisson, adoptant les idées de Lubbock, proposa de remplacer les équations différentielles d'où dépendent la longitude vraie de la Lune, sa latitude et son rayon vecteur, par celles relatives aux six éléments elliptiques devenus variables, c'est-à-dire qu'il appliqua au problème des perturbations lunaires la célèbre méthode de la variation des constantes arbitraires, que l'on doit au génie de Lagrange. Un peu plus tard, de Pontécoulant s'occupa de la même question et publia une théorie de la Lune qui forme le Tome IV de son grand Ouvrage sur la théorie analytique du système du monde. Comme Lubbock, ce savant y prend le temps pour la variable indépendante et suit dans l'intégration des équations différentielles du mouvement troublé la méthode ordinaire d'approximation en poussant les développements jusqu'aux termes du quatrième ordre par rapport à la force perturbatrice. Après avoir réduit ses formules en nombres, de Pontécoulant trouve, pour les coefficients des inégalités tant séculaires que périodiques, des valeurs qui se rapprochent beaucoup de celles obtenues par Damoiseau et Plana.

En 1838, Hansen reprit le problème des perturbations lunaires en suivant une marche entièrement différente de celle adoptée par ses devanciers, et parvint à déduire des formules contenues dans sa théorie (*Fundamenta nova investigationis orbitæ veræ quam Luna perlustrat,* in-4°) des Tables qui ont été trouvées bien supérieures à celles de Burckhardt et de Damoiseau. Ces Tables, précédées d'une introduction en français, ont paru à Londres en 1857, aux frais du gouvernement britannique, sous le titre de *Tables du mouvement de la Lune, construites uniquement d'après le principe de la gravitation universelle,* in-4°; elles servent actuellement de fondement aux calculs de la *Connaissance des Temps* et du *Nautical almanac.* Comparées à de nombreuses observations de la Lune, faites à Greenwich de 1824 à 1850, elles ont donné pour la moyenne des différences en ascension droite 2″,5 et pour la moyenne des différences en déclinaison 2″,1. Mais, depuis, ces différences se sont graduellement accrues, et, de nos jours, elles atteignent 10″ ou 12″. La *Connaissance des Temps* et le *Nautical almanac* donnent, chaque année, d'après Newcomb, un Tableau des corrections empiriques qu'il faut appliquer aux ascensions droites et déclinaisons de la Lune pour tenir compte de ces différences.

Après les travaux remarquables que nous venons d'énumérer, on ne pouvait plus douter qu'il fût possible de pousser dans la théorie de la Lune les approximations encore plus loin que dans la théorie des planètes; mais les moyens de les effectuer par la voie ordinaire paraissaient impraticables, à cause des complications excessives de calcul dans lesquelles on se trouve entraîné à mesure que l'on s'élève dans l'ordre des approximations. Cette difficulté, qui avait arrêté les prédécesseurs de Hansen et qui n'avait pas permis à ce grand géomètre de pousser les approximations au delà du quatrième ordre, ne parut pas insurmontable à Delaunay qui chercha, dans une nouvelle méthode d'intégration, le moyen de la réduire. La voie suivie par cet éminent géomètre pour arriver à ce but est des plus fécondes et des plus ingénieuses. Elle consiste à fractionner les intégrations en plusieurs parties, et à remplacer les approximations successives, qui se présentent avec tant de complication dans la méthode ordinaire, par un nombre beaucoup plus grand, il est vrai, d'opérations distinctes, mais présentant toutes ce caractère précieux, de pouvoir s'effectuer très simplement et avec une grande exactitude. C'est, si l'on veut, une méthode d'exhaustion analogue à celles des anciens géomètres, et qui a pour but d'épuiser par degrés successifs toutes les inégalités suivant leur ordre de grandeur, de manière à diminuer de plus en plus les opérations à mesure que l'on s'élève dans l'ordre des approximations. En la suivant, son savant auteur a pu pousser beaucoup plus loin qu'on ne l'avait fait avant lui le calcul des inégalités de la Lune, sans cesser de conserver une entière sécurité sur l'exactitude des résultats obtenus. Et, en effet, tandis que Damoiseau, Pontécoulant et Hansen s'étaient arrêtés dans les approximations aux termes du quatrième ordre et que Plana, par des calculs dont le développement a quelque chose d'effrayant, n'avait pas, en général, dépassé le cinquième ordre, Delaunay a pu aller jusqu'aux termes du septième ordre inclusivement et même jusqu'à ceux du huitième et du neuvième pour certaines inégalités dépendantes de la longitude. Cette tâche était énorme : « Pour l'accomplir, dit l'auteur, je n'ai négligé aucun des nombreux moyens de vérification que la théorie m'a indiqués. En outre, j'ai fait tous les calculs deux fois, sans aucune exception, en ayant soin de séparer chaque calcul de sa répétition par un temps aussi long que possible et par d'autres calculs tout différents, afin de rompre les habitudes de l'esprit qui, sans cela, feraient facilement retomber dans une faute commise une première fois. » La *Théorie du mouvement de la Lune,* de Delaunay, a paru dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* en 1860 et 1867, où elle forme la matière des Tomes XXVIII et XXIX de ce Recueil. Dans un troisième Volume, l'auteur devait compléter sa théorie par l'étude de plusieurs questions se rattachant particulièrement à la théorie des perturbations lunaires, telles que l'équation séculaire de la Lune, les inégalités résultant de l'action des planètes sur la Lune, etc. Mais, une mort prématurée l'ayant enlevé à la Science, cette suite n'a pu être donnée à son Ouvrage, qui n'en restera pas moins une œuvre d'un grand mérite. Depuis quelques années, MM. Airy, en Angleterre, et Tisserand, en France, s'occupent de construire, d'après la théorie de Delaunay, de nouvelles Tables lunaires, qui, nous l'espérons cette fois, par leur exactitude durable, répondront enfin au vœu des astronomes et des navigateurs.

III.

Tables du mouvement des planètes.

Après avoir esquissé la série des travaux que les géomètres et les astronomes de la fin du XVIII^e^ siècle et ceux du XIX^e^ ont dû effectuer pour rendre plus parfaite la théorie des mouvements lunaires, et parvenir à en déduire des Tables qui représentassent, avec toute la précision désirable, les observations modernes, il nous reste à parler des travaux semblables qui ont été entrepris dans la théorie des planètes, et qui ont conduit à de nouvelles Tables perfectionnées de ces astres. Mais, dans cette étude comme dans la première, nous nous renfermerons dans la période remarquable que nous venons de parcourir, période qui commence à l'établissement du Bureau des Longitudes d'Angleterre et qui se termine à nos jours.

Nous avons déjà parlé des Tables solaires de Mayer et dit en quoi elles différaient de celles de La Caille, publiées en 1758. Pour suivre l'ordre chronologique plutôt que celui des matières, nous allons placer ici, à la suite de ces Tables, celles de Lalande, relatives aux planètes Mercure, Vénus et Mars, Tables qui ont été, de la part de cet astronome, le résultat d'un travail assidu de plus de quarante années.

Les premières recherches de Lalande sur ce sujet datent de 1758 et ont pour objet le calcul des inégalités que l'action de Vénus introduit dans le mouvement de Mars. Un peu plus tard, en 1760-1761, ce savant fit paraître de nouvelles recherches sur les planètes Vénus, la Terre et Mars, et, à partir de 1766, il donna sur l'orbite de Mercure une série de travaux qui ont été publiés dans le Recueil des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris,* et qui ont servi de base à de nouvelles Tables de cet astre, parues en 1771 dans la seconde édition de son *Astronomie.* Bien que plus précises que celles de Halley, ces Tables de Mercure par Lalande étaient loin d'être exactes et ne représentaient que bien imparfaitement les observations, comme un passage de la planète, arrivé le 3 mai 1786, est venu le démontrer. L'annonce que Lalande avait faite de ce passage fut trouvée en erreur de plus de quarante minutes par deux astronomes, Messier et Delambre, qui étaient restés à leurs lunettes après l'instant marqué pour la sortie, le premier pour tâcher de revoir quelques taches qu'il avait observées les jours précédents, et le second, comme il l'avoue lui-même, par la défiance qu'il avait conçue de l'exactitude desdites Tables. Ces Tables de Mercure furent refaites en 1796 par leur auteur, qui y fit concourir cette fois toutes les observations de passages qu'il avait pu recueillir et qui étaient en assez grand nombre. Les nouvelles Tables qui en résultèrent servirent pendant longtemps, ainsi que celles de Vénus et de Mars, aux calculs des diverses Éphémérides et, en particulier, à ceux de la *Connaissance des Temps.* Elles furent remplacées, en 1835, par celles de Lindenau, parues à Gotha en 1813, Tables qui, s'appuyant davantage sur la théorie que celles de Lalande, représentaient, avec une exactitude plus soutenue, les observations.

Ces recherches de Lalande sur Mercure, Vénus et Mars furent suivies de celles relatives aux planètes Jupiter et Saturne, et de nouvelles Tables de ces astres furent construites par cet astronome vers 1760. Mais ici la difficulté était complexe : elle tenait d'une part à la connaissance exacte des masses perturbatrices et, d'autre part, à une cause alors inconnue de perturbation, bien que l'observation l'eût depuis longtemps révélée à Halley : à savoir les grandes irrégularités de Jupiter et de Saturne, irrégularités en vertu desquelles le mouvement de la première planète semble s'accélérer lorsque celui de la seconde se ralentit, et réciproquement. Tant que cette cause de perturbation ne fut pas connue, il fut impossible de représenter convenablement les observations autrement que par le secours d'*équations empiriques*. Aussi ces Tables de Lalande, malgré le soin qu'il prit à les construire, n'étaient-elles guère plus exactes que celles de Halley, où l'erreur, en 1760, s'élevait à 22′ pour Saturne et à 11′ pour Jupiter. Mais Laplace, en 1784, ayant publié une théorie complète de ces deux planètes et montré que les grandes erreurs dont les Tables de Halley étaient affectées disparaissaient presque entièrement par l'emploi de ses formules, on put espérer de voir bientôt de nouvelles Tables succéder à celles de Halley, et c'est, en effet, ce qui ne tarda pas à avoir lieu. Delambre, que Laplace avait depuis longtemps initié à ses recherches sur la théorie des planètes, entreprit ce grand travail, et fit paraître, en 1789, de nouvelles Tables de Jupiter et de Saturne, entièrement fondées sur la théorie de Laplace, et si précises que l'erreur allait rarement au delà de 30″. Pour les construire, Delambre avait rassemblé toutes les oppositions, tant de Jupiter que de Saturne, observées de 1690 jusqu'en 1787, et c'est de l'ensemble de ces oppositions comparées aux formules de Laplace qu'il avait déduit les éléments fondamentaux de ses Tables. En même temps, ce savant astronome fit paraître des Tables d'Uranus, fondées également sur la théorie de Laplace et qui, comparées aux observations les plus récentes, paraissaient s'accorder avec elles assez exactement. L'Académie des Sciences, en 1790, leur décerna le prix qu'elle avait proposé pour cet important sujet, et, pendant quelques années, elles servirent de base aux calculs de la *Connaissance des Temps* et des autres Éphémérides.

En 1808, de nouvelles Tables décimales de Jupiter et Saturne furent construites par Bouvard et publiées sous les auspices du Bureau des Longitudes. Deux raisons principales déterminèrent cet habile astronome à entreprendre si tôt ce grand travail : la connaissance déjà plus exacte et plus complète que l'on avait des inégalités de Jupiter et de Saturne, et le grand nombre d'oppositions nouvelles observées depuis 1787. La presque totalité des oppositions sur lesquelles furent fondées ces nouvelles Tables étaient conclues des observations de Bradley et de Maskelyne, et ne remontaient guère au delà de 1750 ; quelques-unes étaient tirées des observations que Bouvard lui-même avait faites à l'Observatoire de Paris. A ces oppositions, Bouvard avait encore joint toutes celles observées depuis 1761 jusqu'en 1787, et que Delambre avait employées dans la construction de ses Tables. La comparaison que Bouvard fit des Tables de Jupiter et de Saturne avec cent onze oppositions de ces planètes lui montra que les plus grandes erreurs ne s'élevaient pas au-dessus de $41''$ centésimales ou $13''$ sexagésimales. Malgré cet accord satisfaisant, ces Tables renfermaient une erreur bien grave que la théorie y avait introduite et qui n'aurait pas manqué de se manifester promptement aux observateurs. En revoyant ses calculs, Laplace venait, en effet, de reconnaître que la partie de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne qui dépend des cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons avait été prise avec un signe contraire et que, par conséquent, la grande inégalité employée par Bouvard dans ses Tables était erronée, ainsi que les époques et les moyens mouvements desdites Tables. Des altérations aussi graves dans les principaux éléments de ses Tables déterminèrent Bouvard à reprendre son travail et à le refaire entièrement, en profitant de toutes les oppositions et quadratures nouvelles. Les Tables qu'il publia en 1821 reposent sur la totalité des oppositions et quadratures observées de 1750 à 1813 pour Jupiter, et de 1747 à 1814 pour Saturne; et le nombre des équations de condition d'où dépendent les corrections des éléments elliptiques, ainsi que celles des masses perturbatrices, y est, dans ces nouvelles Tables, plus que double de celui des premières (¹). Comparées à un grand nombre d'observations, faites

---

(¹) Les longitudes et latitudes fournies par les Tables sont *héliocentriques*, c'est-à-dire rapportées au centre du Soleil. Pour pouvoir comparer ces longitudes et latitudes à celles déduites de l'observation et qui sont *géocentriques*, il faut d'abord convertir par le calcul les ascensions droites et déclinaisons observées en longitude et latitude géocentriques, puis transformer ces dernières en longitude et latitude héliocentriques.

Soient alors $\mathcal{L}'$ la longitude héliocentrique d'une planète déduite de l'observation et $\mathcal{L}$ le même élément donné par les Tables. Si les Tables étaient exactes et les observations exemptes d'erreurs, on devrait avoir $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$; mais, comme en général il y a toujours une différence entre ces deux longitudes, on a $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \delta\mathcal{L}$ et, par conséquent,

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L}.$$

Pareillement on aurait entre la latitude observée λ' et la latitude calculée λ la de 1750 à 1769 pour Jupiter, et de 1747 à 1815 pour Saturne, les Tables dont nous parlons ont donné des différences dont la plus forte n'excède pas 37″ centésimales ou 12″ sexagésimales; elles ont servi jusqu'en 1879 aux calculs de la *Connaissance des Temps* et des autres Éphémérides.

Aux Tables de Jupiter et de Saturne, Bouvard avait joint des Tables d'Uranus construites en la même forme que ces dernières, mais qui étaient loin, malgré les soins que leur auteur avait mis à les calculer, de représenter convenablement les observations. Elles présentaient cette anomalie très curieuse que, si l'on combinait

---

relation

$$\delta\lambda = \lambda' - \lambda.$$

Les différences $\delta\mathfrak{L}$ et $\delta\lambda$ sont ce qu'on nomme les *erreurs des Tables* en longitude et en latitude.

Supposons maintenant que l'on ait rassemblé un certain nombre d'observations faites par des observateurs habiles et embrassant un intervalle de temps aussi grand que possible. Appelons $l = nt + \varepsilon$ la longitude moyenne de la planète m, $\zeta = nt + \varepsilon - \omega$ son anomalie moyenne, et soit $\Sigma m^{(i)}\mathfrak{P}^{(i)}$ l'ensemble des perturbations (exprimées en secondes) que la planète m éprouve de la part des autres planètes m', m'', ... En négligeant, dans l'équation du centre, les puissances de l'excentricité supérieures à la première, on aura

$$\mathfrak{L} = nt + \varepsilon + 2e\sin\zeta + \sum m^{(i)}\mathfrak{P}^{(i)},$$

équation qui, étant différentiée par rapport à la caractéristique δ, donne, en regardant t, $2e$ et $\mathfrak{P}^{(i)}$ comme constants,

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{L} = (1 + 2e\cos\zeta)\,\delta\varepsilon + (1 + 2e\cos\zeta)\,t\,dn - 2\sin\zeta\,\delta e \\ - 2\cos\zeta\, e\,\delta\omega + \sum \mathfrak{P}^{(i)}\,\delta m^{(i)} = \mathfrak{L}' - \mathfrak{L}.\end{aligned}$$

Cette *équation de condition* entre les corrections des éléments elliptiques et celles des masses perturbatrices est la plus générale que l'on puisse former. Chaque observation de la longitude donnant lieu à une équation semblable, la résolution de toutes ces équations par la méthode des moindres carrés fait connaître les valeurs des indéterminées δn, $d\varepsilon$, δe, $\delta\omega$ et $\delta m^{(i)}$, valeurs qui sont les corrections à appliquer aux Tables provisoirement construites, pour passer de ces Tables aux Tables définitives.

C'est par un semblable moyen qu'ont été construites en 1808 et refaites en 1821 les Tables de Jupiter, Saturne et Uranus de Bouvard. Les corrections $\delta m^{(i)}$ qu'il en a tirées pour les masses de ces trois planètes lui ont donné les résultats suivants :

Jupiter..... $\dfrac{1}{1070,5}$ Saturne.... $\dfrac{1}{3512}$ Uranus.... $\dfrac{1}{17918}$

les observations anciennes de Flamsteed, Mayer, Bradley et Le Monnier avec celles plus récentes, les premières se trouvaient suffisamment représentées, tandis que les secondes ne l'étaient qu'imparfaitement ; et que, si, au contraire, on voulait s'astreindre à représenter les observations modernes, les anciennes étaient en désaccord manifeste avec les Tables. Forcé de se décider entre ces deux partis, Bouvard s'en tint au second, comme étant celui qui lui présentait plus d'avantages, et laissa, comme il le dit lui-même dans l'Introduction à ses Tables, « aux temps à venir le soin de faire connaître si la difficulté de concilier les deux systèmes tenait réellement à l'inexactitude des observations anciennes ou si elle dépendait de quelque action étrangère et inaperçue qui aurait agi sur la planète ». La découverte de Neptune par Adam et Le Verrier en 1846 est venue, comme on sait, donner raison à cette dernière hypothèse.

Les Tables de Bouvard furent refaites par son neveu Eugène Bouvard, et présentées à l'Institut dans le mois de septembre 1845; mais elles ne furent pas publiées. Quoique de beaucoup préférables aux anciennes, ces nouvelles Tables étaient loin, comme on le pense bien, de présenter un accord satisfaisant avec l'observation. La nature des erreurs qu'elles renfermaient confirmèrent E. Bouvard dans l'opinion émise par son oncle, à savoir qu'il devait exister au delà de l'orbite d'Uranus une planète dont l'action perturbatrice était la cause des anomalies singulières observées dans le mouvement de cet astre. Ces erreurs présentaient en effet une périodicité tout à fait analogue à celle que l'on observe dans la théorie de Saturne lorsqu'on suppose Uranus inconnu. Les nouvelles Tables corrigées de Bouvard furent adoptées par le Bureau des Longitudes, en 1846 et servirent, à partir de cette époque, aux calculs de la *Connaissance des Temps*.

Nous allons maintenant revenir aux Tables du mouvement apparent du Soleil, qui ont été construites durant la période que nous venons de considérer, Tables dont nous avons déjà cité les premiers essais au début de la présente Notice.

En s'appuyant sur les recherches de d'Alembert, d'Euler et de Clairaut, nous avons dit que La Caille était parvenu à construire des Tables solaires qui, perfectionnées par Mayer, jouirent pendant longtemps de l'estime des astronomes. Ces

Tables, assez peu précises (l'erreur s'élevait parfois à 30″), furent remplacées en 1790 par celles que Delambre publia dans la troisième édition de l'*Astronomie* de Lalande et qu'il corrigea un peu plus tard à l'aide de nouvelles données de l'observation. C'est par la comparaison de près de 1500 observations, tant de Bradley que de Maskelyne et de Bouvard, que Delambre parvint à déterminer les corrections dont ses premières Tables avaient encore besoin. Les époques de 1752 et de 1802 qu'il déduisit des observations de Bradley, au nombre de 720 et de quatre équinoxes déterminés chacun par près de 300 observations, lui servirent à fixer le mouvement séculaire moyen qu'il trouva égal à 0° 45′ 45″, c'est-à-dire moindre de 15″ que celui employé dans ses premières Tables. Il diminua pareillement de 15″ le mouvement séculaire des équinoxes, de 1″,7 la longitude moyenne et de 3″ celle du périgée. Quant à l'équation du centre il la trouva à fort peu près la même que celle adoptée dans les premières Tables. Delambre déduisit encore des mêmes observations les corrections à appliquer aux coefficients des principales inégalités résultant des actions de Vénus, Mars et la Lune, et détermina par ce moyen une valeur plus approchée de la masse de ces corps, qu'il trouva respectivement égale à

$$\frac{1}{356632},\quad \frac{1}{2546320},\quad \frac{1}{62,9}.$$

Avant Delambre, les astronomes qui avaient entrepris de réduire en Tables le mouvement apparent du Soleil supposaient que ce mouvement s'effectue exactement dans le plan de l'écliptique. Par l'effet des perturbations planétaires et lunaires, le Soleil s'écarte de part et d'autre de ce plan de quantités très petites, à la vérité, mais auxquelles il est indispensable d'avoir égard, lorsqu'on veut comparer aux Tables solaires les observations de nos jours si précises. Delambre tient compte de ces effets et donne, dans une Table particulière, la Table XXXI, les termes provenant des diverses inégalités que les actions combinées de Jupiter, Vénus et la Terre introduisent dans le mouvement en latitude du Soleil (¹). Il calcule ensuite les changements qui peuvent en

---

(¹) Ces inégalités, au nombre de quatre, donnent une somme qui peut s'élever, résulter dans l'ascension droite et la déclinaison et trouve des corrections dont la plus grande n'excède pas 0'',40 pour l'ascension droite, et 1'' pour la déclinaison. Ces nouvelles Tables du Soleil, par Delambre, ne parurent qu'en 1806 dans le Recueil des *Tables astronomiques* publiées par le Bureau des Longitudes; mais, dès le commencement de 1803, elles étaient achevées et adoptées par le Bureau. L'impression en avait été suspendue pour attendre de Maskelyne des éclaircissements qui lui avaient été demandés sur une correction de 3'',8 qu'il avait faite à l'ascension droite de α de l'Aigle, et, par suite, à toutes les autres positions de son Catalogue.

En 1816, les Tables solaires de Delambre furent comparées à un grand nombre d'observations de Maskelyne et le résultat de cette comparaison fut que ces Tables avaient encore besoin de notables corrections. M. Airy, en 1827, était parvenu à la même conclusion en comparant à un grand nombre d'observations faites à Greenwich les lieux solaires déduits des Tables de Delambre. En outre, ce savant astronome avait signalé l'existence d'une inégalité à longue période dépendante des cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons, inégalité que l'action de Vénus sur la Terre introduit dans le mouvement apparent du Soleil (¹). La

---

dans certains cas, à plus d'une seconde. La plus considérable est celle qui dépend de la longitude de la Lune; elle a pour expression

$$+ 0'',68 \sin(☾ - \tau),$$

☾ étant la longitude de la Lune vue du centre de la Terre et τ celle de son nœud ascendant.

Les autres inégalités ont des coefficients beaucoup plus faibles; en voici les expressions, d'après Laplace,

$$\begin{aligned} &- 0'',11 \sin(2l'' - l' - \tau'). \\ &- 0'',24 \sin(4l' - 3l' - \tau'), \\ &- 0'',16 \sin(2l^{\text{iv}} - l'' - \tau''). \end{aligned}$$

l', l'', l^{iv} sont les longitudes moyennes de Vénus, la Terre et Jupiter, et τ', τ'' celles des nœuds ascendants des orbites de Vénus et Jupiter.

C'est d'après ces formules que la Table XXXI a été composée : leur somme fait connaître la latitude $\lambda_{\odot}$ du Soleil.

(¹) Cette inégalité, dont la période est de 240 ans environ, dépend de l'angle $13n't - 8nt$ et a pour expression, d'après M. Airy,

$$+ 2'',06 \sin(8l' - 13l' + 46°44'34'').$$

valeur de cette inégalité pouvant s'élever à 2″, il devenait tout à fait nécessaire d'y avoir égard dans la formation des Tables du Soleil.

Vers 1831 de nouveaux changements furent apportés par Bessel aux éléments des Tables solaires. Cet astronome prenant pour point de départ les Tables que Carlini avait publiées en 1811, dans les Éphémérides de Milan : *Tavole del Sole pel meridiano di Milano,* détermina les corrections dont ces Tables étaient susceptibles, et en déduisit des Tables supplémentaires que le Bureau des Longitudes s'empressa d'adopter et de publier, car les Tables de Carlini ne différaient pas essentiellement des Tables de Delambre : elles s'en distinguaient cependant par une disposition particulière qui les rendait à la fois plus commodes et plus expéditives. Dans ces recherches, principalement fondées sur les observations de Bradley, en 1753 et 1754, et sur les siennes propres (1820-1825), Bessel adopte pour valeurs des masses de Vénus et de Mars les nombres

$$\frac{1}{401847} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2680337}$$

obtenus par Burckhardt et qui sont plus grands que ceux employés par Delambre et Carlini, le premier dans le rapport de 1 à 0,89, et le second dans le rapport de 1 à 0,95. Il suppose en outre le maximum de l'*équation lunaire* égal à 6″, ce qui donne pour la valeur de la masse de la Lune $\frac{1}{85}$, valeur très peu différente de celle adoptée par Lindenau et qui est, comme on sait, $\frac{1}{87,73}$. Les éléments elliptiques corrigés d'après les valeurs de ces constantes et les données de l'observation conduisent Bessel à de nouvelles valeurs de la longitude moyenne, de la longitude du périgée et de l'excentricité, valeurs qui sont, à l'époque $1750 + t$:

$$\begin{aligned}
P &= 279^\circ 54' 1'',36 + (27'',605844)t + (0'',0001221805)t^2,\\
\Pi &= 279^\circ 54' 1'',36 + (61'',5171)t + (0,0002037965)t^2,\\
e &= 0,0167922585 - (0,0000004359)t.
\end{aligned}$$

Enfin la comparaison de ces valeurs avec celles adoptées par

---

l' et l désignant les longitudes moyennes de la Terre et de Vénus ou les angles $n't + \varepsilon'$ et $nt + \varepsilon$.

Delambre et Carlini lui donne les corrections suivantes, sur lesquelles sont fondées ses Tables supplémentaires :

$$
\begin{aligned}
\delta P &= +\,2'',65 + (0'',144477)t,\\
\delta \Pi &= +\,64'',99 - (0,41015)t,\\
\delta c &= -\,0,0000024625 - (0,0000001786)t.
\end{aligned}
$$

Ces Tables solaires de Bessel, au nombre de six, ont été imprimées dans les *Additions* à la *Connaissance des Temps* pour 1831.

D'autres Tables solaires, également remarquables par leur exactitude, furent construites en 1804, par le baron de Zach, et parurent à Gotha sous le titre de : *Tabulæ motuum Solis novæ et iterum correctæ,* etc., in-4°. Une première édition de ces Tables avait été donnée au même lieu en 1792. Fondées sur les formules de Laplace et sur les observations que de Zach avait faites lui-même au Seeberg, les Tables de 1804 présentaient un accord frappant avec celles de Delambre, déduites, comme on sait, d'un nombre considérable d'observations faites par des observateurs très habiles. Cependant de Zach n'avait emprunté aux recherches de Delambre que les valeurs des masses de la Lune, de Vénus et de Mars, valeurs que Laplace avait rapportées au tome III de la *Mécanique céleste,* paru en 1802 (1). Dans un but assez futile, celui de rendre ses Tables moins embarrassantes, de Zach avait cherché à en réduire le volume, résultat auquel il n'était parvenu qu'en doublant la longueur des calculs à effectuer. Aussi ces Tables de de Zach, malgré leur exactitude, eurent-elles peu de succès; les astronomes leur préférèrent toujours celles de Delambre. Le volume des Tables de Zach fut encore diminué dans l'édition in-8° qu'il publia à Florence, en 1809, sous le titre de *Tables abrégées portatives du Soleil pour le méridien de Paris,* etc. Dans cette édition, en effet, le nombre des pages se trouve réduit à 17.

---

(1) Dès le mois de novembre 1803, le baron de Zach avait demandé communication à Lalande d'une copie ou des épreuves des Tables de Delambre, et Lalande assure que la copie de ces Tables lui fut envoyée sur-le-champ. Voici la lettre de de Zach, qui est datée du 17 novembre 1803 : « Ne pourrais-je pas avoir une copie ou les épreuves des Tables du Soleil de Delambre? Elles me seraient bien nécessaires à présent que j'emploie beaucoup le Soleil pour mes latitudes. Cela me dispenserait de chercher toujours les erreurs des Tables, ce qui est impraticable lorsque je suis absent du Seeberg. Delambre ne serait-il pas porté à faire ce sacrifice à la Science? car, comme il publie ses Tables, un mois de plus ou un mois de moins ne lui fait rien, mais à moi cela fait beaucoup et me fait gagner du temps et des avantages ». En mai 1804 parurent à Gotha les Tables solaires de de Zach. Leur accord parfait avec les Tables de Delambre parut surprenant et même suspect à Lalande et à Mathieu, qui accusèrent de Zach de plagiat. On peut juger combien ce reproche était peu fondé en voyant avec quelle estime Delambre, dans la préface de ses Tables, parle de l'Ouvrage de de Zach. Après avoir constaté les très petites différences, 0″,9, 1″,4 et 0″,17, qui existent dans la longitude moyenne, la longitude du périgée et l'équation du centre, Delambre ajoute : « On peut donc accorder quelque confiance à nos Tables nouvelles, puisque tous les résultats que j'ai déduits de plus de 700 observations de Bradley et d'un nombre égal d'observations de Maskelyne

Nous arrivons ici à l'époque la plus mémorable de l'histoire de l'Astronomie pratique. Les travaux qui s'y sont accomplis et poursuivis jusqu'à nos jours marquent l'ère d'un progrès nouveau et sont le plus grand effort que l'on ait tenté pour donner aux Tables astronomiques toute la précision et l'exactitude durables dont elles sont susceptibles. Nous allons les analyser rapidement.

En 1853, Hansen et Olufsen firent paraître des Tables solaires très exactes, mais qui n'eurent pas la préférence sur celles de Delambre. Ces Tables nouvelles reposent sur la totalité des observations faites à Greenwich et à Kœnigsberg et sont déduites de la théorie même dont Hansen s'était servi en 1838 pour construire ses Tables lunaires; l'époque en est fixée au commencement de 1850. Outre la longitude du Soleil, son rayon vecteur et sa latitude, les Tables dont nous parlons donnent encore l'ascension droite et la déclinaison de cet astre, l'équation du temps, la parallaxe, le demi-diamètre, etc., éléments qui entrent, comme on sait, dans la composition des *Éphémérides,* et que lesdites Tables font connaître avec beaucoup de précision. Comparées à un grand nombre d'observations du Soleil faites à Greenwich et à Kœnigsberg, pendant les années 1820, 1843, 1844, les Tables de Hansen ont donné pour l'ascension droite des différences dont la plus grande s'élève à 0″,70; on peut dire toutefois que leur moyenne

---

et de Bouvard et enfin de quatre équinoxes déterminés chacun par plus de 300 observations se sont trouvés si pleinement d'accord avec les observations que M. de Zach a faites et desquelles je n'ai pas eu la moindre communication. » Il est incompréhensible que Lalande et Mathieu, qui ont eu connaissance de la préface des Tables de Delambre, se soient laisser aller au grave reproche qu'ils ont articulé contre de Zach.

n'excède pas 0″,30. Elles ont paru à Copenhague en 1853, et ont été éditées aux frais de la Société royale des Sciences de cette ville. M. Zech, à Tubingue, et M. Powalky, à Gotha, ont effectué une partie des calculs que leur construction a nécessités.

Dès 1839, Le Verrier conçut le projet de soumettre à une revision complète la théorie des mouvements planétaires et d'en effectuer la comparaison avec les observations anciennes et modernes : La *Théorie* et les *Tables du mouvement apparent du Soleil,* qu'il publia en 1858, sont le premier résultat de ces recherches importantes, recherches qu'il a étendues depuis à tous les corps planétaires de notre système. Les méthodes employées par ce savant calculateur ne diffèrent pas essentiellement de celles exposées par Laplace dans la *Mécanique céleste,* mais les développements analytiques, et en particulier ceux qui se rapportent à la fonction perturbatrice, y sont poussés beaucoup plus loin que dans ce dernier Ouvrage. Les perturbations les plus importantes que les actions réciproques de Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus (l'action de Neptune est insensible) introduisent dans le mouvement de la Terre y sont déterminées en poussant l'approximation jusqu'aux termes du septième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, et l'on s'est astreint dans leur calcul à ne négliger que les termes dont les coefficients sont inférieurs à un demi-centième de seconde. En outre, plusieurs inégalités nouvelles ont été ajoutées à celles déjà données par Laplace (1). La précision ainsi obtenue est telle, que l'on peut répondre de 0″,01 dans la position géocentrique calculée des planètes, ce qui suppose une précision encore plus grande dans les éléments héliocentriques de la Terre. Les Tables solaires de Le Verrier et la théorie qui leur a servi de base ont paru dans le tome IV des *Annales de l'Observatoire de Paris;* elles résultent de la discussion approfondie de près de 9000 observations du Soleil, faites de 1750 à 1850 dans les Observatoires de Paris, Greenwich et Kœnigsberg.

---

(1) Au nombre de ces dernières nous citerons : 1° une inégalité à longue période de l'ordre du carré des masses de Jupiter et de Mars et dont le coefficient peut aller jusqu'à 7″,16; elle dépend de l'argument $8l''' - 4l'' - 3l^{\text{IV}}$ et a une période d'environ 1800 ans; 2° une inégalité du même ordre résultant des actions combinées de Vénus et de Mars et dont le coefficient peut s'élever à 0″,35; elle dépend de l'argument $4l''' + 3l' - 7l''$ et a une période de 302 ans.

Le temps y est compté en années juliennes de 365$\frac{1}{4}$ et commence au midi moyen du 1er janvier 1850. Ces Tables ont remplacé celles de Delambre, dont se servaient depuis un grand nombre d'années les calculateurs de la *Connaissance des Temps* et des autres Éphémérides.

Après avoir établi, avec un soin tout particulier, la théorie du mouvement de la Terre autour du Soleil, Le Verrier s'est occupé de la théorie des autres planètes et, en premier lieu, de celle de Mercure. Dans cette étude, comme dans celle relative à la Terre, Le Verrier a repris le calcul de toutes les inégalités précédemment données par Laplace et en a déterminé les coefficients, en poussant les approximations beaucoup plus loin que ne l'avait fait ce grand géomètre. Ainsi, il a tenu compte dans le calcul des inégalités séculaires, des termes du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, termes que Laplace avait négligés et dont l'influence est cependant assez sensible pour faire varier la longitude héliocentrique de la planète de 11″ en un siècle. La considération des termes d'ordre supérieur dans le calcul des inégalités périodiques lui a permis également de corriger les coefficients de ces inégalités de quantités qui peuvent faire varier de 5 à 6 secondes la longitude de Mercure. Enfin Le Verrier trouve que, pour mettre sa théorie entièrement d'accord avec l'observation, il est nécessaire d'accroître le mouvement séculaire du périhélie de Mercure d'environ 38″, accroissement dont il rend compte en l'attribuant à l'existence d'une planète intra-mercurielle, ou à celle d'un essaim de corpuscules circulant entre Mercure et le Soleil. Ces Tables empiriques deMercure ont été publiées, en 1859, dans le tome V des *Annales de l'Observatoire* et ont remplacé celles de Lindenau dont se servaient depuis 1835 les calculateurs de la *Connaissance des Temps* et des autres Éphémérides. Elles reposent sur la discussion approfondie de 398 observations de la planète faites à Paris, de 1801 à 1842, et sur 12 observations des passages de Mercure sur le Soleil, arrivés de 1697 à 1832.

Ces recherches de Le Verrier sur l'orbite de Mercure ont été suivies de celles concernant la planète Vénus, et de nouvelles Tables de cet astre, construites en la même forme que les précédentes et avec le même soin, ont été publiées, en 1861, dans les *Annales de l'Observatoire de Paris*. Le calcul des inégalités y a été repris en tenant compte de tous les termes qui ne sont pas inférieurs à un demi-centième de seconde, et en poussant, dans certains cas, les développements jusqu'aux termes du septième ordre inclusivement. Ces termes sont généralement fort petits et dépassent rarement un dixième de seconde ; cependant leur considération est nécessaire lorsqu'on veut atteindre au degré de précision que les observations modernes comportent. Pour construire ces nouvelles Tables, Le Verrier avait à sa disposition : 1° la longue suite d'observations méridiennes de la planète faites à Greenwich par Bradley, Maskelyne et Pond, observations qui ont été réduites jusqu'en 1830 par M. Airy dans l'Ouvrage intitulé : *Reduction of the Greenwich observations of planets from* 1750 *to* 1830 ; 2° deux observations des passages de Vénus sur le disque du Soleil arrivés en 1761 et 1769 ; et 3° une très curieuse observation de l'occultation de Mercure par Vénus, arrivée le 28 mai 1737. Cette observation, faite à Greenwich par Bevis, a été rapportée dans les *Transactions philosophiques ;* mais son degré de précision n'ayant pas été tout d'abord connu de Le Verrier (les deux contacts n'avaient pu être observés à cause des nuages), celui-ci n'a pu la comprendre dans ses équations de condition, et, par conséquent, la faire concourir à la détermination des éléments de ses Tables ; il s'est assuré cependant qu'elle s'accordait d'une manière satisfaisante avec les Tables du Soleil, de Mercure et de Vénus.

La théorie de Mars, que Le Verrier a ensuite considérée, lui a présenté une difficulté analogue à celle qu'il avait rencontrée dans la théorie de Mercure. Ce savant calculateur a reconnu que, pour établir une concordance parfaite entre la théorie et les observations de Mars, il était nécessaire et suffisant d'augmenter le mouvement de son périhélie de $(\frac{1}{8})$ environ ; et la conclusion qu'il en a tirée a été la même que pour Mercure, à savoir qu'il devait exister dans les environs de Mars une quantité de matière encore inconnue, quantité qui, en s'ajoutant à la masse de la Terre dans la proportion de $\frac{1}{8}$, augmentait la parallaxe solaire de la 24^e partie de la valeur admise, laquelle à cette époque était représentée par le nombre 8″,57. Des déterminations récentes de la parallaxe solaire ont confirmé assez exactement ce résultat, car le nombre 8″,86 trouvé par Foucault correspond à une augmentation de $\frac{1}{30}$ de la valeur ci-dessus, valeur qui est celle donnée par Encke.

Les observations sur lesquelles reposent ces nouvelles Tables de Mars sont empruntées au grand Ouvrage de M. Airy dont nous avons donné le titre plus haut, et aux publications annuelles de l'Observatoire de Greenwich, qui en sont la continuation ; elles s'étendent de 1750 à 1858. Le Verrier s'est encore servi des observations de la planète faites à l'Observatoire de Paris à partir de 1837, observations dont il a entrepris la discussion et la réduction jusqu'en 1858. Ces observations se rapportent aux années 1837, 1838, 1856, 1857 et 1858.

Ces Tables de Mars ont paru en 1861, en même temps que celles de Vénus, et ont été immédiatement adoptées par les rédactions de la *Connaissance des Temps* et du *Nautical Almanac*.

Après avoir passé en revue le système formé par les planètes inférieures, Le Verrier s'est occupé des planètes supérieures et a fait successivement paraître des Tables fondamentales de leur mouvement.

La théorie des quatre dernières planètes présente des difficultés particulières, à raison de la grandeur des masses perturbatrices. Pour Jupiter et Saturne, la difficulté est encore accrue par un rapport de commensurabilité qui existe entre leurs moyens mouvements, et qui est tel, que cinq fois le moyen mouvement de Saturne est à très peu près égal à deux fois le moyen mouvement de Jupiter. Cette commensurabilité approchée a une influence considérable dans la théorie des deux planètes et produit les grandes irrégularités observées dans leur mouvement, irrégularités en vertu desquelles le moyen mouvement de la première planète semble s'accélérer lorsque le moyen mouvement de la seconde se ralentit, et réciproquement. L'importance de ces variations exige que l'on ait égard, dans la détermination de leurs coefficients, aux termes qui dépendent des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons, et même à ceux qui sont de l'ordre du carré et du produit des forces perturbatrices. Le calcul de ces derniers termes est particulièrement laborieux et délicat, à cause de leur multiplicité. L'impossibilité de les calculer tous oblige à discerner dans leur nombre infini ceux dont les valeurs sont sensibles et ceux qui au contraire resteront toujours inappréciables ; et cette distinction exige beaucoup de tact et d'habileté. Le Verrier, dans sa *Théorie de Jupiter et de Saturne*, considère en particulier les termes dont nous parlons, et en effectue le calcul en poussant l'approximation jusqu'aux quantités du septième ordre par rapport aux excentricités et à l'inclinaison mutuelle des orbites. Il tient compte ensuite dans le calcul des autres inégalités des termes qui sont du second ordre par rapport aux forces perturbatrices et même, pour certaines variations séculaires, de ceux qui dépendent des troisièmes et quatrièmes puissances de ces forces; ces derniers termes peu nombreux affectent particulièrement les dérivées de l'excentricité et de la longitude du périhélie. Enfin, pour donner à l'ensemble de ses formules le plus grand degré possible de généralité, Le Verrier laisse à l'état d'indéterminés ceux des éléments qui varient avec le temps et qui sont les excentricités, les inclinaisons, les longitudes des périhélies et celles des nœuds; il rend ainsi sa théorie applicable à toutes les époques, ce qui est un avantage bien précieux.

Les théories de Jupiter et de Saturne ont été comparées à l'ensemble des observations que l'on possède de ces deux planètes, et le résultat de cette comparaison a été pour Jupiter aussi satisfaisant qu'on pouvait le désirer ; ainsi, d'une part, l'action des petites planètes sur Jupiter n'a aucun effet sensible, et, d'autre part, il n'existe aucune cause de perturbation autre que celles résultant des planètes connues.

Pour Saturne, la comparaison de la théorie avec l'observation a présenté quelques difficultés dont il n'a pas été possible jusqu'ici de se rendre exactement compte : ainsi, de 1846 à 1869, les observations se trouvent représentées à moins de 2″, 5, mais, en 1839, elles accusent un écart de 4″,4 et en 1844 un écart de — 5″,00, soit en cinq ans une variation de 9″, 4 (les observations de Greenwich conduisent au résultat à peu près identique 9″,9). Après avoir revu avec le plus grand soin tous les termes importants de sa théorie et s'être assuré qu'aucune erreur grave ne s'était glissée dans ses calculs, Le Verrier en conclut que l'erreur constatée tient non à la théorie, mais aux observations elles-mêmes, et pense que les aspects si variés de l'anneau sont la cause de leur incertitude. La raison qu'il en donne, c'est que l'ombre projetée par ce corps sur la planète, en couvrant à certaines époques une partie variable de son disque, a dû produire sur les équations personnelles aux observateurs des variations qui, assez notables dans les observations anciennes, se sont successivement atténuées à mesure que les méthodes et les moyens d'observation se sont davantage perfectionnés. Cette conjecture n'étant guère susceptible d'être vérifiée par l'observation, il serait à désirer que la théorie de Saturne fût reprise d'après une méthode différente de celle employée par Le Verrier et que de nouvelles Tables du mouvement de cet astre fussent construites avec tout le soin désirable. Peut-être alors trouverait-on l'explication de l'anomalie singulière dont nous parlons, et pourrait-on prononcer sûrement sur sa véritable cause (¹).

Les Tables de Jupiter et de Saturne de Le Verrier ont paru en 1876, dans le tome XII des *Annales de l'Observatoire de Paris;* elles sont fondées sur les observations faites à Greenwich de 1750 à 1830, de 1836 à 1869 et sur celles faites à Paris de 1837 à 1867.

Les théories d'Uranus et de Neptune, qui complètent l'ensemble des recherches entreprises par Le Verrier sur le système des huit planètes principales, ont présenté des difficultés de même ordre que les théories de Jupiter et de Saturne; toutefois les observations auxquelles on les a comparées se sont trouvées représentées ici avec une grande exactitude. Les difficultés dont nous parlons tiennent non seulement à la grandeur des masses des deux planètes, mais encore à un rapport très approché de commensurabilité qui existe entre leurs moyens mouvements et qui est tel, en effet, que deux fois le moyen mouvement de Neptune, moins le moyen mouvement d'Uranus, est une très petite quantité (304″ environ). Cette particularité, analogue à celle que nous avons rencontrée dans le système formé par Jupiter et Saturne, rend connexes les théories des deux planètes, et introduit dans les éléments de leurs orbites des inégalités à longue période dont le calcul est

---

(¹) Un savant géomètre suédois, M. H. Gyldèn, qui, dans ces dernières années, s'est livré à un examen approfondi des Tables de Jupiter et de Saturne, a trouvé qu'on établirait une concordance presque parfaite entre le calcul et l'observation, en appliquant à la longitude vraie de Saturne la correction empirique

$$-3'',9\cos[19^\circ 08(t-1817,9)].$$

Le Verrier qui, en 1877, avait eu un moment la pensée de joindre à ses Tables de Saturne des Tables rectificatives, était parvenu à un résultat à peu près identique. (*Voir* les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 2ᵉ semestre, année 1875, p. 349.)

long et difficultueux. Le Verrier emploie pour les déterminer la même méthode que dans le cas de Jupiter et Saturne, et, comme pour ces dernières planètes, il développe les expressions analytiques de toutes les inégalités en fonction d'indéterminées, afin de rendre ses résultats applicables à une époque quelconque. Les théories d'Uranus et de Neptune et les déterminations qui leur ont servi de base font l'objet des Chapitres XXIV, XXV, XXVI et XXVII des *Recherches astronomiques;* et les Tables générales qui en ont été déduites forment la matière des Chapitres XXVIII, XXIX et composent les Tomes XIII et XIV des *Annales.*

Il nous reste, pour compléter l'historique que nous venons de faire des Tables planétaires, à dire encore quelques mots des recherches récentes de MM. Newcomb et Kowalski sur les orbites des planètes Uranus et Neptune, recherches qui ont conduit, les premières surtout, à des Tables très exactes du mouvement de ces astres.

C'est en 1865 que Newcomb a publié le résultat de ses recherches sur la planète Neptune. Les Tables générales que ce savant astronome en a déduites sont fondées sur l'ensemble des observations faites à Greenwich, Cambridge, Paris, Hambourg et Albany, ainsi que sur deux observations anciennes de la planète, faites à Paris les 8 et 10 mai 1795 (¹). Les écarts constatés entre la théorie et l'observation sont très faibles et ne permettent pas de supposer qu'il existe au delà de Neptune une cause de perburbation dont l'effet soit appréciable. Ces écarts pour la longitude varient, en effet, de $-0'',05$ à $+0'',22$ et se succèdent d'après une loi assez régulière. Les Tables de Neptune et la théorie qui leur sert de base ont paru dans les Mémoires de l'Institution Smithsonienne (*Smithsonian contribution to Knowledge,* t. XV), et ont été éditées aux frais de cette Société savante. Elles ont été employées, à partir de 1871, dans les calculs de la *Connaissance des Temps* et des autres Éphémérides.

Les Tables d'Uranus, qui ont suivi en 1873 celles de Neptune,

---

(¹) C'est comme étoile de 7^e-8^e grandeur que Neptune fut observée à cette époque. La première observation est rapportée par Mauvais dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris,* t. XXIV, p. 667. La seconde, consignée dans l'*Histoire céleste,* est désignée dans le Catalogue publié en 1747 par Francis Bailly, sous le n° 26266.

sont construites en la même forme que ces dernières, mais reposent sur des principes un peu différents. Les inégalités de la longitude, du rayon vecteur et de la latitude dépendantes du premier ordre, ont été obtenues par l'intégration directe des équations différentielles du mouvement troublé, et, dans le calcul des termes du second ordre provenant de l'action de Saturne, on a fait usage de la méthode dont Hansen s'était servi en 1831 pour calculer des termes semblables, provenant de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne. Les termes du second ordre résultant de l'action de Neptune ont été omis dans la détermination des inégalités périodiques, mais il en a été tenu compte dans le cas de l'inégalité à longue période, dont nous avons déjà parlé et qui dépend de l'argument $2n't - nt$. Les corrections à apporter aux valeurs des éléments elliptiques d'Uranus, provisoirement adoptées, ont été conclues de la discussion de 3763 observations de la planète, faites de 1691 à 1872, et ont donné pour valeur de la masse définitive d'Uranus le nombre $\frac{1}{19640}$, qui se rapproche beaucoup de celui obtenu par Pierce en 1848. Ces Tables d'Uranus, très exactes et d'un usage fort commode, ont été adoptées par le *Nautical Almanac* dès 1874 et par la *Connaissance des Temps* quelques années plus tard; elles ont remplacé celles de Bouvard, publiées en 1821 par le Bureau des Longitudes de France.

Les recherches de Kowalski sur Neptune, entreprises peu après la découverte de la planète, ont été publiées à Kasan, en 1855, sous le titre de *Recherches sur les mouvements de Neptune, suivies des Tables de cette planète*, in-8°. Ces Tables, très abrégées, font connaître la longitude héliocentrique, la latitude et le rayon vecteur de la planète pour chaque intervalle de 30 jours et pendant une période qui s'étend de 1846 à 1880. Elles sont fondées sur la discussion de toutes les observations comprises entre 1846 et 1853 et se rapportent à l'équinoxe moyen de 1850,0. Ces recherches très remarquables de Kowalski ont pleinement confirmé les résultats obtenus par Walker, astronome américain, qui déjà en 1848 était parvenu à une représentation exacte de l'orbite de Neptune. Les Tables de Kowalski ont été employées dans les calculs de la *Connaissance des Temps* et du *Nautical Almanac* à partir de 1861; mais en 1871 elles ont été remplacées par celles de Newcomb.

IV.

Tables du mouvement des satellites de Jupiter.

La découverte des satellites de Jupiter, que l'on doit à Galilée, marque une des plus mémorables époques de l'histoire de l'Astronomie au XVII^e siècle. La Géographie et la Navigation lui doivent la première solution du problème si important des longitudes, et la Physique céleste, la connaissance du mouvement progressif de la lumière et la mesure exacte de sa vitesse.

C'est le 7 janvier 1610 que le célèbre astronome florentin fit cette brillante découverte. En explorant le ciel avec une lunette d'approche qu'il venait de construire, il aperçut dans le voisinage de Jupiter trois petites étoiles très brillantes, qu'il prit d'abord pour des étoiles fixes; deux étaient à l'orient de la planète et la troisième à l'occident; mais, les ayant observées de nouveau le lendemain, il s'aperçut qu'elles avaient changé de place et qu'elles étaient cette fois toutes trois d'un même côté. Quelques jours plus tard, il découvrit le quatrième satellite, et, continuant les jours suivants ses observations, il ne tarda pas à reconnaître que ces étoiles étaient des planètes tournant autour de Jupiter de la même manière que la Lune autour de la Terre, et, par conséquent, des satellites. Il donna à ces astres le nom d'*astres de Médicis,* en l'honneur des Médicis ses protecteurs, et s'empressa de publier sa découverte (mars 1610), ainsi que les observations qu'il avait faites dans un Ouvrage paru à Florence sous le titre de *Nuncius sidereus* (¹).

Galilée, qui avait été le premier à apercevoir les satellites de

---

(¹) Simon Marius, astronome et mathématicien de l'électeur de Brandebourg, revendiqua, en 1614, la découverte des satellites de Jupiter; il prétendit les avoir aperçus en Allemagne dès le 29 décembre 1609. Mais, en supposant les prétentions de Marius fondées, ce qui est loin d'être prouvé, l'antériorité de la découverte n'en appartiendrait pas moins à Galilée; car Marius, datant ses observations d'après le calendrier non réformé, le 29 décembre 1609 correspond au 8 janvier 1610, et l'observation de Marius se trouve par conséquent postérieure d'un jour à celle de Galilée.

Jupiter, fut aussi le premier qui eut l'idée de faire servir les configurations et surtout les éclipses de ces astres à la détermination des longitudes terrestres. Encouragé dans ce projet par les États de Hollande, qui lui promirent de grandes récompenses s'il y réussissait, il entreprit, aidé de ses disciples, un nombre considérable d'observations qui malheureusement sont demeurées sans résultat. A la mort de Galilée, le grand-duc de Toscane, Cosme II, chargea Vincent Reineiri, l'un de ses disciples, de continuer les observations commencées et d'en déduire des Tables du mouvement des satellites; ce savant y travailla pendant dix ans, mais sans succès, paraît-il, car il ne fit rien paraître. Il mourut en 1647, sans qu'il fût même possible de retrouver ses observations et celles de Galilée dont il était le dépositaire, ses papiers et tout ce qui lui appartenait ayant été dilapidés à sa mort. Ils ont été retrouvés depuis, et sont aujourd'hui en la possession de la Bibliothèque de Florence, dite Palatine.

Peiresc, conseiller au parlement d'Aix et l'ami de Gassendi, fut, après Galilée et Reineiri un des premiers qui entreprit de réduire en Tables les mouvements des satellites; il s'était associé Marius dans cette entreprise; mais, ayant appris dans la suite que Galilée était occupé d'un semblable projet, il s'abstint, par un sentiment des plus louables, de publier son travail. Hodernia et Marius s'occupèrent aussi de dresser des Tables de satellites, mais sans y réussir; fondées sur un trop petit nombre d'observations, ces Tables étaient sans exactitude. Hevelius, qui avait formé le même projet, ne fut pas plus heureux que ses prédécesseurs et dut y renoncer. Enfin, en 1666, Borelli essaya de déduire des observations de Hodernia et des siennes propres une théorie du mouvement des satellites et fit paraître ses *Theoricæ Medicæorum planetarum ex causis physicis deductæ*, in-4°, Ouvrage intéressant à plus d'un titre et qu'ont loué Cassini, Lalande et Montucla. On lit, dans l'*Histoire des Mathématiques* de ce dernier, que, pour établir cette théorie, Borelli fit usage des principes de l'attraction. Il y a sans doute loin des idées de Borelli sur cette matière à celles que nous avons aujourd'hui, mais il se peut qu'elles aient inspiré Newton.

Au même moment où Borelli publiait à Florence sa théorie des *Planètes médicéennes,* Cassini faisait paraître à Bologne un Ouvrage sur le même sujet intitulé *De difficultatibus circa eclipses* *in Jove a Mediceis syderibus effectus cum earum solutione*; et, peu de temps après, il donnait, dans ses Œuvres astronomiques, publiées à Rome en 1666, ses *Tabulæ mediceorum syderum*, les premières qui aient eu assez d'exactitude pour soutenir la comparaison avec les observations. Les Éphémérides que Cassini en déduisit en 1668, et qu'il publia à Bologne, furent trouvées si exactes par les astronomes français, et notamment par Picard, que c'est au rapport de celui-ci à Colbert que Cassini dut d'être appelé en France et d'y recevoir les honneurs les plus distingués. Malgré les travaux de toute sorte qui l'occupèrent à son arrivée, Cassini ne cessa d'observer avec assiduité les satellites de Jupiter et de perfectionner leur théorie. En 1693, il fit paraître de nouvelles Tables de ces astres beaucoup plus parfaites que ne l'étaient celles de 1668, et reformées sur les observations qu'il avait faites depuis 1669. Ces Tables, qui contribuèrent beaucoup, à cette époque, au perfectionnement de la Géographie, furent publiées à Paris sous le titre de *Hypothèses et Tables des satellites de Jupiter reformées sur de nouvelles observations;* elles étaient assez exactes pour donner les configurations et les éclipses à la minute, et souvent même à quelques secondes près.

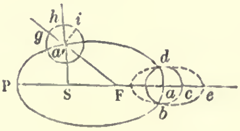
Une chose à laquelle Cassini dut tout d'abord s'attacher dans la construction de ses Tables, ce fut de déterminer les temps des révolutions périodiques ou les retours des satellites au même point de leurs orbites. Par la mesure du temps écoulé entre la disparition d'un satellite et la disparition suivante, Cassini en conclut que ces révolutions périodiques étaient, pour le premier satellite, de $1^j\,18^h\,29^m$, pour le second de $3^j\,13^h\,49^m$, pour le troisième de $7^j\,4^h\,0^m$ et pour le quatrième de $16^j\,18^h\,5^m$. Mais il s'aperçut bientôt que ces révolutions n'étaient pas toujours d'égale durée, et qu'elles étaient tantôt plus longues ou tantôt plus courtes, circonstance qui tient à l'irrégularité du mouvement de Jupiter dans son orbite, comme il est aisé de s'en convaincre. En effet, pendant que le satellite parcourt son orbe, la planète décrit le sien d'un mouvement inégal, et lorsque le satellite a accompli sa révolution, l'ombre projetée par Jupiter a avancé ou reculé, en sorte que le satellite, pour atteindre l'ombre de la planète, doit encore parcourir un arc égal à celui que Jupiter a décrit dans son orbite. Cette inégalité qui affecte les retours des satellites à leur conjonction et les retours des éclipses dépend ainsi de l'excentricité de l'orbite de Jupiter et doit être mesurée par l'équation du centre, dont la valeur est $5°34'$. Or le premier satellite emploie, pour parcourir cet arc sur son orbite, $0^h 39^m 25^s$, le second $1^h 19^m 9^s$, le troisième $2^h 39^m 35^s$ et le quatrième $6^h 13^m 4^s$. Telles sont donc les inégalités que l'excentricité de Jupiter introduit dans le mouvement des satellites, inégalités qui doivent nécessairement se trouver modifiées par celles résultant de l'excentricité même des orbes de ces satellites (¹).

Une autre inégalité importante et que Rœmer fut le premier à expliquer est celle qui provient du mouvement successif de la lumière. En calculant les époques des éclipses du premier satellite d'après la moyenne d'un grand nombre d'observations et comparant ces époques à celles données par les Tables, Rœmer remarqua que les époques calculées s'écartaient d'autant plus des époques observées que la Terre était plus ou moins rapprochée de Jupiter. Ainsi les éclipses arrivaient plus tôt que ne l'indiquait l'observation lorsque Jupiter approchait de son opposition; et elles arrivaient, au contraire, plus tard lorsque cette

---

(¹) En effet, soient S la position du Soleil, *aa'p* l'orbite de Jupiter et *cdb* celle d'un satellite que nous regarderons d'abord comme circulaire. Si l'on suppose que, Jupiter étant parvenu de la position aphélie *a* à celle *a'*, le satellite qui se trouvait en *c*, sur son orbite, soit arrivé après plusieurs révolutions en *h*, dans sa conjonction avec le Soleil, il est clair que l'angle *ga'h*, égal à l'angle S*a'*F, mesurera l'équation du centre et, par suite, que l'arc *gh* représentera l'inégalité qui résulte de l'excentricité de Jupiter. Mais, si l'orbe du satellite, au lieu d'être circulaire, est

Fig. 1.



elliptique, alors le mouvement ne se fera plus d'une manière uniforme; il sera plus lent dans la partie de son orbe qui est tournée vers l'aphélie que dans celle qui est vers le périhélie, et lorsque Jupiter aura passé de la position *a* qu'il occupait à l'aphélie à celle *a'*, le satellite, au lieu d'être arrivé en *h* comme dans le cas d'un orbe circulaire, ne sera parvenu qu'en *i*, ajoutant ainsi à l'arc *gh* qui mesure l'inégalité due à l'excentricité de Jupiter celui *hi* qui représente la variation produite par l'excentricité de l'orbe du satellite.

planète était voisine de sa conjonction. Vers les quadratures, les temps observés des éclipses s'accordaient assez bien avec les temps calculés. D'où Rœmer conclut que ces retards et ces avances ne pouvaient provenir que du mouvement progressif de la lumière, lequel de l'opposition à la conjonction avait à franchir toute l'étendue du diamètre de la Terre, soit 70 millions de lieues. En comparant ensuite les distances de la planète à la Terre avec les retards et les avances observés, il lui fut facile de reconnaître que la lumière employait environ 14 minutes à parcourir cette distance.

Cette ingénieuse conception de Rœmer ne fut pas, comme on le pense bien, accueillie sans contestation. Cassini, qui avait eu la même idée que Rœmer, la rejeta et la combattit dès que celui-ci l'eut présentée. Si cette inégalité a lieu, disait-il, elle doit être générale et la même pour les trois autres satellites, car les différences de leurs distances à la Terre sont des quantités absolument négligeables, et par rapport à la distance qui les sépare de cet astre, et par rapport à la prodigieuse vitesse que l'on est obligé d'attribuer à la lumière. Or Cassini annonçait n'avoir rien observé de semblable à l'égard des trois autres satellites. Maraldi, qui en 1707 soutenait la même objection, l'appuyait des raisons assez spécieuses que voici : si le mouvement successif de la lumière, disait ce savant, est la cause du retard des éclipses, on devrait observer une seconde inégalité dépendant du lieu de Jupiter dans son orbite, inégalité dont l'effet serait de faire retarder les éclipses depuis son périhélie jusqu'à son aphélie et de les faire avancer, au contraire, depuis son aphélie jusqu'à son périhélie, car la distance de Jupiter à la Terre va en augmentant du périhélie à l'aphélie et en diminuant de l'aphélie au périhélie. Et comme, de l'une à l'autre de ces deux positions de Jupiter, la variation de sa distance par rapport au Soleil est le quart du diamètre de l'orbe terrestre, il est clair que, si la lumière met environ 14^m à traverser cette distance, elle doit mettre, pour en parcourir le quart, à peu près 4^m, quantité assez sensible pour être aperçue par les observateurs; et cependant Maraldi affirmait n'avoir rien rencontré de semblable dans la discussion des nombreuses observations à laquelle il s'était livré.

Depuis, ces objections ont été pleinement résolues et tous les doutes levés : on a reconnu, par les observations du premier satellite, que la seconde inégalité de la lumière dépendante de l'excentricité de Jupiter existait réellement; et quant à la première, qui provient du mouvement progressif de la lumière, une discussion plus approfondie des écarts constatés entre les observations et le calcul a montré que cette équation était générale et qu'elle devait être appliquée de la même manière aux trois autres satellites. C'est du reste ce que la découverte de l'aberration faite en 1737 est venue confirmer de la manière la plus éclatante.

Outre la grande inégalité dépendante de l'excentricité de Jupiter et les deux inégalités de la lumière dont nous venons de parler, il en existe d'autres particulières à chaque satellite et que l'observation a fait découvrir. Bradley qui, après Cassini, doit être cité comme ayant pris le plus de part aux progrès de la théorie des satellites, eut le mérite d'en signaler les principales. Par la comparaison d'anciennes observations avec celles qu'il avait faites à Wansted, après quatre révolutions de Jupiter, il reconnut que les trois premiers satellites étaient soumis à des inégalités fort sensibles qu'il attribua à l'action mutuelle que ces corps exercent les uns sur les autres, et dont il fixa la période à environ 437 jours et $5^{h}\frac{1}{2}$. Cette période ramenant, en effet, les trois premiers satellites à la même configuration, soit entre eux, soit à l'égard du Soleil, doit ramener aussi, dans le même ordre, les inégalités qui proviennent de l'attraction, et c'est ce que Bradley remarqua le premier. Quant au quatrième satellite qui, à cause de son éloignement, ne participe pas à la période commune de 437^{j}, Bradley lui reconnut une excentricité sensible et fixa sa plus grande équation du centre à 0°48′, équation qui est à peu près celle que l'on donne à Vénus. En 1718, il acheva de nouvelles Tables des satellites, fondées sur ses propres observations et sur celles de Pond, son oncle, Tables qui ne parurent, ainsi que celles de Pond relatives au premier satellite, qu'en 1749, dans le recueil des Tables planétaires de Halley. Dans ces Tables, Bradley y tient compte, pour chaque satellite, de l'inégalité dépendante du mouvement de la lumière, ainsi que de la partie de cette inégalité qui provient de l'excentricité de Jupiter et qu'il fixe à $3^{m}30^{s}$; mais il y néglige absolument les perturbations dépendantes de la période de 437^{j}, perturbations qu'il n'était pas du reste en mesure de fixer assez exactement pour les comprendre dans ses calculs. Aussi ces Tables, malgré le soin qu'il prit à les construire, ne laissèrent-elles pas que d'être fort imparfaites et de présenter dès le début des divergences considérables avec l'observation. Elles furent remplacées avec avantage par celles que Wargentin, astronome suédois, publia en 1746, dans les *Acta Societatis regiæ upsalensis* et dont nous allons avoir maintenant à nous occuper.

Une chose à laquelle Wargentin s'attacha tout d'abord dans la construction de ses Tables, ce fut précisément de déterminer la valeur des inégalités dont Bradley n'avait fait que fixer la période, et il y réussit pleinement. Par la discussion minutieuse de toutes les observations qui lui étaient parvenues, il reconnut que l'inégalité du premier satellite dépendante de la période de 437^j était de $0^h 16^m 30^s$ ou $0° 30'$ en plus ou en moins, inégalité qui lui parut provenir surtout de l'attraction du second satellite. Ce second satellite, étant attiré à la fois par le premier et par le second, devait présenter une variation plus grande : Wargentin trouve pour la quantité de cette variation $0^h 16^m 30^s$ et fixe sa période, comme Bradley, à $437^j 20^h$. Quant au troisième satellite, il lui donne une variation de 8^m, qu'il partage en deux inégalités séparées dépendant respectivement des périodes de 12 ans $\frac{1}{2}$ et de 13 ans $\frac{2}{3}$; obligé un peu plus tard de les abandonner, il leur substitua une seule équation d'une excentricité variable, et dont il fixa la période à 13 ans. Relativement au quatrième satellite, Wargentin adopte une inégalité de $1^h 0^m 30^s$, dépendante de l'excentricité de son orbite et qui lui paraît suffire pour représenter les perturbations de ce satellite.

Une des principales causes de perturbation que l'on observe dans le mouvement des satellites de Jupiter est celle qui provient de l'action développée par Saturne sur Jupiter, action dont les effets sont surtout sensibles aux époques des conjonctions et des éclipses; car, le mouvement des satellites étant rapporté au centre de la planète principale, toutes les inégalités qui affectent le mouvement de Jupiter doivent, par là-même, affecter la position relative de ses satellites, et par conséquent faire varier le temps de leur conjonction. Wargentin essaya de faire entrer les variations dues à cette cause dans le calcul de ses Tables des satellites et construisit à cet effet des Tables additives qui contiennent cinq inégalités nouvelles; mais la théorie des planètes Jupiter et Saturne était à cette époque trop imparfaite pour que cette cause de perturbation pût être exactement appréciée. Lalande, qui reprit un peu plus tard ces calculs, réduisit les Tables de Wargentin en une seule dépendante d'un seul argument, qui est la longitude moyenne de Jupiter moins celle de Saturne, et les inséra dans la *Connaissance des Temps* de l'an 1764; mais ces Tables étaient à double entrée et moins commodes que celles de Wargentin. C'est ce qui engagea sans doute cet astronome à reproduire ces dernières dans la *Connaissance des Temps* de 1766. Quant aux Tables générales de Wargentin, Lalande en donna une seconde édition en 1759, dans la traduction des Tables de Halley, puis une troisième qui parut en 1771, revue et corrigée sur un nouveau manuscrit de Wargentin.

Un phénomène bien remarquable et dont la cause a été longtemps ignorée est la variation de l'inclinaison des orbes des satellites. Maraldi, auquel la théorie des satellites doit d'intéressantes recherches sur tous ses points, fut le premier à constater l'existence de ce curieux phénomène. Par l'ensemble des observations qu'il possédait en 1727 du deuxième satellite, il reconnut que la durée des éclipses de ce satellite n'était pas constamment la même et qu'elle avait dû varier de 1668 à 1715 d'environ $0^h 21^m$, en passant par une période de décroissement de 1668 à 1691, et par une période d'accroissement à peu près égale de 1691 à 1727. En 1668, cette durée avait été de $2^h 38^m$, en 1680 de $2^h 39^m$; les observations de 1691 la montraient d'environ $2^h 13^m$, celles de 1715 de $2^h 17^m$, et enfin celles de 1727 de $2^h 31^m$. Ainsi cette durée de 1668 à 1715 avait varié de $0^h 21^m$, comme nous venons de le dire, et elle avait été à peu près la même aux époques 1680-1727 et 1691-1715. Maraldi ne crut pas avec raison qu'on pût expliquer cette différence de la durée autrement que par la variation de l'inclinaison, et c'est en effet à cette hypothèse qu'il s'en tient définitivement (¹). Mais quelle pouvait être la cause d'un phénomène aussi singulier que celui de la variation de l'inclinaison? car la seule attraction des satellites les uns sur les autres paraissait im-

---

(¹) Deux autres causes concourent à produire cette différence observée dans la variation des inclinaisons des orbites ou dans la durée des éclipses, mais elles sont insuffisantes pour l'expliquer. Ce sont: 1° l'excentricité de l'orbe du satellite et 2° le mouvement de ses nœuds.

puissante à l'expliquer. On comprend bien en effet que l'attraction d'un satellite s sur un autre s' puisse diminuer graduellement l'angle d'inclinaison formé par les plans des deux astres et faire en sorte même que le plan de l'orbite de s' vienne coïncider avec celui de l'orbite de s; mais, le satellite s' une fois dans le plan de l'orbite de s, quelle est la cause qui l'en fait sortir et qui lui permet de continuer de l'autre côté de ce plan ses variations graduelles, comme les observations l'avaient appris à Maraldi? Lalande jeta un grand jour sur cette question en faisant voir, en 1761, que l'attraction des satellites les uns sur les autres devait donner aux nœuds du quatrième un mouvement direct sur l'orbite de Jupiter et que ce mouvement pouvait changer au point de devenir nul ou rétrograde suivant les changements apportés dans la situation respective des nœuds et des inclinaisons des orbites par l'effet des attractions réciproques (¹). Quant au mouvement de ce nœud, il a été vérifié par les observations de Wargentin et de Maraldi, qui l'ont trouvé de $5'33''$ par an et direct. Nous verrons plus loin que de semblables variations ont été constatées dans les nœuds des trois autres satellites.

Tel était à peu près le point où était parvenue la théorie des satellites de Jupiter lorsque Bailly commença à s'en occuper. Ce savant entreprit de soumettre au calcul le mouvement de ces astres et de déterminer, par la seule application des lois de la gravitation, les troubles survenus dans leurs mouvements par l'effet des attractions mutuelles. La première chose que fit Bailly pour établir sa théorie, ce fut de calculer l'action du Soleil sur chacun des satellites et les variations que la non-sphéricité de Jupiter introduit dans le mouvement de leurs absides. Mais, avant de rendre compte de ces recherches intéressantes, qui ont marqué un progrès nouveau dans la théorie des satellites, il est bon que nous nous arrêtions quelques instants sur un travail semblable d'Euler, entrepris vers la même époque, et que l'on trouve consigné dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin,* année 1763.

(¹) Dès 1761 Lalande avait fait voir à l'égard du système solaire que le mouvement des nœuds, qui pour une planète directe est toujours *rétrograde* sur l'orbite de la planète perturbatrice, peut devenir *direct* lorsqu'on le rapporte à un troisième plan, par exemple à l'écliptique, et que ceci avait particulièrement lieu lorsque l'inclinaison de la planète perturbatrice était plus grande que celle de la planète troublée.

Dans ce Mémoire, Euler commence par faire remarquer que l'action du Soleil sur la Lune attirée par la Terre devrait être beaucoup plus prépondérante que celle du Soleil sur les satellites, tournant autour de Jupiter. Les raisons qu'il en donne sont : 1° la grandeur de la masse de Jupiter comparée à celle de la Terre; 2° la distance plus grande de Jupiter au Soleil; et 3° la distance des satellites au centre de la planète, distance qui est plus petite que celle de la Lune au centre de la Terre, eu égard aux dimensions de Jupiter et de la Terre. Il semblerait dès lors, dit Euler, qu'ayant déterminé par la théorie toutes les inégalités qui affectent le mouvement de la Lune, la même théorie pût servir à déterminer celles qui naissent des attractions mutuelles des satellites; car on n'aurait pour cela qu'à supposer la masse de la Terre égale à celle du Soleil, sa distance au Soleil égale à celle de Jupiter, à cet astre et la distance de la Lune à la Terre égale à celle d'un satellite à sa planète. Mais, en faisant cette application, on s'apercevrait bien aisément que toutes les inégalités des satellites ainsi déterminées ont des valeurs excessivement faibles, presque insensibles, et notamment que le mouvement de l'abside de chaque satellite y est extrêmement lent, conséquences que les observations démentent cependant, puisqu'elles montrent que les satellites sont soumis à des inégalités assez considérables et que le mouvement de l'abside en particulier a un mouvement beaucoup plus rapide que celui de la Lune.

Euler rend compte de cette contradiction en l'attribuant à la non-sphéricité de Jupiter et détermine les inégalités que cette cause introduit dans le mouvement de la ligne des absides de chaque satellite, inégalités qui sont telles que l'abside du premier satellite avance suivant l'ordre des signes de 288° par an, celle du second de 57°, 3′, celle du troisième de 11° 10′, et enfin l'abside du quatrième de 1° 32′ seulement (¹).

(¹) L'arc θ dont les absides d'un satellite avancent périodiquement pendant une révolution entière de cet astre est donné, suivant Euler, par la formule

$$\theta = \frac{D^2}{8p^2 + D^2}\, 360^\circ,$$

où D désigne le demi-diamètre de l'équateur de Jupiter, et p la moyenne distance du satellite au centre de la planète. En prenant pour p les valeurs suivantes :

I... $p = 5\frac{2}{3}D$, II... $p = 9D$, III... $p = 14\frac{1}{3}D$, IV... $p = 25\frac{1}{4}D$, Pour parvenir à ces résultats, Euler suppose chaque satellite mû exactement dans le plan même de l'équateur de Jupiter et fait abstraction des autres causes de perturbation, telles que les attractions mutuelles des satellites, l'action du Soleil sur chacun d'eux, etc. Le cas où l'orbite du satellite est inclinée sur le plan de l'équateur de la planète, cas qu'il examine ensuite, le conduit à une conséquence assez singulière : c'est que le mouvement de l'abside est plus lent dans le cas où l'orbite du satellite est inclinée à l'équateur de Jupiter que dans celui où cette orbite est située dans le même plan (1). Si cette inclinaison du plan de l'orbite du satellite était de 54°44', la ligne des absides serait immobile; elle rétrograderait même si cette inclinaison était plus grande que cet angle. Euler trouve encore que, dans le cas d'une inclinaison fort petite, la ligne des nœuds doit avoir une vitesse deux fois plus grande que celle de la ligne des absides, et termine son Mémoire en faisant remarquer la rapidité avec laquelle diminue le mouvement de l'abside à mesure que la distance du satellite à la planète augmente, rapidité qui est telle, en effet, qu'un satellite qui serait placé à 60 demi-diamètres environ du centre de Jupiter n'aurait aucun mouvement dans la ligne de ses absides. Il est inutile de faire remarquer ici que ces résultats, fondés sur des rapports de quantités mal déterminées, étaient peu exacts, et qu'ils ont dû être considérablement modifiés par des recherches postérieures, comme nous le verrons plus loin, en analysant des travaux de Laplace et Lagrange sur le même sujet.

L'objet des recherches de Bailly, nous l'avons dit, était d'appliquer l'analyse à la théorie des satellites, afin d'en déduire des Tables exactes de leurs mouvements, et qui ne fussent fondées que sur le

---

on trouve que la ligne des absides avance pour chaque satellite d'un angle :

I..... $\theta = \frac{360^\circ}{258} = 1^\circ.23'.48''$ pendant $1^j.18^h.27^m.34^s$ ou $288^\circ\ '$ par an,

II.... $\theta = \frac{360^\circ}{649} =$ 33.17 pendant 3.13.13.42 ou 57. 3 par an,

III.... $\theta = \frac{360^\circ}{1644} =$ 13. 8 pendant 7. 3.42.36 ou 11.10 par an,

IV.... $\theta = \frac{360^\circ}{5107} =$ 4.14 pendant 16.16.32. 9 ou 1.32 par an,

(1) Soit φ l'angle que fait l'orbite du satellite avec le plan de l'équateur de la planète. Euler trouve que, dans ce cas, le mouvement de la ligne des absides doit être diminué dans le rapport de 1 à $1 - 3\sin^2\varphi$.

seul principe de la gravitation universelle. La voie analytique suivie par ce géomètre pour y parvenir est à peu près la même que celle tracée par Clairaut dans sa théorie de la Lune, c'est-à-dire qu'il considère chaque satellite comme s'il existait seul et que ses mouvements ne fussent troublés que par l'action du Soleil; et par l'application des principes de Clairaut, il détermine les variations que cette action doit produire : 1° sur la longitude moyenne du satellite; 2° sur la position de son nœud; et 3° dans le mouvement de son abside. A l'égard du quatrième satellite, auquel Bailly fait tout d'abord cette application, il reconnaît que, dans l'hypothèse où ce satellite ne serait soumis qu'à l'action seule du Soleil, deux inégalités assez sensibles devraient être appliquées à la longitude moyenne, inégalités qui en se combinant pourraient produire une correction de $0^\circ 2'$ ou $0^h 2^m 15^s$ dans la valeur de cet arc (1). Le mouvement de l'abside l'occupe ensuite et il trouve que ce mouvement est de $14'',43$ par révolution ou de $5'14'',5$ par an. Quant au mouvement du nœud, il le détermine de $5'14'',8$ par an et *rétrograde* (2). Nous avons déjà dit que les observations avaient indiqué à Wargentin que ce mouvement était *direct* et de $5'33''$, effet dont nous avons rendu compte en l'attribuant aux actions perturbatrices développées par les autres satellites.

L'application que Bailly fait des mêmes principes aux trois autres satellites lui montre que l'action exercée par le Soleil sur chacun d'eux n'y altère pas sensiblement la position de leurs nœuds et celles de leurs absides et que, par conséquent, cette action peut, à

---

(1) En appelant l la longitude moyenne du quatrième satellite, u son anomalie moyenne, v sa longitude vraie, t son élongation vue du centre de Jupiter, on a, d'après Bailly,

$$\begin{aligned} v = l - 55'54''\sin u + 4''\sin 2t - 27''\sin(2t-u) \\ + 0'33''\sin 2u + 1'49''\sin(2t-2u). \end{aligned}$$

Dans le cas des éclipses, t ou l'élongation est nulle et cette équation se réduit à la suivante :

$$v = l - 55'27''\sin u - 1',16''\sin 2u.$$

$55'27''$ est ici l'équation du centre du quatrième satellite. Par suite d'une correction appliquée à la longitude de Jupiter pour tenir compte de l'action de Saturne, Bailly a réduit cette équation à $50'20''$.

(2) Ce résultat approche beaucoup de celui obtenu par Newton au Livre III des *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle,* qui trouve, en effet, que ce mouvement du nœud doit être de $8^\circ 24'$ par siècle.

la rigueur, être négligée. Il en est de même de l'attraction directe de Saturne sur chacun des satellites que Bailly montre être le $\frac{1}{2000}$ de celle du Soleil et, par conséquent, physiquement nulle. Quant aux actions exercées par Saturne et Jupiter, ce géomètre ne se dissimule pas que les inégalités qui en résultent dans le retour des éclipses soient sensibles et méritent d'être soigneusement étudiées; mais il fait remarquer avec raison que les théories des planètes Jupiter et Saturne sont à son époque trop imparfaites pour que les effets provenant de cette cause puissent exactement être appréciés, et il invite les géomètres à s'en occuper.

Bailly passe ensuite à la recherche des inégalités qui naissent de l'attraction mutuelle des satellites et résout tout d'abord une difficulté qui se présente dans la solution de ce problème difficile, savoir celle de mettre la fonction qui exprime la distance de deux satellites sous une forme commode pour les applications, c'est-à-dire de la développer en une série assez convergente pour qu'on ne soit pas obligé d'en considérer un grand nombre de termes. Les artifices d'analyse que Bailly emploie pour y parvenir sont à peu près ceux dont Euler et Clairaut ont fait usage dans un cas semblable, le premier dans la théorie de Jupiter et de Saturne, et le second dans celle de Vénus et de la Terre. Cette question résolue, Bailly passe à la recherche, pour chaque satellite, de l'équation de son orbite et y parvient en adoptant les éléments donnés par Cassini dans ses Tables, mais en laissant indéterminées les excentricités des satellites ainsi que leurs masses. Il donne ensuite l'expression de la longitude vraie en fonction de la longitude moyenne et s'occupe de déterminer le mouvement de l'abside de chaque satellite en tenant compte de la figure elliptique de Jupiter, sujet qui l'avait déjà occupé en 1763. Après ces déterminations, Bailly résout plusieurs problèmes intéressants sur le sujet qui l'occupe, et se propose notamment de déterminer le temps de la demi-durée d'un satellite dans l'orbite troublée, d'après la connaissance de son inclinaison et de sa distance à son nœud. Il fait voir que l'ellipticité de l'ombre de Jupiter qui influe assez sensiblement sur les inclinaisons pour les diminuer n'altère en rien les demi-durées, pourvu que, dans le calcul de cet élément, on emploie l'inclinaison qui convient à l'hypothèse d'un cône d'ombre à base elliptique. Il trouve que les inclinaisons déduites dans les deux hypothèses d'une ombre elliptique et d'une ombre circulaire sont dans le rapport de $\frac{13}{14}$ à 1, c'est-à-dire que l'on a, φ désignant l'inclinaison relative à la première hypothèse et φ' celle qui convient à la seconde, $0{,}93 \sin\varphi' = \sin\varphi$.

Dans les Sections suivantes de son Ouvrage, Bailly entreprend de réduire en nombres les formules de sa théorie, et commence par chercher la valeur des masses de chaque satellite. Il y parvient en comparant les résultats fournis par la théorie avec ceux déduits de l'observation et faisant usage pour cela des équations empiriques que Wargentin avait introduites dans ses Tables de 1746. D'après cet astronome, l'équation du premier satellite est de $0^h 3^m 30^s$ ou de $0° 29' 30''$ et sa période de 437^j. Bailly montre que cette équation est produite par l'action du second satellite et s'en sert pour déterminer la masse de ce satellite, qu'il trouve égale à 0,0000211, la masse de Jupiter étant prise pour unité. L'équation du second satellite, d'après le même astronome, est de $0^h 16^m 30^s$ ou $1° 6' 42''$; mais, comme sa période est la même que celle du premier, c'est-à-dire de 437^j, cette équation ne peut résulter que des actions réunies du premier et du troisième satellite; elle ne peut donc donner l'une des masses qu'en fonction de l'autre et laisse par conséquent le problème indéterminé. Bailly essaye différents moyens pour obtenir la valeur séparée des deux masses; mais, n'y pouvant réussir à son gré, il a recours au mouvement du nœud du second satellite que Maraldi avait fixé de 12° par an et qui dépend de la masse du troisième. C'est en combinant cette donnée de l'observation avec l'équation de Wargentin que Bailly obtient pour la masse du premier satellite 0,0003370 et pour celle du troisième 0,0001327. Quant à la masse du quatrième, Bailly la détermine en comparant toujours la théorie aux observations et la trouve égale à environ 0,000050, valeur qui se rapproche assez des résultats obtenus par Delambre et Laplace, comme nous le verrons plus loin (¹).

Les recherches que nous venons d'analyser font l'objet des trois

---

(¹) Bailly est revenu, dans la suite, sur ces déterminations, et, relativement aux masses du premier et du troisième satellite, il a donné les nouvelles valeurs que voici :

I.... 0,00004247; III.... 0,00007624.

Les valeurs des quatre masses adoptées par ce savant sont donc

I.... 0,00004247; II.... 0,0000211; III... 0,00007624; IV... 0,000050.

premières Parties de l'Ouvrage de Bailly, publié en 1766 sous ce titre : *Essai sur la théorie des satellites de Jupiter*, in-4°. La quatrième Partie qui termine l'Ouvrage est consacrée à l'étude de deux sujets également intéressants et délicats : la recherche du mouvement des nœuds des satellites et celle de leur inclinaison mutuelle. Après avoir considéré le mouvement du nœud qui se fait toujours sur l'orbite du satellite perturbateur et en avoir déterminé la quantité, Bailly fait voir que les inclinaisons mutuelles des orbites sont sensiblement constantes, et, par suite, que la variation observée dans l'inclinaison de l'orbite du satellite sur celle de Jupiter ne peut résulter que du mouvement du nœud qui est lui-même un mouvement de libration, comme les observations du second satellite l'avaient appris à Maraldi dès 1765. Relativement à la quantité de ce mouvement, Bailly trouve qu'en fixant le lieu moyen du nœud du premier satellite à 313° 52′, les mouvements en libration des trois autres satellites autour de ce point fixe sont pour le second satellite de 9°37, dans une période de 30 ans, pour le troisième satellite de 3°53′ dans une période de 200 ans environ et pour le quatrième de 12° à 13° dans une période de 400 à 500 ans. Quant aux nœuds du premier satellite, Bailly montre qu'ils oscillent eux-mêmes autour d'un point fixe qui est leur lieu moyen et rétrogradent sur l'orbite de Jupiter en parcourant son écliptique. Ce mouvement de libration, que Maraldi avait aperçu dès 1765 et que Lalande a depuis démontré, est un des plus curieux phénomènes que l'observation ait révélés sans le secours de l'Analyse.

Ces recherches de Bailly, malgré ce qu'elles offraient de remarquable, laissaient bien imparfaite encore la théorie des satellites de Jupiter. On pouvait en effet désirer une solution plus neuve et plus générale de ce problème que celle donnée par ce savant, qui s'était contenté, comme nous l'avons dit, d'appliquer à chacun des satellites la méthode employée par Clairaut dans sa théorie de la Lune sans en modifier assez convenablement les expressions. Cette solution plus générale fut donnée par Lagrange en 1766, dans un Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris, et que les géomètres s'accordent à regarder comme l'un des plus beaux que ce savant ait écrits sur la théorie du système du monde (¹). Dans

---

(¹) Ce Mémoire de Lagrange fut couronné par l'Académie des Sciences de Paris, ce Mémoire, Lagrange considère à la fois les perturbations qui naissent de l'attraction mutuelle des satellites, celles qui proviennent de l'action du Soleil et de l'ellipticité du sphéroïde de Jupiter, et c'est en ayant égard à toutes ces influences que ce grand géomètre détermine les équations différentielles qui régissent le mouvement troublé des satellites autour de leur planète principale. L'intégration de ces équations, que Lagrange effectue ensuite, lui fait retrouver, comme à Bailly, les inégalités découvertes par Bradley et Wargentin et dont la période est de 437 jours. Lagrange tient compte ensuite des termes dépendant des excentricités et des inclinaisons, termes qu'il avait négligés dans une première approximation, et parvient ainsi, pour chaque satellite, à quatre équations du centre qui se rapportent aux absides des trois autres et à son abside propre, équations qui sont surtout sensibles dans le mouvement du troisième satellite. Après ces déterminations, Lagrange passe à l'intégration des équations de la latitude et obtient pour chaque satellite quatre équations principales qu'il propose de représenter en imaginant un système de quatre plans passant par le centre de Jupiter, et se mouvant le premier sur l'orbite de cette planète, le deuxième sur le premier, le troisième sur le deuxième et le quatrième (qui est celui de l'orbite du satellite) sur le troisième. Il montre que les nœuds de ces quatre plans doivent rétrograder pendant une révolution entière du satellite et fait connaître les formules qui expriment ces variations.

Relativement aux masses des satellites, Lagrange emploie pour les déterminer les deux équations empiriques de Wargentin, savoir : $0^h 30^m 30^s$ et $0^h 16^m 30^s$, équations qui sont relatives au premier et au second satellite, et dont la période est de 347^j. L'équation du premier satellite, résultant principalement de l'action du deuxième, doit donner directement, et avec une grande

---

qui, dès 1764, avait pris pour sujet du prix qu'elle devait décerner en 1766, la théorie analytique des satellites de Jupiter. Voici quelles étaient les conditions du concours : 1° déterminer les inégalités qui doivent s'observer dans le mouvement des quatre satellites de Jupiter à cause de leurs attractions mutuelles; 2° trouver la loi et les périodes de ces inégalités, surtout à l'époque des conjonctions, et les valeurs numériques de ces inégalités d'après les meilleures observations; 3° enfin déterminer les variations observées dans les inclinaisons des orbites des deuxième et troisième satellites.

approximation, la masse de ce dernier corps. Lagrange la trouve égale à 0,00002417, valeur qui s'accorde assez bien avec celle obtenue par Bailly. Quant à la variation du deuxième satellite, qui est due aux actions réunies du premier et du troisième, elle ne peut donner, comme nous l'avons déjà remarqué, que l'une des masses en fonction de l'autre, et exige, par conséquent, que le rapport entre ces masses soit connu. Lagrange cherche les limites entre lesquelles ce rapport peut être compris et trouve que, en supposant la masse du premier satellite égale à celle du troisième, ces masses sont 0,00006869. Enfin, à l'égard de la masse du troisième satellite et en la supposant égale à celle du premier, Lagrange obtient pour sa valeur le nombre 0,0000687.

Ce grand géomètre termine son Mémoire en étudiant les variations observées dans les positions des orbites des satellites et rend compte du changement de l'inclinaison et du mouvement direct des nœuds, phénomènes qu'il rattache l'un à l'autre en montrant qu'il est impossible que le mouvement des nœuds ait lieu sans qu'il en résulte une variation semblable dans l'inclinaison, et confirme ainsi les curieuses remarques faites avant lui par Lalande et Bailly.

Les travaux que nous venons d'analyser étaient limités à la première puissance des forces perturbatrices. Lagrange avait promis de revenir sur sa théorie et de la perfectionner en donnant aux déterminations numériques plus d'étendue et de précision, et surtout en tenant compte des termes qui naissent du carré et des produits des masses; mais il est resté plus de vingt ans sans reprendre ses recherches sur ce sujet. Cette question de l'attraction des satellites paraissait même un peu oubliée, lorsque Laplace la reprit en entier par une analyse nouvelle et sut lui donner toute l'exactitude que réclamait le perfectionnement des Tables à cette époque. Les premières recherches de Laplace sur les satellites datent de 1784, et ont pour objet les rapports très remarquables qui existent entre les trois premiers satellites, rapports qui sont la source des principales inégalités que l'on observe dans leur mouvement; mais c'est dans les Volumes de l'Académie des Sciences de Paris, pour 1788 et 1789, que ce grand géomètre a exposé complètement sa théorie et qu'il a indiqué la marche à suivre pour en déduire des Tables aussi exactes que les observations modernes le comportent. Il y est revenu plus tard, dans la *Mécanique céleste,* où cette théorie forme le VIII^e Livre, et c'est dans cet Ouvrage que nous allons le suivre pour rendre compte des résultats remarquables auxquels il est parvenu.

Comme Lagrange, Laplace développe les équations différentielles du mouvement des satellites, en ayant égard à leur attraction mutuelle, à celle du Soleil et à l'aplatissement de Jupiter ; et par l'intégration de ces équations, il obtient les diverses inégalités qui troublent leurs mouvements, inégalités dont quelques-unes sont rendues fort sensibles par les petits diviseurs que l'intégration fait acquérir à quelques-uns de leurs termes, et cela en vertu des rapports de commensurabilité qui existent entre les moyens mouvements des trois premiers satellites. Ces rapports sont tels, en effet, que la différence des moyens mouvements du premier et du second satellite est à fort peu près égale à deux fois la différence des moyens mouvements du deuxième et du troisième. Les inégalités dépendantes de la période de 437^j, en particulier, résultent de la considération de ces sortes de termes. Laplace montre ensuite que l'action du Soleil sur les satellites fait naître dans leur mouvement des inégalités sensibles dont il donne les expressions, et qui répondent aux équations connues dans la théorie de la Lune, sous le nom de *variation,* d'*évection* et d'*équation annuelle.* La dernière de ces équations, qui dépend comme la seconde des excentricités, a une période fort grande et se trouve sensiblement modifiée par les termes qui dépendent du carré et des produits des masses perturbatrices.

Les mouvements des orbes des satellites présentent des anomalies singulières que l'observation a fait connaître et que la théorie a depuis confirmées. Ainsi Laplace démontre que, contrairement à ce que les astronomes avaient d'abord supposé, les satellites ne se meuvent point sur l'équateur de la planète, mais sur des plans diversement inclinés à cet équateur et qui le sont d'autant plus que les satellites sont à une plus grande distance de la planète. Ces plans sont situés entre le plan de l'équateur et celui de l'orbite et passent tous par la commune intersection de ces deux plans. Leur inclinaison sur l'équateur de Jupiter n'est pas fixe ; elle varie sans cesse, mais de quantités très faibles et qui sont entre elles dans un rapport constant avec l'inclinaison de l'équateur sur l'orbite de la planète. Enfin Laplace montre que les nœuds des orbites des trois derniers satellites ont un mouvement rétrograde sur leurs plans fixes, dont la période est pour le second satellite de $29^{\text{ans}},9142$, pour le troisième de $141^{\text{ans}},739$ et pour le quatrième de 531 ans.

Les observations n'ont point fait connaître d'excentricité appréciable dans les orbites des deux premiers satellites; mais celles du troisième et du quatrième en offrent de fort sensibles. L'excentricité du quatrième est la plus considérable; elle se communique aux trois autres, mais plus faiblement cependant aux deux premiers qu'au troisième, à cause de leur éloignement. Cette excentricité de l'orbe du quatrième satellite, en se combinant avec celle du troisième, produit dans le mouvement de ce dernier satellite une double équation du centre qui a longtemps embarrassé les astronomes. Laplace est le premier qui en ait reconnu la cause et qui en ait bien distingué les effets. La première de ces équations est propre à l'orbite du troisième satellite et dépend de la distance de ce satellite à son abside; la seconde est produite par le quatrième satellite et se rapporte à l'abside même de ce dernier corps. En 1684 ces deux équations du centre étaient de même signe et formaient une somme égale à $-6^{\text{m}}51^{\text{s}}$; elles se retranchaient en 1773 et donnaient une seule équation du centre égale à $1^{\text{m}}57^{\text{s}}$. Wargentin avait essayé, comme nous l'avons dit, de représenter cette double variation à l'aide de deux équations particulières dont il avait fixé les périodes à $12^{\text{ans}}\frac{1}{2}$ et $13^{\text{ans}}\frac{2}{3}$; mais, n'ayant pas rapporté l'une d'elles à l'abside du quatrième satellite, il ne put déterminer assez exactement la grandeur de ces inégalités et se vit forcé dans la suite de les abandonner. Il leur substitua alors une équation du centre variable, avec une période de 13^{ans} et dont il détermina les variations à l'aide des observations du troisième satellite, ce qui le conduisit à des résultats peu différents de ceux obtenus par Laplace dans ses recherches de 1784. On voit en effet, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1787, que cette équation du centre variable, que Wargentin avait formée empiriquement, était de $7^{\text{m}}0^{\text{s}}$ de 1668 à 1720 et de $2^{\text{m}}30^{\text{s}}$ de 1754 à 1781.

Les trois premiers satellites sont assujettis à des rapports remarquables, qui ont une grande influence sur leur mouvement. Les inégalités dépendantes des carrés et des produits des forces perturbatrices en résultent particulièrement. Ces rapports consistent en ce que le moyen mouvement du premier satellite moins trois fois celui du deuxième, plus deux fois celui du troisième, est exactement et constamment égal à zéro; et pareillement que la longitude moyenne du premier satellite moins trois fois celle du deuxième plus deux fois celle du troisième est exactement et constamment égale à deux angles droits (¹). Il n'est pas nécessaire, comme Laplace le montre, que ces rapports entre les moyens mouvements et les longitudes des trois premiers satellites aient eu lieu exactement à l'origine, ce qui paraît en effet peu vraisemblable. Il suffit, pour l'existence du phénomène, que ces rapports aient été peu différents de ce qu'ils sont aujourd'hui : alors l'attraction mutuelle des satellites a suffi pour les rendre rigoureux et les maintenir en vigueur. Mais en même temps elle a dû faire naître dans les mouve-

---

(¹) Une conséquence intéressante et qui se déduit tout d'abord de ces théorèmes, c'est que les trois premiers satellites ne peuvent jamais être éclipsés à la fois. En effet l', l'', l''' désignant les longitudes moyennes synodiques des trois premiers satellites, on a, en vertu de la relation énoncée dans le texte,

$$l' - 3l'' + 2l''' = 180^\circ.$$

Mais, dans le cas d'une éclipse simultanée des trois premiers satellites, l', l'', l''' sont respectivement égaux à 180° : ainsi

$$l' - 3l'' + 2l''' = 0,$$

ce qui est contre la supposition.

Dans le cas des éclipses du premier ou du deuxième satellite, on a

$$l' = l'' = 180^\circ,$$

et par suite

$$l''' = 270^\circ.$$

Donc, dans ce cas, le troisième satellite est en quadrature avec Jupiter lorsque les deux premiers sont dans l'ombre.

Dans le cas où le deuxième et le troisième satellite sont éclipsés en même temps, on a

$$l'' = l''' = 180^\circ,$$

d'où

$$l' = 360^\circ;$$

ainsi, dans ce cas, le premier satellite se trouve en conjonction avec la planète.

Enfin, dans le cas des éclipses simultanées du premier et du troisième satellite, l' et l''' sont égaux à 180°, et l'on a

$$l'' = 120^\circ.$$

ments des satellites une inégalité périodique dont l'étendue dépend de la différence des rapports primitifs aux rapports actuels. Cette inégalité, que Laplace désigne sous le nom de *libration des satellites,* a une grande analogie avec la libration du sphéroïde lunaire, mais elle est vraisemblablement fort petite et même insensible, car toutes les recherches faites par Delambre pour en déterminer la valeur sont demeurées infructueuses. On doit donc admettre ou bien que les rapports précédents entre les moyens mouvements et les longitudes ont été, à l'origine du mouvement, d'une parfaite exactitude ou bien qu'ils ne s'en sont écartés que d'une quantité insensible.

Un des résultats les plus remarquables de la théorie des satellites de Jupiter, et qui se déduit du calcul de leurs inégalités, est la connaissance des masses. Cette connaissance ne pouvait être donnée ni par la mesure des diamètres, à cause de leur extrême petitesse, ni par les variations séculaires de leurs orbites qui sont des éléments encore trop imparfaitement connus pour pouvoir servir à cette évaluation; mais on pouvait la déduire de la comparaison des valeurs que la théorie assigne à certaines inégalités avec celles que fournit l'observation, et c'est ce que Laplace a fait. Les données que ce grand géomètre emploie pour cet objet sont : 1° l'inégalité principale du premier satellite que les observations avaient donnée à Delambre de $3^m 39^s$; 2° l'inégalité principale du deuxième satellite, égale d'après le même astronome à $15^m 15^s,3$; 3° le mouvement annuel et sidéral de l'abside du quatrième satellite que les observations fixent à $2540^s,35$; 4° l'équation du centre du troisième satellite qui se rapporte à l'abside du quatrième et dont la valeur est de $309^s,1$; 5° enfin, le mouvement annuel et sidéral du nœud de l'orbite du deuxième satellite sur le plan de l'équateur de la planète, mouvement rétrograde et que les observations ont fixé à 43250^s. En combinant ces données de l'observation avec les résultats fournis par la théorie, Laplace obtient, pour les valeurs des masses des quatre satellites, les nombres suivants :

I..................	0,0000184113
II..................	0,0000258325
III................	0,0000865185
IV.................	0,0000559081

La masse de Jupiter est prise ici pour unité.

Laplace est revenu sur ces déterminations au Tome IV de la *Mécanique céleste* et les a corrigées d'après de nouvelles recherches de Delambre faites sur les constantes de l'observation. Les valeurs des masses qu'il a obtenues dans cette seconde approximation sont les suivantes :

I..................	0,0000173281
II..................	0,0000232355
III..................	0,0000884972
IV..................	0,0000426591

Les équations différentielles qui déterminent le mouvement troublé des satellites autour de leur planète principale, étant du second ordre et au nombre de douze, doivent introduire par l'intégration vingt-quatre constantes arbitraires qui sont les éléments mêmes des orbites des quatre satellites : huit de ces constantes arbitraires sont relatives aux moyens mouvements et aux longitudes moyennes; huit appartiennent aux excentricités et aux aphélies des orbites et enfin huit autres dépendent des inclinaisons et des nœuds. Les rapports qui existent entre les moyens mouvements et les longitudes moyennes réduisent à vingt-deux ces vingt-quatre constantes arbitraires, car elles établissent, comme nous l'avons vu, deux relations entre ces deux sortes d'éléments; mais l'inégalité que nous avons désignée sous le nom de *libration* en introduit deux nouvelles, en sorte que le nombre total des indéterminées est toujours de vingt-quatre. Si à ces vingt-quatre indéterminées on ajoute les masses des quatre satellites, l'aplatissement de Jupiter (¹), l'inclinaison de son équateur par rapport à l'orbite de la planète et la position des nœuds de cet équateur, on obtient en tout trente et une inconnues qui ne peuvent être déterminées que par les observations. Pour en obtenir les valeurs, il faut discuter avec beaucoup de soin les observations d'éclipses de chaque satellite et en considérer un grand nombre, afin de faire disparaître de leurs résultats moyens les erreurs dont elles peuvent être affectées. La méthode la plus simple

---

(¹) Cet aplatissement ou le rapport des deux axes de Jupiter, déduit des valeurs des masses de ses satellites, a été trouvé, par Laplace, égal à 0,9368, ce qui se rapproche beaucoup du rapport $\frac{15}{16}$ que donnent les mesures directes.

que l'on puisse suivre dans cette recherche est celle que Laplace indique ; elle consiste à former avec les éléments primitifs que la théorie détermine des *Tables provisoires* et à calculer à l'aide de ces Tables les éclipses observées. Les corrections à apporter aux éléments primitifs sont alors fournies par les équations de condition que l'on parvient aisément à former pour chaque éclipse. C'est en suivant cette méthode que Delambre est parvenu à déterminer avec toute la précision convenable les éléments indéterminés que renfermait la théorie de chaque satellite ; et les Tables que ce savant en a déduites, outre qu'elles sont beaucoup plus exactes que celles de Wargentin, publiées en 1746, présentent cet avantage précieux d'être uniquement fondées sur le principe de la gravitation universelle et exemptes de tout empirisme. Elles ont paru en 1792 dans la troisième édition de l'*Astronomie* de Lalande et ont été refaites en 1817 sur de nouvelles données de Laplace et d'après les valeurs des masses fournies par la seconde approximation ; nous en reparlerons bientôt.

Après avoir analysé et soumis au calcul les actions réciproques que les satellites exercent les uns sur les autres, il restait, pour compléter leur théorie, une question intéressante à résoudre, celle de déterminer la durée de leurs éclipses. Pour y parvenir, Laplace considère généralement le cas d'un corps opaque de forme quelconque, éclairé par un corps lumineux, et cherche la figure de l'ombre que ce corps opaque doit projeter derrière lui, quelle que soit la forme du corps éclairant. Cette solution générale, il l'applique au cas de Jupiter supposé sphérique et tient compte ensuite de l'aplatissement de cette planète, en admettant que le plan de son équateur coïncide avec celui de son orbite, supposition fort approchée, comme le remarque Laplace, car l'erreur qui peut en résulter est de l'ordre du produit de deux quantités extrêmement petites, qui sont l'ellipticité de Jupiter et l'inclinaison de son équateur. L'application numérique que Laplace fait ensuite de ses formules le conduit, pour les demi-durées des éclipses, aux résultats suivants :

I	4945″,87
II	6205″,93
III	7801″,30
IV	10271″,64

Ces résultats surpassent un peu ceux déduits de l'observation et qui sont :

I.................	4713″
II................	5976″
III...............	7119″
IV	9890″

Laplace en trouve la raison : 1° dans l'étendue des disques des satellites qui, bien qu'inappréciables vus de la Terre, ont cependant des dimensions sensibles vus du centre de Jupiter ; 2° dans l'effet de la réfraction de la lumière solaire à travers l'atmosphère de Jupiter ; et 3° dans la pénombre dont l'effet est d'augmenter la demi-durée des éclipses. Ce grand géomètre termine ses recherches en recommandant aux astronomes un genre d'observation alors assez négligé et qui lui paraît devoir répandre un grand jour sur la théorie des satellites, à savoir l'observation des éclipses de Jupiter par ses satellites ou, si l'on veut, l'observation de leur passage sur le disque de cette planète.

Nous avons dit que les observations des éclipses du premier satellite de Jupiter avaient fait découvrir le mouvement progressif de la lumière. Persuadé que la comparaison de la théorie avec les observations pouvait donner la constante de l'aberration avec une grande précision, Laplace avait invité les astronomes à s'occuper de cette recherche délicate. Delambre, qui l'entreprit l'un des premiers, trouva, pour la quantité de l'aberration en longitude, $20''\frac{1}{4}$, quantité qui est précisément celle que Bradley avait conclue de ses observations directes sur les étoiles. Cet accord singulier entre deux résultats obtenus par des méthodes aussi différentes prouve que la vitesse de la lumière du Soleil est uniforme au moins dans toute l'étendue du diamètre de l'orbe terrestre et qu'elle est bien une émanation de cet astre ; car, si elle consistait simplement dans les vibrations d'un fluide éthéré répandu autour du Soleil, il y a tout lieu de croire que ce fluide, en approchant du Soleil, subirait des variations dans sa densité et qu'ainsi la vitesse de ses vibrations ne serait pas uniforme.

Les perturbations que les satellites éprouvent par l'effet de leur attraction mutuelle dépendent de leurs masses. Celles-ci sont d'autant mieux connues que celles-là sont déterminées avec plus d'exactitude. Nous avons dit que Delambre, en se fondant sur la théorie de Laplace, était parvenu à construire des Tables beaucoup plus exactes que celles parues jusqu'alors, et où tout empirisme avait été sévèrement banni. Mais Laplace, ayant achevé de nouvelles recherches sur la théorie de Jupiter et perfectionné en plusieurs points celle des satellites, notamment en ce qui concerne les valeurs des masses, Delambre jugea nécessaire de revenir sur son travail et de le corriger d'après les nouvelles données que lui offrait la théorie perfectionnée de Laplace. C'est de ces recherches que sont résultées les nouvelles Tables publiées en 1817 sous le titre de *Tables écliptiques des satellites de Jupiter,* in-4°, et que leur auteur a étendues jusqu'à 1840. Elles sont fondées sur la totalité des observations faites depuis 1662 jusqu'à l'époque de leur publication et supposent, ainsi que nous l'avons déjà dit, les valeurs des masses données par la seconde approximation. Comme celles de 1792, elles sont calculées en temps moyen et satisfont assez exactement aux conditions qui lient ensemble les moyens mouvements des trois premiers satellites, ainsi qu'à celles qui rendent leurs éclipses simultanées à jamais impossibles.

Les Tables de Delambre finissant en 1839, il devenait nécessaire de s'occuper de la formation de nouvelles Tables des satellites. Ce travail a été entrepris par Damoiseau dès 1833 et terminé en 1836. Les *Tables écliptiques des satellites,* que ce savant a fait paraître, sont, comme celles de Delambre, déduites de la théorie de l'attraction universelle et construites en la même forme que ces dernières. Elles ont été publiées sous les auspices du Bureau des Longitudes, en 1836, et servent depuis 1841 aux calculs de la *Connaissance des Temps,* du *Nautical Almanac* et des autres Éphémérides. Les données de l'observation, sur lesquelles ces Tables reposent, sont les suivantes : 1° le mouvement annuel et sidéral du nœud de l'orbite du second satellite, que Damoiseau fixe à 12°4′40″,4; 2° l'inégalité principale de ce second satellite donnée par les observations de 15′6″,33; 3° le mouvement annuel et sidéral du périjove du quatrième satellite dont l'expression est 14′51″,57; 4° l'inégalité du troisième satellite qui se rapporte à ce périjove et dont la valeur est 1′5″,07; 5° le mouvement annuel et sidéral du périjove du troisième satellite trouvé de 9377″,8965; 6° le mouvement annuel et sidéral du nœud de l'orbite du troisième satellite sur son plan fixe égal à 9194″,515; et 7° enfin le mouvement annuel et sidéral du nœud de l'orbite du quatrième satellite que les observations fixent à $2489'',935$. De ces données, Damoiseau conclut les valeurs suivantes des masses :

I.............	0,0000168770
II............	0,0000232270
III...........	0,0000884370
IV............	0,0000424751

valeurs un peu plus faibles que celles obtenues par Delambre dans ses dernières recherches et que Laplace a rapportées au Tome IV de la *Mécanique céleste*. Quant à l'aplatissement de Jupiter, Damoiseau le trouve égal à $\frac{1}{13,492}$. Nous reviendrons dans la troisième Partie de cet Ouvrage sur ces Tables de Damoiseau pour en expliquer la disposition et l'usage.

Depuis la publication des Tables de Damoiseau, il n'a été fait aucun travail d'ensemble sur la théorie des satellites de Jupiter. Les seules recherches que nous ayons à mentionner ici sont relatives aux Tables I et II des éclipses de chaque satellite, que les astronomes ont prolongées de quelques années, afin de permettre aux calculateurs de continuer leurs travaux. C'est M. Fold, de Berlin, qui le premier s'est occupé de ces utiles recherches. Outre les Tables I et III des éclipses qu'il a étendues jusqu'à 1900, cet astronome a donné la Table I de chaque satellite, relative aux configurations. M. Adams, qui a repris cette question un peu plus tard, a fait paraître dans l'*Appendice* au *Nautical Almanac*, pour 1881, les mêmes Tables I et III des éclipses pour une durée de dix ans (1880-1890), mais en modifiant quelques-uns des éléments de Damoiseau et faisant usage, dans le calcul des perturbations de Jupiter, des Tables de Le Verrier. Les corrections que ce savant astronome a ainsi apportées aux données de Damoiseau ont eu pour principal résultat de rendre plus rigoureuse la relation qui lie entre elles les longitudes moyennes des trois premiers satellites, relation qui n'est qu'imparfaitement satisfaite dans les Tables de cet auteur. Il a repris en même temps le calcul des inégalités dépendantes de l'argument II — A et l'a rendu plus exact, en tenant compte de l'action mutuelle des trois premiers satellites, action que Damoiseau avait totalement négligée dans sa théorie. Le *Nautical Almanac* et quelques autres Éphémérides se servent des Tables de M. Adams; mais le *Berliner Jahrbuch* emploie les

Tables de M. Fold, un peu modifiées par les corrections empruntées au travail de M. Adams. Quant à la *Connaissance des Temps*, elle fait usage depuis 1880 des Tables manuscrites I et III que M. Lœwy a fait construire, d'après les données mêmes de Damoiseau et sans rien changer à sa théorie.

La durée des Tables de Damoiseau étant limitée à l'année 1880, l'Académie des Sciences de Paris a mis, dès 1872, cette question au concours et en a fait le sujet d'un prix qui jusqu'ici n'a pu être décerné. Voici quelles sont les conditions du concours : « Revoir la théorie des satellites de Jupiter; discuter les observations et en déduire les constantes qu'elle renferme et particulièrement celle qui fournit une détermination de la vitesse de la lumière; enfin construire des Tables particulières pour chaque satellite. »

V.

Catalogues d'étoiles.

Le plus ancien Catalogue d'étoiles que nous possédions est celui qui nous a été conservé par Ptolémée, au Livre VIII de l'*Almageste;* il renferme les longitudes et latitudes de 1022 étoiles exprimées en degrés et parties de degré et se rapporte à l'an 137 de notre ère. Bien que Ptolémée assure positivement avoir recommencé toutes les observations d'Hipparque, il paraît certain aujourd'hui qu'il n'a fait que réduire à son époque le Catalogue de ce dernier, dressé 267 ans avant lui, en ajoutant $2°40'$ à toutes les longitudes pour tenir compte de l'effet de la précession (¹). Cette quantité, qui suppose un mouvement des équinoxes égal à $36''$ par an, étant trop faible de $1°2'$ environ (la précession à l'époque de Ptolémée était à peu près de $50''$), il s'est trouvé que les longitudes de Ptolémée se rapportent non pas à l'an 137, mais bien à l'an 63 de notre ère.

783 ans après Ptolémée, un astronome arabe, du nom d'Albaté-

(¹) Flamsteed, Halley et surtout Delambre et Biot ont donné de ce fait des raisons bien probantes. (*Voyez*, pour Delambre, le Chapitre VII de son *Histoire de l'Astronomie ancienne* et, pour Biot, le Mémoire qu'il a publié dans le *Journal des savants*, année 1847, p. 406.)

gnius, corrigea et compléta le Catalogue de Ptolémée. Les observations qu'il entreprit dans ce but furent commencées vers l'an 264 de l'hégire (877 de J.-C.), et continuées jusqu'en 918, tantôt à Racta, ville de Mésopotamie (aujourd'hui Racca ou Racha), tantôt à Antioche, siège de son gouvernement. La précession déduite des observations de cet astronome a été trouvée égale à $55''$, valeur qui se rapproche assez, comme on voit, de la véritable. Quelques siècles plus tard, Ouloug-Beig ou Ulug-Beg, prince tartare qui régnait au delà de l'Oxus, sur la Transoxiane, nous a laissé, dans ses *Tables astronomiques* (en persan), un Catalogue d'étoiles qui renferme les lieux de 1019 de ces astres déduits des observations faites par lui à Samarcand, capitale de son empire. Ce Catalogue, longtemps célèbre dans tout l'Orient, forme la quatrième partie desdites Tables et a été publié en 1806 par les soins d'un savant anglais, Th. Hyde, sous le titre de *Tabulæ longitudinum et latitudinum Stellarum fixarum*, etc., Oxonii, in-4°; l'époque est fixée à l'an 1437 de notre ère (¹). Citons encore, et par ordre de date, le Catalogue de Tycho Brahé, paru en 1600 et contenant les lieux de 777 étoiles; Kepler, d'après les observations mêmes de Ticho, y ajouta, en 1627, 228 étoiles, ce qui porta à 1005 le nombre des étoiles de ce Catalogue; celui de Riccioli, paru en 1665 et qui renferme 1468 étoiles réduites à l'époque 1701; celui de Halley, publié en 1679 et qui contient les lieux de 341 étoiles, déduites des observations faites à Sainte-Hélène par cet astronome en 1677; et enfin le Catalogue d'Hevelius publié en 1690 et qui renferme les longitudes, latitudes, ascensions droites et déclinaisons de 1564 étoiles de grandeurs différentes jusqu'à la 7^e inclusivement : l'époque de ce Catalogue est l'équinoxe moyen de 1660 (²).

C'est en 1725 que Flamsteed fit paraître à Londres, dans le III^e Volume de son *Historia cœlestis,* son grand Catalogue d'étoiles

---

(¹) M. L.-A. Sedillot a donné de l'Ouvrage entier une traduction française avec le texte qui a paru en 1853.

(²) Hevelius est le premier qui ait donné les lieux des étoiles exprimés en degrés, minutes, secondes. Ptolémée et Ulug-Beg se contentèrent de marquer la minute ronde; Tycho et Halley n'allèrent pas au delà de la demi-minute qu'ils désignaient par la fraction $\frac{1}{2}$. C'est seulement vers le milieu du siècle dernier que La Caille et Bradley donnèrent les quarts de seconde et que Maskelyne marqua les huitièmes, puis les dixièmes de seconde.

qui contient les longitudes, latitudes, ascensions droites et distances au pôle de 2936 positions réduites à l'année 1689. Ce Catalogue, célèbre depuis sous le nom de *Catalogue britannique,* le plus vaste et le plus exact, sans contredit, de tous ceux publiés jusqu'alors, fut dressé par les soins de ce grand astronome sur les observations faites à Greenwich de 1676 à 1705; Lalande, dans le VIII^e Volume de ses *Éphémérides,* en a donné une édition à la fois plus correcte et plus commode. A la suite du *Catalogue britannique,* on trouve ceux de Ptolémée, d'Ulug-Beg, de Tycho, d'Hevelius et un Catalogue assez exact pour 1593, dressé d'après les observations du prince de Hesse.

De 1757 à 1762, La Caille publia trois Catalogues qui par leur exactitude et leur étendue furent regardés comme les fondements de l'Astronomie à cette époque. Le premier de ces Catalogues, publié en 1757, renferme les positions de 397 étoiles principales, déterminées, chacune, par un nombre si considérable d'observations et avec une précision telle que, au dire de Lalande, «4000 étoiles ne lui eussent pas coûté plus de temps, ni plus de peine que n'avaient fait ces 397 étoiles»; La Caille y travailla pendant dix ans. Le second Catalogue se rapporte à l'hémisphère austral et renferme 1942 étoiles choisies parmi celles (au nombre d'environ 10 000) que La Caille avait observées au Cap de Bonne-Espérance et aux îles de France et de Bourbon, pendant les années 1751-1754. En 1845, le gouvernement anglais fit entreprendre la réduction de toutes les étoiles australes observées par La Caille au Cap, et publia un Catalogue qui renferme 9766 positions réduites à l'époque 1750. Quant au troisième Catalogue de La Caille, resté inachevé par la mort de ce laborieux observateur, il comprend environ 600 étoiles zodiacales observées à Paris dans le cours de l'année 1762 et a été publié, en partie du moins, par Bailly dans le volume des *Éphémérides* que La Caille avait calculées pour les années 1765-1774.

En 1742, Lemonnier donna en plusieurs parties un Catalogue d'étoiles zodiacales (au nombre d'environ 400), que l'on trouve imprimé dans les trois premiers Livres de ses *Observations,* publiées à Paris en 1751, 1754 et 1759. Vers la même époque, parurent le Catalogue de Mayer, comprenant les ascensions droites et déclinaisons de 998 étoiles zodiacales, celui de Zanotti, imprimé dans ses *Éphémérides* de Bologne, et le Catalogue de Cagnoli, publié dans les Mémoires de la Société italienne, Catalogue qui comprend les positions de 501 étoiles déduites de ses propres observations.

Au commencement de ce siècle, Le Français-Lalande fit paraître son *Histoire céleste française,* travail immense qui renferme les observations de 50 000 étoiles faites à Paris avec un grand quart de cercle de Bird; toutes les étoiles observées sont comprises entre la 1re et la 8^{e} grandeur inclusivement. En 1847, l'Association britannique a fait entreprendre la réduction de ces observations et a publié à ses frais un Catalogue qui comprend 47 390 positions réduites à l'année 1800.

En 1814, Piazzi entreprit de dresser un nouveau Catalogue d'étoiles, fondé sur les observations faites par lui à Palerme, de 1792 à 1813. Ce Catalogue, que les astronomes s'accordent à regarder comme le plus parfait de tous ceux qui ont été publiés, renferme les positions de 7646 étoiles réduites à l'époque 1800 et conclues chacune d'un grand nombre d'observations; elles sont toutes situées entre — 15° de déclinaison et le pôle. Une première édition de ce Catalogue, contenant 6748 positions seulement, parut en 1803 et fut couronnée par l'Académie des Sciences de Paris; la même récompense a été décernée à l'édition plus complète de 1814.

En 1806, de Zach publia un Catalogue de 1830 étoiles zodiacales, d'après les observations faites par lui au Seeberg, dans le duché de Saxe-Gotha.

Les observations faites par Bradley, de 1750 à 1762, ont été publiées par Bessel en 1818, et un Catalogue de 3112 étoiles en a été déduit; l'époque de ce Catalogue est l'équinoxe de 1750.

De 1821 à 1833, Bessel acheva une série de 75 011 observations sur la zone comprise entre le 15^{e} degré de déclinaison sud et le 45^{e} degré de déclinaison nord. Ces observations, qui comprennent toutes les étoiles jusqu'à la 9^{e} grandeur inclusivement, ont été réduites dernièrement par M. Weisse et rapportées à l'époque 1825.

En 1835, Th. Brisbane, directeur de l'Observatoire de Parmatta, dans la Nouvelle-Galles du Sud, a publié un Catalogue fondé sur les observations faites dans cet établissement depuis 1821 ; il comprend 7385 positions d'étoiles.

Le Catalogue de Groombridge, édité aux frais du gouvernement anglais, renferme les lieux de 4243 circompolaires réduites à janvier 1810; il a été dressé sur les observations faites de 1806 à 1816.

Le Catalogue de Santini contient environ 1740 étoiles situées entre 0° et + 10° de déclinaison et se rapporte à l'équinoxe de 1840. Les 2706 positions australes comprises entre — 10°8′ et — 12°30′ ont été réduites à l'équinoxe moyen de 1860.

Le Catalogue d'Armagh, réduit pour l'équinoxe moyen de 1840, contient 5345 étoiles de toutes déclinaisons.

De 1841 à 1844, Argelander a achevé une série de 26 425 observations comprises entre + 15° et + 80° de déclinaison, qu'il a réduites à l'époque 1842. Tout récemment, Argelander a complété son Catalogue en y ajoutant les lieux de 23 250 étoiles comprises entre — 15° et — 31° de déclinaison et rapportées à l'équinoxe moyen de 1850.

Le grand Catalogue de Bonn, dressé par Argelander, renferme 324 198 étoiles comprises entre — 2° et + 90° de déclinaison et est rapporté à l'époque 1855.

En 1844, Taylor publia un Catalogue de 11 015 étoiles, fondé sur les observations faites à Madras, de 1822 à 1843.

Le Catalogue publié en 1849 par M. Airy comprend 2156 positions d'étoiles déduites des observations faites à l'Observatoire de Greenwich, de 1836 à 1847.

Rümker a donné récemment un Catalogue qui renferme les lieux de plus de 12 000 étoiles observées avec le grand cercle méridien de l'Observatoire de Hambourg. C'est surtout en vue de rectifier et de compléter les grands Catalogues de L. Lalande et de Bessel que ce travail a été entrepris.

En 1838, Johnson, directeur du *Radcliffe Observatory*, conçut le projet de réobserver toutes les étoiles circompolaires du Catalogue de Groombridge et d'en accroître le nombre. Le Catalogue qu'il a publié renferme 6317 étoiles, c'est-à-dire 2074 étoiles de plus que le Catalogue de Groombridge; l'époque est l'équinoxe moyen de 1845.

Le Catalogue publié par l'Association britannique, en 1845, contient les lieux de 8377 étoiles; l'époque est l'équinoxe de 1850. On trouve dans ce Catalogue le mouvement propre, la variation séculaire, la précession annuelle, ainsi que les logarithmes constants qui servent au calcul de la précession, de l'aberration et de la nutation.

Le Catalogue de Ivan Fedorenko contient les positions moyennes des étoiles circompolaires, dont les observations ont été publiées par Lalande dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, de 1789 et 1790; il a paru à Saint-Pétersbourg en 1854 et se rapporte à l'année 1790.

Le Catalogue de Carrington comprend 3735 étoiles circompolaires et se rapporte à l'époque 1855; celui de Schjellerup renferme 10 000 étoiles comprises entre — 15° et + 15° de déclinaison et a été calculé pour l'équinoxe de 1865.

En 1852, Struve a publié un Catalogue composé en majeure partie d'étoiles doubles et qui comprend 2874 positions réduites à l'année 1830. C'est d'après les observations faites à Dorpat de 1832 à 1843 que ce précieux Catalogue a été construit.

Mentionnons encore un Catalogue zodiacal très exact, que l'on doit à M. M. Lœwy, le *Catalogue des étoiles de culmination lunaire et de longitude* dont la première partie a paru en 1877 dans le tome I des *Annales du Bureau des Longitudes.*

En construisant ce Catalogue, l'auteur a eu un double but. Il s'est proposé : 1° de conclure des positions d'étoiles permettant de déterminer avec le plus haut degré d'exactitude le mouvement lunaire; et 2° de fournir pour la détermination de l'heure dans les opérations de longitudes des ascensions droites possédant, toutes, la précision la plus élevée et la plus uniforme.

Ce Catalogue, dont l'achèvement touche à son terme, reposera sur environ 30 000 observations effectuées sur le même plan de 1869 à 1882, dans les Observatoires de Paris, de Montsouris, d'Alger et de Lyon; sur les résultats obtenus dans les opérations de longitudes faites par M. Lœwy ou sous son habile direction, ainsi que sur ceux obtenus par les officiers d'état-major sous les ordres de M. le colonel Perrier, pendant toute la série de leurs nombreuses déterminations de longitudes.

SECONDE SECTION.

NOTICES HISTORIQUES SUR LES PRINCIPAUX PHÉNOMÈNES DONT LA PRÉDICTION FAIT LE SUJET DES ÉPHÉMÉRIDES.

I.

Éclipses de Lune et de Soleil.

Il n'est pas de phénomène céleste qui ait excité plus vivement l'attention des hommes et frappé davantage leur imagination que celui des éclipses de Lune ou de Soleil. L'histoire de l'antiquité est pleine de récits qui attestent combien étaient grandes, chez les anciens, la superstition et la frayeur causées par ce curieux phénomène. Les éclipses de Soleil surtout les impressionnaient vivement. Quant aux éclipses de Lune, l'imagination poétique des Grecs en fit bientôt le sujet d'une églogue amoureuse : Diane éprise d'Endymion venait la nuit sous les traits de Phébé rendre visite à son amant dans la grotte du mont Latmos. On finit cependant par s'apercevoir que cette définition de la disparition de la Lune s'accordait mal avec la constance du phénomène, et l'on chercha ailleurs une autre explication de la cause des éclipses. On la trouva dans le prétendu charme que les sorcières passaient pour exercer sur la Lune. Ces magiciennes, par la force de leurs enchantements, faisaient descendre la Lune de son ciel et l'amenaient sur la Terre pour y opérer des maléfices, et l'on faisait alors, nous rapportent les auteurs anciens, un grand bruit pour que la Lune n'entendît pas les cris des sorcières. Les Romains, entre autres, avaient cette coutume assez bizarre : ils allumaient un grand nombre de torches et de flambeaux et les tenaient élevés vers le ciel comme pour rappeler à la lumière l'astre éclipsé. Quant aux autres peuples, leurs coutumes n'étaient pas moins singulières. Les Mexicains effrayés jeûnaient pendant tout le temps des éclipses, et leurs femmes elles-mêmes se maltraitaient le plus qu'elles pouvaient, pensant que la Lune avait été maltraitée par le Soleil dans une querelle de ménage. Les Indiens croyaient que c'était un dragon (râhu) qui voulait dévorer la Lune, et pendant que les uns se mettaient dans l'eau jusqu'au cou (ce qui est chez ce peuple le signe de la plus grande dévotion) pour supplier le monstre de ne pas dévorer l'astre des nuits, les autres poussaient de grands cris pour l'épouvanter et lui faire lâcher prise. Les Scandinaves avaient un mythe un peu différent de celui des Indiens, mais tout aussi extravagant : suivant eux, deux énormes loups, qu'ils appelaient Sköll et Hati, poursuivaient sans relâche le Soleil et la Lune, s'attachant, le premier, Sköll, au Soleil, et le second, Hati, à la Lune; les éclipses de Soleil et de Lune étaient alors attribuées aux prises de ces astres avec les loups persécuteurs.

On trouve dans les auteurs anciens le récit de plusieurs faits qui montrent le parti adroit qu'ont su tirer de la frayeur du peuple des hommes éclairés pour l'amener à servir leurs desseins dans telle ou telle occasion mémorable. Tite-Live rapporte que Sulpicius-Gallus, lieutenant de Paul-Émile, dans la guerre contre Persée, annonça une éclipse de Lune qui devait avoir lieu dans la nuit même qui précéda le jour où Paul-Émile défit Persée, et que par ce moyen il prévint la frayeur que cet événement imprévu n'aurait pas manqué de jeter parmi ses troupes. Drusus usa du même procédé pour apaiser une sédition violente qui s'était élevée dans son armée; et Alexandre, la veille de la bataille d'Arbelles, ne dut, paraît-il, qu'à son adresse et à sa fermeté de pouvoir calmer la terreur qui s'était jetée tout à coup dans son camp à la vue d'une simple éclipse de Lune. Aujourd'hui que la Science a fait d'assez rapides progrès pour permettre aux astronomes de prédire longtemps à l'avance le retour des éclipses, toute crainte puérile a disparu à ce sujet, et à la terreur supertitieuse d'autrefois a succédé un sentiment plus naturel, celui d'une vive et légitime curiosité (¹).

(¹) Il n'y a pas bien longtemps que l'on est revenu du sentiment de frayeur dont nous parlons. Fontenelle, dans ses *Entretiens sur la pluralité des mondes*, nous apprend que, sur la simple annonce de l'éclipse totale de Soleil qui eut lieu en 1654, un grand nombre d'habitants de Paris allèrent se réfugier au fond des caves;

Il faut remonter bien haut dans l'histoire du monde pour trouver la première connaissance du retour des éclipses. Si l'on en croit les historiens chinois, c'est plus de 2000 ans avant notre ère que la première éclipse aurait été observée à la Chine. On lit, en effet, dans les annales de ce peuple, que deux astronomes, Ho et Hi, furent condamnés à mort pour avoir négligé d'annoncer une éclipse de Soleil qui arriva vers l'équinoxe d'automne, en l'an 2155 avant notre ère. Ce fait, qui semblerait prouver non seulement que les Chinois ont connu la cause des éclipses à une époque quasi-diluvienne, mais encore qu'ils étaient en mesure d'en prédire avec quelque certitude le retour, a trouvé, nous devons le dire, de nombreux contradicteurs. Il est bien vrai qu'une éclipse de Soleil ait eu lieu vers l'équinoxe d'automne à la date susdite, mais il est douteux que l'observation ait pu en être faite à la Chine, vu l'époque reculée à laquelle la tradition chinoise place cet événement. Il est plus vraisemblable d'admettre que les Chinois, jaloux de leur antiquité fabuleuse et voulant en reculer encore les limites, auront calculé postérieurement cette éclipse et l'auront insérée dans leurs annales astronomiques. On donne d'ailleurs comme certain que cette prétendue négligence des astronomes chinois ne fut qu'un prétexte pour l'empereur Tchong-Kong de se débarrasser de deux personnages influents qui, élevés par lui au rang des plus hautes dignités, avaient trompé indignement sa confiance, en s'alliant avec des ennemis de l'Empire et en conspirant contre la sûreté de l'État.

---

et en 1764, l'éclipse annulaire du Soleil qui arriva le 1er avril, bien qu'annoncée longtemps à l'avance, jeta une telle perturbation dans les esprits que l'autorité crut utile de publier l'avis suivant, que l'on trouve inséré dans la *Gazette de France* du lundi 19 mars 1764 : « Les curés tant des villes que des campagnes sont invités à commencer plus tôt qu'à l'ordinaire l'office du quatrième dimanche du carême, à cause de l'éclipse totale de Soleil qui, sur les 10h du matin, ramènera les ténèbres de la nuit. Ils sont priés en même temps d'avertir le peuple que les éclipses n'ont sur nous aucune influence ni morale ni physique; qu'elles ne présagent et ne produisent ni stérilité ni contagion, ni guerre ni accidents funestes, et que ce sont des suites nécessaires du mouvement des corps célestes aussi naturelles que le lever et le coucher du Soleil ou de la Lune. » Cette éclipse, que la *Gazette de France* avait annoncée par erreur comme devant être totale, n'était qu'annulaire et ne devait point, en conséquence, ramener les « ténèbres de la nuit ». Malgré cela et la précaution que l'on prit d'en informer le public, elle ne laissa pas que d'effrayer beaucoup de monde.

Anaxagore, qui florissait vers l'an 500 avant notre ère, paraît être le premier qui ait écrit sur les éclipses et qui ait cherché à en expliquer la cause. Il paraît même que ses opinions, peu conformes à la Cosmogonie de son temps, lui attirèrent de la part des disciples de Socrate d'indignes persécutions, et que, comme Galilée, le célèbre philosophe ionien dut expier dans les fers la témérité d'avoir voulu interroger la Nature et lui arracher ses secrets. Hérodote nous rapporte bien que Thalès annonça aux Ioniens une éclipse de Soleil que Riccioli place à l'année 585 av. J.-C. (¹). Mais l'Astronomie était à cette époque trop peu avancée chez les Grecs pour que Thalès ait pu faire cette prédiction, autrement que par le moyen de la période chaldéenne de dix-huit ans et onze jours, qui ramène, comme on sait, les éclipses à peu près à la même époque. Pour rencontrer les premières notions du calcul des éclipses, il faut remonter jusqu'à Hipparque, et c'est dans l'*Almageste* qu'on les trouve. Ces règles ont été employées jusqu'au temps de Kepler, qui les a lui-même perfectionnées et qui s'en est servi le premier pour la détermination des longitudes terrestres. Depuis cette époque, la théorie des éclipses a fait de notables progrès, et de nos jours, grâce aux remarquables méthodes de Woolhouse et de Hansen, elle a atteint tout le degré d'exactitude désirable. Nous exposerons la première de ces méthodes, dans la troisième Partie de cet Ouvrage, lorsque nous entreprendrons d'expliquer par l'Analyse les principales circonstances du phénomène des éclipses.

(¹) C'est la fameuse éclipse totale du Soleil qui mit fin à la guerre des Mèdes et des Lydiens par la frayeur qu'elle causa aux deux armées engagées dans un combat. Comme nous l'avons dit dans le texte, Riccioli place cet événement à l'an 585 avant l'ère chrétienne, date qui a été adoptée par Kepler, Newton, Manfredi, et par d'autres astronomes. Mais certains chronologistes lui assignent une époque soit plus récente, soit plus ancienne, et le rapportent aux années — 581, — 583, — 597, — 601, etc. On sait aujourd'hui, par le calcul exact qu'ont permis des Tables récentes du Soleil et de la Lune, que cet événement a dû se passer en l'an 610 avant notre ère.

II.

Phénomène des marées.

Les plus grands géomètres des temps modernes, Descartes, Newton, Daniel Bernoulli, Euler, Maclaurin, d'Alembert se sont occupés du problème des marées, mais sans parvenir à en donner une solution satisfaisante. Kepler paraît être le premier qui ait cherché dans l'action attractive des astres l'explication de ce curieux phénomène; mais il appartenait à Newton d'en dévoiler la vraie cause, en le rattachant au principe de la gravitation universelle qu'il venait de découvrir. La théorie de ce grand géomètre parut, en 1687, dans son immortel Ouvrage des *Principes de la philosophie naturelle*. Un peu plus tard, en 1740, Daniel Bernoulli, Euler et Maclaurin tentèrent, par différents moyens, d'avancer la solution du problème, mais sans cependant ajouter beaucoup à ce qu'avait dit Newton avant eux. Enfin, en 1774, Laplace, aidé des importantes découvertes que l'on venait de faire dans le calcul aux différences partielles et dans la théorie du mouvement des fluides, reprit le problème des marées et parvint à le résoudre complètement dans le cas hypothétique d'une mer libre de toutes parts et également profonde. Bien que la théorie de Laplace soit loin de rendre compte exactement de tous les faits observés, on peut, néanmoins, la considérer comme un perfectionnement important apporté à la solution de ce problème, solution qui, de nos jours encore, revêt la forme analytique que lui a donnée l'illustre auteur de la *Mécanique céleste*.

Les anciens ont eu une connaissance assez exacte du phénomène des marées. Aristote, dans son Livre du *Monde,* dit que les marées sont réglées sur le mouvement de la Lune. Pline, dans son *Histoire naturelle,* en parle d'une manière encore plus explicite : « La cause des marées, dit ce naturaliste, provient du Soleil et de la Lune; les eaux se meuvent en obéissant à l'influence sidérale qui attire et soulève les mers. » Suivant Plutarque, Pythéas, de Marseille, serait le premier qui aurait remarqué le rapport qui existe entre le mouvement du flux et du reflux et celui de la Lune.

Il est certain que, dans son voyage vers le Nord, cet astronome dut, en parcourant les côtes de l'Océan septentrional, acquérir sur le phénomène des marées des notions bien supérieures à celles que possédaient ses contemporains et, en particulier, Aristote, qui ne s'était jamais éloigné de la Grèce et de l'Asie Mineure.

III.

Passages de Vénus et de Mercure sur le disque du Soleil.

Les planètes inférieures, Mercure et Vénus, dont les orbites sont renfermés dans celle de la Terre, nous présentent, lorsqu'elles passent entre le Soleil et la Terre, un phénomène analogue à celui des éclipses de Soleil et de Lune. On les voit alors traverser le disque du Soleil, d'orient en occident, et s'y projeter sous la forme d'une petite tache noire et parfaitement ronde. Pour que ce phénomène puisse avoir lieu, il faut évidemment que ces planètes soient en conjonction avec le Soleil et que, de plus, elles se trouvent très voisines de leurs nœuds ou dans l'écliptique; car, si leur latitude surpasse le demi-diamètre du Soleil, elles passent à côté de cet astre et l'occultation n'a pas lieu.

Kepler est le premier qui, en 1627, ait osé prédire les époques où Mercure et Vénus passeraient devant le disque du Soleil; mais ses Tables, dressées sur les observations de Tycho Brahé, n'étaient point encore assez exactes pour donner à ses prédictions un degré suffisant de certitude, et toutes ne se sont pas vérifiées. Ainsi, en 1629, il annonça un passage de Mercure pour le 7 novembre 1631, et deux passages de Vénus, l'un pour le 6 décembre de la même année 1631, l'autre pour le 6 juin 1761. Le passage de Vénus prédit pour 1631 n'eut pas lieu ou ne fut pas visible en Europe; les deux autres passages purent être observés aux époques prédites (¹).

C'est à Halley qu'on doit la théorie complète du phénomène qui nous occupe. Il l'a publiée dans les *Transactions philosophiques* de 1691 et dans les *Prælectiones astronomicæ* de Whiston, Traité

(¹) Le passage de Mercure du 7 novembre 1631 fut observé à Paris par Gassendi, qui fixa le moment de l'entrée à $5^h 28^m$ du matin; mais il attendit vainement celui de Vénus, annoncé pour le 6 décembre de la même année.

paru en 1707. On trouve dans ces Ouvrages les calculs faits par Halley de vingt-neuf passages futurs, soit de Mercure, soit de Vénus, passages dont quelques-uns n'ont pas eu ou ne pourront avoir lieu par suite d'une erreur commise dans la latitude. Halley y emploie les périodes de 8, de 235 et de 243 ans pour Vénus, et celles de 6, de 7, de 13, de 46 et de 265 ans pour Mercure, périodes qui ramènent, en effet, assez exactement les passages de ces astres sur le Soleil, et qui suffisent pour indiquer les années où il peut y en avoir. C'est encore à ce grand astronome que revient le mérite d'avoir signalé les conséquences que l'on pouvait tirer du passage de Vénus pour la détermination de la parallaxe solaire. La méthode de Halley, exposée d'une manière sommaire dans les *Transactions philosophiques* de 1691, reçut tous les développements convenables dans le Volume de ce Recueil publié en 1716.

IV.

Phénomènes relatifs aux disparitions de l'anneau de Saturne.

Les apparences si singulières que l'anneau de Saturne donne à la planète ont éveillé au plus haut degré l'attention des astronomes du XVII^e siècle et exercé pendant longtemps leur sagacité. Galilée, qui les observa le premier, se méprit étrangement sur leur véritable cause. Aidé d'une lunette d'une construction encore bien imparfaite, ce célèbre astronome crut voir aux extrémités de Saturne deux globes lumineux qu'il prit pour des satellites adhérents à la planète; son étonnement dut être grand lorsque, après deux années d'observation, il vit les deux prétendus satellites varier de forme, se séparer du corps de la planète et finalement disparaître pour apparaître quelques mois après. Bien qu'il fût impossible à Galilée de deviner la véritable cause de ces apparences, il osa néanmoins en prédire le retour et fut assez heureux sur ce point pour voir ses prédictions se réaliser.

L'explication de Galilée n'est pas la seule que l'on ait hasardée pour rendre compte des métamorphoses si bizarres que présente Saturne durant sa révolution. Roberval croyait que le phénomène dont nous parlons était causé par des vapeurs qui, s'élevant de l'équateur de la planète, réfléchissaient la lumière du Soleil. Dominique Cassini l'attribuait à un amas de satellites assez nombreux et assez proches les uns des autres pour donner à la figure de l'essaim la forme d'un anneau continu. Enfin d'autres astronomes pensaient que les aspects si variés de l'anneau pouvaient bien résulter de la figure même de Saturne vue plus ou moins obliquement de la Terre. Ce fut Huygens qui, le premier, parvint à découvrir la véritable cause du phénomène et à en établir la théorie, qu'il publia en 1659, à peu près telle qu'elle est admise de nos jours. Il fit voir que les apparences de l'anneau étaient dues à un corps plat et circulaire, concentrique, non adhérent à la planète et incliné sur le plan de l'écliptique d'un angle d'environ 23°. Depuis, on a reconnu que l'anneau tournait d'occident en orient autour de l'axe même de la planète en $10^h32^m15^s$ et que l'inclinaison de son plan sur celui de l'écliptique était d'environ 28°20′. Cette belle théorie d'Huygens ne fut pas admise, comme on le pense bien, sans contestations. Comme toutes les grandes découvertes, elle rencontra, en même temps que des panégyristes ardents, des détracteurs passionnés; mais elle ne tarda pas à être généralement admise et à recevoir de l'observation une confirmation directe.

Après avoir constaté la présence de l'anneau, on voulut en expliquer la formation. Maupertuis, dans son discours sur la figure des astres, pense que l'anneau a dû être formé par la queue d'une comète que Saturne aurait retenue dans sa sphère d'activité. Le noyau de la comète serait devenu satellite et la queue aurait formé l'anneau. De Mairan et Buffon s'accordent à peu près à dire que l'anneau a fait autrefois partie de la planète, et en est une sorte de désagrégation due à l'excès de la force centrifuge. On connaît l'opinion de Laplace sur ce point. L'illustre auteur de la *Mécanique céleste* regarde comme vraisemblable que les anneaux de Saturne sont des zones condensées, abandonnées par l'atmosphère de la planète et animées par la force centrifuge d'un mouvement de rotation autour de son axe.

TRAITÉ
D'ASTRONOMIE PRATIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

CORRECTION DES POSITIONS CÉLESTES.

CHAPITRE I.

DES COORDONNÉES ASTRONOMIQUES, DE LEUR TRANSFORMATION ET DE LEURS VARIATIONS DIFFÉRENTIELLES.

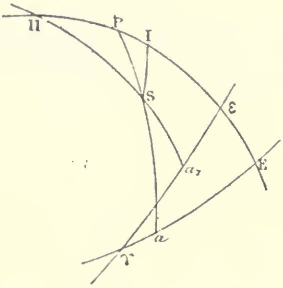
I. — Systèmes de coordonnées équatoriales et écliptiques. Transformation d'un système dans l'autre.

En Astronomie, on est convenu de rapporter la position des astres à des grands cercles de la sphère, qui sont ordinairement ceux déterminés par les plans de l'équateur et de l'écliptique, et les arcs menés perpendiculairement à ceux-ci par leurs pôles respectifs. De là deux systèmes distincts de coordonnées sphériques, également propres à la représentation du lieu d'un astre sur la sphère céleste, savoir les coordonnées dites *équatoriales* et celles dites *écliptiques*. Le premier système se rapporte à l'équateur et se compose de l'*ascension droite* et de la *déclinaison;* le second convient à l'écliptique et est représenté par la *longitude* et la *latitude*.

On passe de l'un de ces systèmes de coordonnées à l'autre en résolvant un triangle sphérique ayant pour sommets le pôle de l'équateur, celui de l'écliptique et l'astre considéré. En effet, soient (*fig.* 1)

$\Upsilon a E$ l'équateur;
$\Upsilon a_1 \varepsilon$ l'écliptique;
P, Π les pôles respectifs de ces cercles;
$\varepsilon \Upsilon E = \omega$ l'angle qui mesure l'inclinaison du plan de l'écliptique sur celui de l'équateur ou l'*obliquité de l'écliptique*.

Fig. 1.



Par les pôles P, Π et par l'astre S menons les arcs de grand cercle Pa, Πa_1, prolongés jusqu'à leur rencontre en a et a_1 avec les cercles de l'équateur et de l'écliptique; puis joignons ΠP. Dans le triangle ΠPS ainsi formé, on a

$$\Pi P = \omega, \quad PS = 90^\circ - \mathcal{D}, \quad \Pi S = 90^\circ - \lambda, \quad \Pi PS = 90^\circ + \mathcal{A}, \quad S\Pi P = 90^\circ - \mathcal{L},$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ désignant respectivement l'ascension droite et la déclinaison de l'astre, et $\mathcal{L}$ et λ sa longitude et sa latitude. Par l'application des équations fondamentales de la Trigonométrie sphérique, on a donc

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin\lambda &= \sin\mathcal{D}\cos\omega - \cos\mathcal{D}\sin\omega\sin\mathcal{A},\\ \cos\lambda\sin\mathcal{L} &= \sin\mathcal{D}\sin\omega + \cos\mathcal{D}\cos\omega\sin\mathcal{A},\\ \cos\lambda\cos\mathcal{L} &= \cos\mathcal{D}\cos\mathcal{A}.\end{aligned}\right.$$

Ces formules permettent d'opérer la transformation de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ en $\mathcal{L}$ et λ. Inversement on aurait

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin\mathcal{D} &= \sin\lambda\cos\omega + \cos\lambda\sin\omega\sin\mathcal{L},\\ \cos\mathcal{D}\sin\mathcal{A} &= \cos\lambda\cos\omega\sin\mathcal{L} - \sin\lambda\sin\omega,\\ \cos\mathcal{D}\cos\mathcal{A} &= \cos\lambda\cos\mathcal{L}.\end{aligned}\right.$$

Pour des astres situés dans le plan de l'écliptique, ce qui est le cas du Soleil lorsqu'on fait abstraction des actions perturbatrices provenant des planètes, on a $\lambda = 0$, et les formules (2) se réduisent à celles-ci

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\mathcal{AR} &= \cos\omega\operatorname{tang}\mathcal{L},\\ \sin\mathcal{D} &= \sin\omega\sin\mathcal{L}, \end{aligned}\right.$$

II. — Appropriation des formules précédentes au calcul logarithmique.

On rend les formules (1) et (2) calculables par logarithmes en leur faisant subir une transformation qui consiste à poser dans les premières

$$(1)\quad k\sin\varphi = \cos\mathcal{D}\sin\mathcal{AR},\quad k\cos\varphi = \sin\mathcal{D},\quad \text{d'où}\quad \operatorname{tang}\varphi = \cot\mathcal{D}\sin\mathcal{AR},$$

et dans les secondes

$$(2)\quad k\cos\varphi = \sin\lambda,\quad k\sin\varphi = \cos\lambda\sin\mathcal{L},\quad \text{d'où}\quad \operatorname{tang}\varphi = \cot\lambda\sin\mathcal{L}.$$

Par ces substitutions, on obtient en effet

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\lambda &= k\cos(\varphi+\omega), & \sin\mathcal{D} &= k\cos(\varphi-\omega),\\ \cos\lambda\sin\mathcal{L} &= k\sin(\varphi+\omega), & \cos\mathcal{D}\sin\mathcal{AR} &= k\sin(\varphi-\omega),\\ \cos\lambda\cos\mathcal{L} &= k\sin\varphi\cot\mathcal{AR}, & \cos\mathcal{D}\cos\mathcal{AR} &= k\cot\mathcal{L}\sin\varphi, \end{aligned}\right.$$

et de là on tire

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\mathcal{L} &= \frac{\sin(\varphi+\omega)}{\sin\varphi}\operatorname{tang}\mathcal{AR},\\ \operatorname{tang}\lambda &= \cot(\varphi+\omega)\sin\mathcal{L}, \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\mathcal{AR} &= \frac{\sin(\varphi-\omega)}{\sin\varphi}\operatorname{tang}\mathcal{L},\\ \operatorname{tang}\mathcal{D} &= \cot(\varphi-\omega)\sin\mathcal{AR} \quad (^1). \end{aligned}\right.$$

Comme vérification du calcul on peut adopter les relations sui-

---

(1) On est conduit aux relations (4) et (5) par des considérations géométriques fort simples. Abaissons du point S, lieu de l'astre, l'arc SI perpendiculaire sur HPE, et considérons les deux triangles SPH, SPI, triangles dans lesquels $HP = \omega$, $PS = 90° - \mathcal{D}$, $HS = 90° - \lambda$, $SPI = 90° - \mathcal{AR}$, $SHI = 90° - \mathcal{L}$. On a d'abord

$$\frac{\sin HI}{\sin PI} = \frac{\operatorname{tang} SPI}{\operatorname{tang} SHI},$$

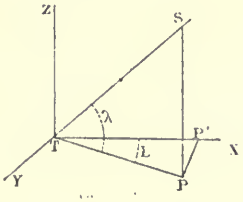
vantes, qui se déduisent de celles qui précèdent :

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin(\varphi+\omega)}{\sin\varphi} = \dfrac{\cos\lambda\,\sin\mathcal{L}}{\cos\mathcal{D}\,\sin\mathcal{A}}, \\[2ex] \dfrac{\sin(\varphi-\omega)}{\sin\varphi} = \dfrac{\cos\mathcal{D}\,\sin\mathcal{A}}{\cos\lambda\,\sin\mathcal{L}}. \end{cases}$$

III. — Transformation des coordonnées sphériques en coordonnées rectangles.

Il est souvent utile, en Astronomie, d'exprimer les coordonnées sphériques à l'aide d'un système d'axes rectangulaires dans lequel le centre de la Terre est pris pour origine des coordonnées, la ligne des équinoxes pour l'axe des x, celle des solstices pour l'axe des y et l'axe de l'écliptique pour celui des z. Soient alors (*fig.* 2) T le centre de la Terre et TX, TY, TZ les trois axes coordonnés dont

Fig. 2.



---

c'est-à-dire

$$\frac{\sin \mathrm{HI}}{\sin \mathrm{PI}} = \frac{\cot\mathcal{A}}{\cot\mathcal{L}} = \frac{\tang\mathcal{L}}{\tang\mathcal{A}};$$

on a ensuite

$$\cot \mathrm{HS} = \cot \mathrm{HI} \cos \mathrm{SHI}, \quad \cot \mathrm{PS} = \cot \mathrm{PI} \cos \mathrm{SPI}$$

d'où

$$\tang\lambda = \cot \mathrm{HI} \sin\mathcal{L}, \quad \tang\mathcal{D} = \cot \mathrm{PI} \sin\mathcal{A}.$$

Maintenant, si l'on suppose $\mathrm{PI} = \varphi$, auquel cas $\mathrm{HI} = \varphi + \omega$, on a

$$\tang\mathcal{L} = \frac{\sin(\varphi+\omega)}{\sin\varphi}\tang\mathcal{A}, \quad \tang\lambda = \cot(\varphi+\omega)\sin\mathcal{L}.$$

Si $\mathrm{HI} = \varphi$, on a $\mathrm{PI} = \varphi - \omega$, et les mêmes équations donnent

$$\tang\mathcal{A} = \frac{\sin(\varphi-\omega)}{\sin\varphi}\tang\mathcal{L}, \quad \tang\mathcal{D} = \cot(\varphi-\omega)\sin\mathcal{A}.$$

nous parlons. S étant un point quelconque de l'espace, abaissons de ce point SP perpendiculaire sur le plan XTY de l'écliptique et PP′ perpendiculaire sur TX. Les coordonnées de ce point par rapport aux axes TX, TY, TZ seront

$$X = TP', \quad Y = PP', \quad Z = SP,$$

et, en appelant L la longitude du point S ou l'angle XTP et Λ sa latitude ou l'angle STP, puis faisant $TS = R$, on aura, par les deux triangles rectangles STP et TPP′,

$$SP = R \sin \Lambda, \quad TP = R \cos \Lambda$$

et

$$TP' = TP \cos L = R \cos \Lambda \cos L,$$
$$PP' = TP \sin L = R \cos \Lambda \sin L.$$

Pour exprimer les coordonnées rectilignes X, Y, Z au moyen de celles sphériques L et Λ, on aura donc

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= R \cos \Lambda \cos L, \\ Y &= R \cos \Lambda \sin L, \\ Z &= R \sin \Lambda. \end{aligned} \right.$$

Tout cela se rapporte au plan de l'écliptique. Relativement au plan de l'équateur, il faudrait prendre pour axe des x la ligne des équinoxes, pour axe des z la ligne des pôles et pour axe des y une perpendiculaire à ces lignes. On serait ainsi conduit à remplacer, dans les formules (1), L et Λ respectivement par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$, et l'on aurait

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= R \cos \mathcal{D} \cos \mathcal{A}, \\ Y_1 &= R \cos \mathcal{D} \sin \mathcal{A}, \\ Z_1 &= R \sin \mathcal{D}. \end{aligned} \right.$$

On déduit de ces formules les suivantes, qui permettent d'opérer la transformation de L et Λ en X, Y, Z ou celle de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ en X_1, Y_1, Z_1 :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} R^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2, & R_1^2 &= X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2, \\ \operatorname{tang} L &= \frac{Y}{X}, & \operatorname{tang} \mathcal{A} &= \frac{Y_1}{X_1}, \\ \sin \Lambda &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, & \sin \mathcal{D} &= \frac{Z_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}. \end{aligned} \right.$$

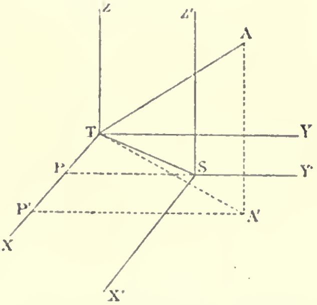
IV. — Coordonnées héliocentriques. — Passage des coordonnées héliocentriques aux coordonnées géocentriques, et inversement.

Soient (*fig.* 3)

T le centre de la Terre;
S celui du Soleil;
A le lieu d'un astre rapporté au centre de la Terre, à l'aide de ses *coordonnées géocentriques* L et λ.

On peut supposer mené par le centre du Soleil le plan de l'écliptique et rapporter la position de l'astre A à ce plan et à son intersection avec la sphère céleste. Les coordonnées qui en résultent portent le nom de *coordonnées héliocentriques* et sont représentées par la longitude v et par la latitude s. Or, le problème que l'on a à résoudre dans le calcul des éphémérides consiste précisément à déterminer L et λ lorsque v et s sont donnés; voici comment on y arrive.

Fig. 3.



Par le centre T de la Terre concevons trois axes rectangulaires TX, TY, TZ, menés respectivement suivant la ligne des équinoxes, celle des solstices et l'axe de l'écliptique, et par le centre S du Soleil soient pareillement trois axes rectangulaires SX', SY', SZ' menés parallèlement aux premiers; il est clair qu'on aura

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= R\cos L_{\odot},\\ Y &= R\sin L_{\odot},\\ Z &= R\sin \lambda_{\odot},\end{aligned}\right.$$

$L_\odot$ représentant la longitude du Soleil ou l'angle STX, et $\lambda_\odot$ sa latitude.

Cela posé, abaissons du lieu A de l'astre AA′ perpendiculaire sur le plan de l'écliptique XTY, et A′P′ perpendiculaire sur TX. En observant que

$$A'TX = L, \quad ATA' = \lambda, \quad A'SX' = v, \quad ASA' = s,$$

et posant $TA = \Delta$ et $SA = r$, on aura, pour les coordonnées x, y, z de A par rapport aux axes TX, TY, TZ,

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \Delta \cos\lambda \cos L, \\ y = \Delta \cos\lambda \sin L, \\ z = \Delta \sin\lambda, \end{cases}$$

et, pour les coordonnées x', y', z' du même astre relativement à SX′, SY′, SZ′,

$$(3) \qquad \begin{cases} x' = r \cos s \cos v, \\ y' = r \cos s \sin v, \\ z' = r \sin s. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$x = x' + X, \quad y = y' + Y, \quad z = z' + Z;$$

ainsi

$$(4) \qquad \begin{cases} \Delta \cos\lambda \cos L = r \cos s \cos v + R \cos L_\odot, \\ \Delta \cos\lambda \sin L = r \cos s \sin v + R \sin L_\odot, \\ \qquad \Delta \sin\lambda = r \sin s + R \sin\lambda_\odot, \end{cases}$$

formules au moyen desquelles il sera aisé d'obtenir L, λ et Δ lorsque r, v et s seront donnés, ou inversement.

V. — Variations différentielles des coordonnées équatoriales et écliptiques.

Supposons maintenant que l'ascension droite $\mathcal{A}$, la déclinaison $\mathcal{D}$, ainsi que l'obliquité ω, reçoivent de très petits accroissements représentés par $d\mathcal{A}$, $d\mathcal{D}$, $d\omega$, et proposons-nous de trouver les variations qui en résultent pour λ et $\mathcal{L}$.

Il ne s'agira évidemment, pour cela, que de différentier les expressions

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \sin A \cot B = \cot b \sin c - \cos c \cos A, \end{cases}$$

fournies par le triangle sphérique ayant ses trois sommets situés respectivement au pôle de l'équateur, à celui de l'écliptique et à l'astre considéré, puis de faire dans le résultat de la différentiation

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} a = 90^\circ - \lambda, & A = 90^\circ + \mathcal{A}, \\ b = 90^\circ - \mathcal{D}, & B = 90^\circ - \mathcal{L}, \\ c = \omega, & C = S. \end{array}\right.$$

Or, en différentiant de la sorte la première de ces formules, on a

$$\begin{aligned} \sin a\, da = {} & (\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A)\, db \\ & + (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A)\, dc \\ & + \sin b \sin c \sin A\, dA, \end{aligned}$$

et, comme

$$\begin{aligned} \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A &= \sin a \cos C, \\ \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A &= \sin a \cos B, \\ \sin b \sin c \sin A &= \sin a \sin c \sin B, \end{aligned}$$

il en résulte

$$da = \cos C\, db + \cos B\, dc + \sin c \sin B\, dA;$$

faisant donc la substitution indiquée, on obtient

$$(3)\qquad d\lambda = \cos S\, d\mathcal{D} - \sin \mathcal{L}\, d\omega - \cos \mathcal{D} \sin S\, d\mathcal{A}.$$

La seconde équation (1), traitée de la même manière, donne

$$\begin{aligned} & -\frac{\sin A}{\sin^2 B}\, dB + (\cot B \cos A - \sin A \cos c)\, dA \\ & = -\frac{\sin c}{\sin^2 b}\, db + (\cot b \cos c + \cos A \sin c)\, dc; \end{aligned}$$

à cause des relations

$$\begin{aligned} \cos C &= \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B, \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \end{aligned}$$

le multiplicateur de dA se réduit à $-\frac{\cos C}{\sin B}$, celui de dc devient égal à $\frac{\cos a}{\sin b}$, et, en multipliant par $\sin B$, on obtient

$$-\frac{\sin a}{\sin b}\, dB - \cos C\, dA = -\frac{\sin C}{\sin b}\, db + \frac{\cos a \sin B}{\sin b}\, dc,$$

relation d'où l'on tire

$$\sin a\, dB = \sin C\, db - \cos a \sin B\, dc - \sin b \cos C\, dA.$$

Par la substitution des valeurs (2), on a donc

$$(4) \qquad \cos\lambda\, d\mathcal{L} = \sin S\, d\mathcal{D} + \cos\mathcal{L} \sin\lambda\, d\omega + \cos\mathcal{D} \cos S\, d\mathcal{A}.$$

Ainsi, les formules (3) et (4) déterminent les variations de $\mathcal{L}$ et de λ d'après celles de $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ et ω.

Inversement, si $d\lambda$, $d\mathcal{L}$ et $d\omega$ étaient donnés, et qu'on voulût obtenir $d\mathcal{A}$ et $d\mathcal{D}$, on aurait

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cot A \sin B &= \cot a \sin c - \cos c \cos B, \end{aligned}$$

et, par un calcul semblable au précédent, on en déduirait

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\mathcal{D}\, d\mathcal{A} &= -\sin S\, d\lambda + \cos\lambda \cos S\, d\mathcal{L} - \cos\mathcal{A} \sin\mathcal{D}\, d\omega, \\ d\mathcal{D} &= \cos S\, d\lambda + \cos\lambda \sin S\, d\mathcal{L} + \sin\mathcal{A}\, d\omega. \end{aligned} \right.$$

Quant à l'angle S qui figure dans ces formules et que l'on nomme *angle de position*, il est déterminé à l'aide des relations suivantes :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\lambda \sin S &= \cos\mathcal{A} \sin\omega, \\ \cos\mathcal{D} \sin S &= \cos\mathcal{L} \sin\omega, \\ \cos\lambda \sin S &= \cos\omega \cos\mathcal{D} + \sin\omega \sin\mathcal{D} \sin\mathcal{A}, \\ \cos\mathcal{D} \cos S &= \cos\omega \cos\lambda - \sin\omega \sin\lambda \sin\mathcal{L}, \end{aligned} \right.$$

relations qui sont immédiatement fournies par le triangle ΠPS, formé par le pôle de l'équateur, celui de l'écliptique et l'astre S, lorsqu'on a égard aux équations (2) de ce paragraphe.

Les formules (3) du § I, qui expriment l'ascension droite et la déclinaison du Soleil, ont été obtenues en supposant nulle la latitude de cet astre, c'est-à-dire en faisant abstraction des forces perturbatrices provenant des diverses planètes. Lorsqu'on veut avoir égard à l'influence de cette latitude, il faut corriger les valeurs ci-dessus de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{D}$ de la très petite quantité représentée par les équations différentielles

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\mathcal{A}_{\odot} &= -\frac{\sin S}{\cos\mathcal{D}_{\odot}}\, d\lambda_{\odot}, \\ d\mathcal{D}_{\odot} &= \cos S\, d\lambda_{\odot}, \end{aligned} \right.$$

et l'angle S est alors fourni par les relations

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sin S = \sin\omega\cos\mathcal{A},\\ &\cos\mathcal{D}\cos S = \cos\omega,\end{aligned}\right.$$

que l'on déduit de celles (6), en y supposant $\lambda = 0$; dans ce cas, on a donc

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &d\mathcal{A}_{\odot} = -\frac{\cos\mathcal{A}_{\odot}\sin\omega}{\cos\mathcal{D}_{\odot}}\,d\lambda_{\odot},\\ &d\mathcal{D}_{\odot} = \frac{\cos\omega}{\cos\mathcal{D}_{\odot}}\,d\lambda_{\odot}.\end{aligned}\right.$$

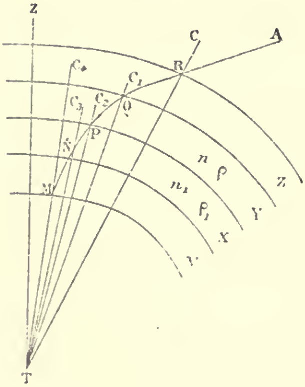
CHAPITRE II.

CALCUL DE LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE.

I. — Équation différentielle de la réfraction.

On peut regarder l'atmosphère comme composée d'une série de couches concentriques, homogènes, d'une épaisseur infiniment petite, dont la densité et par suite le pouvoir réfringent vont en augmentant progressivement, depuis la couche la plus éloignée jusqu'à celle qui touche le sol. Il en résulte que, lorsqu'un rayon lumineux AR (*fig.* 4) vient à la traverser, ce rayon, en passant d'une couche à l'autre, subit une série de déviations infiniment petites RQ, QP, PN, ..., qui le rapprochent successivement des normales TR, TQ, TP, ... menées par les points de contact R, Q, P, ... aux différents milieux de séparation, et le chemin parcouru par ce rayon lumineux à travers l'atmosphère est représenté par le polygone infinitésimal RQP..., lequel, à la limite, se con-

Fig. 4.



fond avec la courbe RQP... qui l'enveloppe. La réfraction astronomique est alors l'angle formé par le dernier côté MN du polygone infinitésimal avec la direction rectiligne AR que décrit le rayon lumineux avant d'arriver à l'atmosphère, ou, si l'on veut, c'est l'angle que forme la tangente à la trajectoire lumineuse en M avec cette même direction.

Nous allons, en supposant la Terre sphérique et considérant l'atmosphère comme composée de couches concentriques et homogènes, chercher l'expression de la déviation infiniment petite subie par le rayon AR ou l'équation différentielle de la trajectoire lumineuse.

Soient T le centre de la Terre et V, X, Y, Z les différentes couches qui composent l'atmosphère. Considérons deux quelconques de ces couches, celles Y, X par exemple, dont nous représenterons les densités par ρ et ρ_1. Désignons en outre par i et i_1 les angles d'incidence aux points P et N, par f et f_1 les angles de réfraction correspondants, par n l'indice de réfraction de la première couche, et par n_1 celui de la seconde couche; on aura

$$\frac{\sin i}{\sin f} = \frac{n}{n_1},$$

et comme, en représentant par P le pouvoir réfringent de l'atmosphère,

$$n = \sqrt{1 + P\rho_1}, \quad n_1 = \sqrt{1 + P\rho},$$

il viendra

$$\frac{\sin i}{\sin f} = \frac{\sqrt{1 + P\rho_1}}{\sqrt{1 + P\rho}}.$$

On a d'ailleurs, en désignant par r et r_1 les distances des points P et N au centre T de la Terre,

$$\frac{\sin f}{\sin i_1} = \frac{r_1}{r},$$

en sorte que

$$\frac{\sin i}{\sin i_1} = \frac{r_1\sqrt{1 + P\rho_1}}{r\sqrt{1 + P\rho}};$$

par conséquent,

$$r \sin i \sqrt{1 + P\rho} = r_1 \sin i_1 \sqrt{1 + P\rho_1}.$$

Ainsi, le produit $r \sin i \sqrt{1 + P\rho}$ reste constant quand on passe d'une couche à la suivante. Il en résulte que, si l'on désigne par r_0 le rayon de la Terre, par ρ_0 la densité de la couche d'air qui touche le sol et par $z = \text{ZMN}$ la distance zénithale apparente de l'étoile, on aura, pour déterminer $r \sin i \sqrt{1 + P\rho}$, l'équation

$$r \sin i \sqrt{1 + P\rho} = r_0 \sin z \sqrt{1 + P\rho_0}. \tag{a}$$

Biot, par des expériences répétées, a trouvé

$$\sqrt{1 + P\rho_0} = 1,0002942.$$

Supposons maintenant que la densité de l'atmosphère croisse par degrés insensibles, ce qui revient à considérer chaque couche comme infiniment mince et à remplacer le polygone RQPN... par la courbe qui l'enveloppe. En désignant par $d\zeta$ l'angle infiniment petit qui mesure la réfraction au point P, par $d\theta$ l'angle PTN et enfin par di l'angle $i - i_1$, on aura

$$d\zeta = i - \text{TPN}$$

ou, parce que $\text{TPN} = i_1 - d\theta$,

$$d\zeta = di + d\theta. \tag{1}$$

Cela posé, rapportons la courbe RQP... à des coordonnées polaires r et θ, en prenant TZ pour l'axe polaire; on aura évidemment

$$\operatorname{tang} i = \frac{r\,d\theta}{dr},$$

d'où

$$d\theta = \frac{\operatorname{tang} i}{r}\,dr, \tag{2}$$

et la formule (1) deviendra

$$d\zeta = di + \frac{\operatorname{tang} i}{r}\,dr = \frac{r \cos i\,di + \sin i\,dr}{r \cos i} = \frac{d(r \sin i)}{r \cos i}. \tag{3}$$

Mais de l'équation (a) on tire

$$r \sin i = \frac{r_0 \sin z \sqrt{1 + P\rho_0}}{\sqrt{1 + P\rho}}$$

et

$$r\cos i = \frac{r\sqrt{(1+\mathrm{P}\rho) - \frac{r_0^2}{r^2}(1+\mathrm{P}\rho_0)\sin^2 z}}{\sqrt{1+\mathrm{P}\rho}};$$

on a d'ailleurs

$$d(r\sin i) = -\frac{\mathrm{P}r_0\sin z\sqrt{1+\mathrm{P}\rho_0}}{2(1+\mathrm{P}\rho)^{\frac{3}{2}}}d\rho.$$

Donc enfin

$$(4)\qquad d\zeta = -\frac{\mathrm{P}\frac{r_0}{r}\sin z\sqrt{1+\mathrm{P}\rho_0}}{2(1+\mathrm{P}\rho)\sqrt{1+\mathrm{P}\rho-\frac{r_0^2}{r^2}(1+\mathrm{P}\rho_0)\sin^2 z}}d\rho.$$

C'est l'équation différentielle de la réfraction. En l'intégrant entre les limites $\rho = \rho_0$ et $\rho = 0$, on obtiendrait la valeur de la réfraction ou l'angle AMN, si la loi suivant laquelle la densité de l'air décroît avec la hauteur nous était connue. Cette loi étant inconnue, on est obligé d'avoir recours aux approximations. Laplace considère, dans ce cas, les deux limites de cette loi, qui sont une densité constante et une densité décroissante en progression géométrique quand la hauteur au-dessus du sol croît en progression arithmétique, ce qui suppose, comme nous le verrons bientôt, une température uniforme dans toute l'étendue de l'atmosphère. En ne considérant que ce dernier cas, soit

$$\frac{r_0}{r} = 1 - s, \qquad \alpha = \frac{\mathrm{P}\rho_0}{2(1+\mathrm{P}\rho_0)},$$

d'où

$$\mathrm{P} = \frac{2\alpha}{\rho_0(1-2\alpha)},$$

l'équation précédente (4) deviendra

$$d\zeta = -\frac{\frac{2\alpha}{\rho_0(1-2\alpha)}(1-s)\sin z\,\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha}}d\rho}{2\left(1+\frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{\alpha}{1-2\alpha}\right)\sqrt{1+\frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{2\alpha}{1-2\alpha}-\frac{(1-s)^2}{1-2\alpha}\sin^2 z}}$$

$$= -\frac{\alpha\frac{d\rho}{\rho_0}(1-s)\sin z}{1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\sqrt{\cos^2 z-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)+(2s-s^2)\sin^2 z}}.$$

et, en développant le radical en série, on aura

$$d\zeta = \frac{1}{1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)}$$

$$- \alpha \frac{d\rho}{\rho_0}(1 - s) \operatorname{tang} z \left\{ \left[1 + \alpha \frac{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}{\cos^2 z} - \left(s - \frac{s^2}{2}\right) \operatorname{tang}^2 z \right] \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} \left[\alpha \frac{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}{\cos^2 z} - \left(s - \frac{s^2}{2}\right) \operatorname{tang}^2 z \right]^2 - \ldots \right\},$$

ou bien, en négligeant les produits de trois dimensions de α et de s,

$$d\zeta = - \alpha \frac{d\rho}{\rho_0} \operatorname{tang} z \left[1 - \frac{s}{\cos^2 z} + \alpha \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \frac{2\cos^2 z + 1}{\cos^2 z} \right].$$

En intégrant cette expression depuis $\rho = \rho_0$ jusqu'à $\rho = 0$, c'est-à-dire depuis la surface de la Terre jusqu'à la limite supérieure de l'atmosphère, et remarquant qu'à cette dernière limite $s = 0$, on obtient

$$(2) \qquad \zeta = \alpha \operatorname{tang} z \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha(2\cos^2 z + 1)}{\cos^2 z} + \frac{1}{\cos^2 z} \int \frac{s\,d\rho}{\rho_0} \right].$$

Occupons-nous de déterminer l'intégrale $\int \frac{s\,d\rho}{\rho_0}$ qui figure au second membre de cette formule. On a

$$\int \frac{s\,d\rho}{\rho_0} = \frac{s\rho}{\rho_0} - \int \rho \frac{ds}{\rho_0}$$

et, en prenant les intégrales entre les limites précitées,

$$\int_{\rho_0}^{0} \frac{s\,d\rho}{\rho_0} = - \int_{\rho_0}^{0} \frac{\rho\,ds}{\rho_0},$$

car à la limite $\rho = 0$, $s = 1$ ou $r = \infty$. Ainsi, il s'agit d'obtenir $\int \frac{\rho\,ds}{\rho_0}$. Or, si l'on désigne par p la pression de l'air au point où g est la gravité, on aura, la pression diminuant à mesure que la hauteur augmente,

$$dp = - g\rho\,dr = - g \frac{r^2}{r_0} \rho\,ds \quad (^1).$$

---

(1) Car la variation que subit p lorsqu'on s'élève de la couche de rayon r à celle de rayon $r + dr$ est évidemment égale au produit de la petite colonne d'air $\rho\,dr$ par

D'ailleurs, g_0 étant la pesanteur à la surface de la Terre, on a

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{r^2};$$

on a donc

$$(5) \qquad p = -g_0 r_0 \int \rho \, ds.$$

Ainsi, l'intégrale $\int \rho \, ds$ est égale à la pression entière p_0 à la surface de la Terre, divisée par $g_0 r_0$. Cherchons la valeur de cette pression p_0 en fonction de la hauteur l de l'atmosphère, dans l'hypothèse d'une température uniforme.

On a, p étant la pression de l'air qui correspond à la densité ρ et p_0 celle qui répond à ρ_0,

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \text{d'où} \quad p = p_0 \frac{\rho}{\rho_0},$$

et, d'après ce qui précède,

$$dp = -g_0 \frac{r_0^2}{r^2} \rho \, dr;$$

ainsi

$$p_0 \frac{d\rho}{\rho_0} = g_0 r_0 \rho \, d\frac{r_0}{r}.$$

Par l'intégration, on obtient

$$\log \rho = \frac{g_0 r_0 \rho_0}{p_0} \frac{r_0}{r} + C,$$

C étant une constante que nous déterminerons par la condition

$$r_0 = r \quad \text{ou} \quad \rho = \rho_0,$$

ce qui donne

$$\log \rho_0 = \frac{g_0 r_0 \rho_0}{p_0} + C,$$

et par suite

$$C = \log \rho_0 - \frac{g_0 r_0 \rho_0}{p_0}.$$

---

sa gravité g, produit qui doit être affecté du signe —, puisque p diminue à mesure que r augmente. On lui donne la seconde forme indiquée dans le texte, en remarquant que l'on a

$$\frac{r_0}{r} = 1 - s, \quad \text{d'où} \quad \frac{ds}{dr} = \frac{r_0}{r^2}.$$

Nous aurons donc

$$\log \rho = \frac{g_0 \rho_0 r_0}{p_0}\left(\frac{r_0}{r} - 1\right) + \log \rho_0,$$

et, en passant aux nombres,

$$(6) \qquad \rho = \rho_0 e^{\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)\frac{g_0 \rho_0 r_0}{p_0}};$$

e est ici la base des logarithmes népériens.

Si l'on remarque que, l étant la hauteur d'une colonne d'air de densité ρ et qui, animée de la pesanteur g, fait équilibre à p_0, on a

$$(7) \qquad p_0 = g_0 \rho_0 l,$$

il viendra, pour déterminer ρ,

$$(8) \qquad \rho = \rho_0 e^{-\frac{r_0 s}{l}},$$

équation qui montre que, dans le cas d'une température uniforme, la densité décroît en progression géométrique quand la hauteur croît en progression arithmétique, ce qui est le résultat que nous avons énoncé plus haut.

Maintenant, on déduit des équations (5) et (7)

$$(9) \qquad \int \frac{\rho\, ds}{\rho_0} = \frac{l}{r_0},$$

et, par suite, l'équation (α) devient

$$(10) \qquad \zeta = \alpha \operatorname{tang} z \frac{1 + \frac{\alpha}{2}(1 + 2\cos^2 z) - \frac{l}{r_0}}{\cos^2 z}$$

ou

$$(11) \qquad \zeta = \alpha \operatorname{tang} z + \frac{\alpha}{2}\,\frac{1 + 2\cos^2 z}{\cos^2 z} \operatorname{tang} z - \alpha \frac{l}{r_0}\,\frac{\operatorname{tang} z}{\cos^2 z}.$$

Cette formule ne suppose nullement, comme on voit, qu'on ait connaissance de la loi suivant laquelle varie la densité de l'atmosphère, ce qui la rend très précieuse; elle ne dépend simplement que de ρ_0 et de l, qui sont donnés par les observations barométriques et thermométriques dans le lieu où l'on observe. Laplace s'est assuré qu'elle ne cesse pas d'être exacte pour des distances zénithales apparentes plus petites que 74°.

En remplaçant dans cette expression $\cos^2 z$ par $\frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 z}$, on peut lui donner la forme suivante :

$$(12) \qquad \zeta = \alpha \operatorname{tang} z \left[1 + \frac{\alpha}{2}(3 + \operatorname{tang}^2 z) - \frac{l}{r_0}(1 + \operatorname{tang}^2 z) \right].$$

Pour les applications, il convient d'écrire

$$(13) \qquad \zeta = \frac{\alpha}{\sin 1''}\left(1 + \tfrac{3}{2}\alpha - \frac{l}{r_0}\right) \operatorname{tang} z + \frac{\alpha}{\sin 1''}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{l}{r_0}\right) \operatorname{tang}^3 z.$$

II. — Détermination numérique des constantes qui entrent dans l'expression précédente de ζ.

Il nous reste maintenant à déterminer les valeurs numériques des constantes qui entrent dans cette formule, c'est-à-dire α et $\frac{l}{r_0}$. Or c'est ce que nous allons faire, en supposant la température égale à 0° et la pression atmosphérique égale à $0^{\text{m}},760$.

Soient donc, dans cette hypothèse, ρ_m et ρ_0 les densités du mercure et de l'air. On sait, d'après les expériences de Biot et Arago, faites à Paris, que

$$\frac{\rho_m}{\rho_0} = 10473,04.$$

Soit l la hauteur d'une colonne d'air dont la densité est ρ_0; on a

$$\frac{l}{0,760} = \frac{\rho_m}{\rho_0},$$

et par suite

$$l = 7960^{\text{m}}.$$

Laplace, par un grand nombre d'observations barométriques faites sur les hauteurs des montagnes, a trouvé

$$l = 7974^{\text{m}};$$

c'est la valeur que nous adopterons.

D'après cela, et en remarquant que

$$r_0 = 6366198^{\text{m}},$$

on obtient

$$\frac{l}{r_0} = 0,001252553.$$

Quant à α, qui est ce qu'on nomme la *constante de la réfraction,* Delambre, par la comparaison d'un très grand nombre d'observations de circompolaires, faites à leur plus grande et à leur plus petite hauteur, a trouvé

$$\alpha = 0,000293876.$$

En portant ces valeurs de α et de $\frac{l}{r_0}$ dans l'expression précédente de ζ, on obtient pour la formule de la réfraction, réduite en nombres,

$$\zeta = 60'', 56706 \operatorname{tang} z - 0'', 067018 \operatorname{tang}^3 z. \tag{14}$$

III. — Cas des réfractions voisines de l'horizon.

L'expression (14), fort commode pour les applications, ne convient nullement aux réfractions voisines de l'horizon. Mais, pour ce cas particulier, il existe une formule très simple due à Laplace et que nous allons faire connaître.

On a, par le § I,

$$d\zeta = -\frac{\alpha \frac{d\rho}{\rho_0}(1-s)\sin z}{1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)+(2s-s^2)\sin^2 z}},$$

et, comme s et α sont de très petites fractions, on peut d'abord négliger s devant 1 et $2s\cos^2 z$ devant $\cos^2 z$; on peut, de plus, remplacer le facteur $1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)$ par la moyenne arithmétique de ses deux valeurs extrêmes 1 et $1-2\alpha$, c'est-à-dire par $1-\alpha$, ce qui réduit l'équation précédente à la suivante

$$d\zeta = -\frac{\alpha \frac{d\rho}{\rho_0}\sin z}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)+2s}}.$$

Soient maintenant

$$s - \alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right) = u \quad \text{et} \quad \rho = \rho_0\left(1+\frac{fu}{f'}\right)e^{-u}, \tag{1}$$

f et f' étant deux constantes indéterminées; il en résultera

$$d\zeta = \frac{\alpha \frac{du}{f'}\left(1 - f + \frac{fu}{f'}\right) e^{-\frac{u}{f'}} \sin z}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z + 2u}},$$

et, si l'on pose encore

$$\cos^2 z + 2u = 2f't^2,$$

on aura

$$d\zeta = \frac{\alpha \sin z}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{f'}}\left(1 - f - \frac{f\cos^2 z}{2f'} + ft^2\right) e^{\frac{\cos^2 z}{2f'} - t^2}\, dt,$$

expression dont l'intégrale, prise depuis $t = \frac{\cos z}{\sqrt{2f'}}$ jusqu'à $t = \infty$, est

$$(2) \qquad \zeta = \frac{\alpha \sin z}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{f'}}\left(1 - \frac{f}{2} - ft'^2\right)\psi(t') + \frac{\alpha f \sin 2z}{4(1-\alpha)f'}.$$

Nous supposons ici

$$(3) \qquad \frac{\cos z}{\sqrt{2f'}} = t' \quad \text{et} \quad \int_{t'}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = e^{-t'^2}\psi(t').$$

Dans le cas de la réfraction horizontale, on a $\cos z = 0$, $\sin z = 1$, $\sin 2z = 0$ et

$$\psi(t') = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad (1).$$

Donc, dans ce cas,

$$(4) \qquad \zeta = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{2f'}}\left(1 - \frac{f}{2}\right).$$

Déterminons actuellement l'expression de p dans le cas qui nous occupe. On a, par ce qui précède,

$$dp = -g_0 r_0 \rho\, ds,$$

et, en substituant pour s et ρ leurs valeurs (1), puis divisant les deux membres de l'équation résultante par $p_0 = g_0 \rho_0 l$, on trouve

$$\frac{dp}{p_0} = -\frac{r_0}{l}\left(1 + \frac{f}{f'}u\right) e^{-\frac{u}{f'}}\, du + \alpha \frac{r_0}{l}\frac{\rho}{\rho_0^2}\, d\rho;$$

---

(1) Voyez pour la détermination de cette intégrale les Ouvrages qui traitent du *Calcul intégral*.

de là résulte

$$\frac{p}{p_0} = \frac{r_0 f'}{l}\left(1 + \frac{fu}{f'}\right) e^{-\frac{u}{f'}} + f\frac{r_0 f'}{l} e^{-\frac{u}{f'}} + \frac{\alpha}{2}\frac{r_0}{l}\frac{\rho^2}{\rho_0^2}.$$

Si l'on observe qu'à la surface de la Terre $p = p_0$, $\rho = \rho_0$ et $u = 0$, on réduira cette équation à celle-ci

$$(5) \qquad f'(1+f) = \frac{l}{r_0} - \frac{\alpha}{2},$$

et, si l'on tire de cette dernière la valeur de f pour la porter dans celle (4), on obtiendra

$$(\alpha) \qquad \zeta^2(1-\alpha)^2\, 8 f'^3 = \alpha^2 \pi \left(3f' - \frac{l}{r_0} + \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Maintenant, si l'on fait avec Laplace

$$\begin{aligned} \zeta &= 0{,}01021018, \\ \alpha &= 0{,}000293876, \\ r_0 &= 6366198^{\text{m}}, \\ l &= 7974^{\text{m}}, \end{aligned}$$

puis qu'on substitue ces valeurs dans l'équation (α), qui est du troisième degré et appartient au cas irréductible, on aura

$$\begin{aligned} f' &= 0{,}000741816, \\ f &= 0{,}4904167. \end{aligned}$$

Introduisant ces constantes dans les équations (2) et (3), on aura enfin

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \zeta &= 2790{,}157(0{,}7547916 - 0{,}4904167\, t'^2) \\ &\quad \times \sin z \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{t'^2} \int_{t'}^{\infty} e^{-t^2} dt + 10021'',343 \sin 2z, \end{aligned} \right.$$

où $t' = 25{,}961924 \cos z$ (¹).

Si l'on voulait adopter pour l la valeur $7993{,}15$ telle qu'elle résulte des recherches de Regnault sur le rapport des densités de l'air et du mercure, il faudrait prendre

$$\begin{aligned} f' &= 0{,}0007459314, \\ f &= 0{,}4862269, \end{aligned}$$

(¹) A $z = 60°$, la formule (14) du § II s'accorde avec la formule (6), à moins de $0'',005$. C'est donc à partir de cette limite qu'il convient d'appliquer la formule (6).

et l'on aurait alors

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \zeta &= 2782'',450(0,7568866 - 0,4862269\,t'^2) \\ &\quad\times \sin z \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{t'^2}\int_{t'}^{\infty} e^{-t^2}\,dt + 9880'',912 \sin 2z, \end{aligned}\right.$$

avec $t' = 25,89021 \cos z$. Mais les réfractions ainsi calculées ne différeraient pas sensiblement de celles obtenues par la formule (6), comme on peut le reconnaître en consultant le Tableau suivant :

z.	(6)-(7).	z.	(6)-(7).
80°. 0'....	+ 0",03	88°.50'.....	+ 0",62
84. 0....	+ 0,10	89. 0.....	+ 0,62
84.30....	+ 0,12	89.30.....	+ 0,53
86. 0....	+ 0,21	89.40.....	+ 0,43
87. 0....	+ 0,32	89.50.....	+ 0,25
88. 0....	+ 0,49	90. 0.....	− 0,01

IV. — Correction pour un état quelconque de l'atmosphère.

Les formules (6) et (7) qui précèdent se rapportent au cas où la température de l'air est 0° et la pression barométrique égale à $0^{\text{m}},760$. Pour passer de ce cas à celui où l'état de l'atmosphère est quelconque, il nous suffira d'avoir recours à la formule (11) du § I, savoir

$$(1)\qquad \zeta = \alpha \operatorname{tang} z + \frac{\alpha}{2}\,\frac{1 + 2\cos^2 z}{\cos^4 z} \operatorname{tang} z - \alpha \frac{l}{r_0}\,\frac{\operatorname{tang} z}{\cos^2 z},$$

et, bien que cette formule ne soit guère applicable, comme nous l'avons déjà fait remarquer, au cas des réfractions voisines de l'horizon, elle va pouvoir cependant nous servir pour étudier les variations que subissent les réfractions lorsque l'état de l'atmosphère vient à changer.

Soient v le volume d'une masse d'air à la température 0° et sous la pression barométrique $0^{\text{m}},760$; v' le volume de la même masse à la température t et sous la pression h ; représentons en outre par m le coefficient de la dilatation de l'air, trouvé par Regnault égal à 0,003655, et par n celui du mercure, égal, d'après les expériences de Lavoisier, à 0,00018018. On sait que le volume d'air v', ramené à la température 0°, a pour expression

$$\frac{v}{1+mt},$$

et que la hauteur barométrique h est

$$\frac{h}{1+nt}.$$

Par l'application d'un principe bien connu de Physique, on aura donc

$$\frac{v}{v'} = \frac{h}{0,760}\,\frac{1}{(1+mt)(1+nt)}$$

ou bien

$$\frac{v}{v'} = \gamma_1 \varepsilon,$$

en posant

$$\gamma_1 = \frac{h}{0,700}, \quad \varepsilon = \frac{1}{(1+mt)(1+nt)};$$

γ_1 est ce qu'on nomme le *facteur barométrique* et ε le *facteur thermométrique*.

Quant à la valeur de l, il est évident qu'elle ne change point avec les hauteurs du baromètre lorsque la température reste la même; mais, quand la température vient à changer, alors l est inversement proportionnel à ρ_0, et l'on a, en désignant par l' ce que devient l dans ce cas,

$$l' = l(1+mt).$$

Il résulte de ce qui précède que l'on peut mettre l'équation précédente (1) sous la forme

$$\zeta_{(t)} = \alpha\gamma_1\varepsilon \operatorname{tang} z + \frac{\alpha^2}{2}\gamma_1^2\varepsilon^2 \frac{1+2\cos^2 z}{\cos^2 z} \operatorname{tang} z - \frac{\alpha\gamma_1}{1+nt}\,\frac{l}{r_0}\,\frac{\operatorname{tang} z}{\cos^2 z}$$

ou sous celle-ci

$$\zeta_{(t)} = \zeta_0\gamma_1\varepsilon + \frac{\alpha}{\sin 1''}\gamma_1\varepsilon\left[\frac{\alpha}{2}(\gamma_1\varepsilon - 1) - \frac{l}{r_0}\,mt\right]\frac{\operatorname{tang} z}{\cos^2 z} + \frac{\alpha^2}{\sin 1''}\gamma_1\varepsilon(\gamma_1\varepsilon - 1)\operatorname{tang}^3 z,$$

en introduisant la valeur (13) de ζ donnée au § I.

Tant que z reste inférieur à 85°, le dernier terme

$$\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\gamma_1\varepsilon(\gamma_1\varepsilon - 1)\operatorname{tang}^3 z$$

ne surpasse pas 0″,01, mais le second peut atteindre quelques secondes. Pour $z > 72°$, ou $z > 74°$, tous les termes, à l'exception du premier, sont négligeables; donc, dans ce cas, on peut écrire

$$\zeta_{(t)} = \zeta_{(0)}\,\varepsilon\eta_1 = \zeta_{(0)}\,\frac{h}{0^{\text{m}},760\,(1+mt)(1+nt)}.$$

Actuellement, soit $\zeta_{(10)}$ la réfraction moyenne des Tables, c'est-à-dire celle qui répond à $t = 10°$ et $h = 0^{\text{m}},760$; on aura

$$\zeta_{(10)} = \frac{\zeta_{(0)}}{(1+10m)(1+10n)}, \tag{2}$$

et par suite, pour la réfraction qui répond réellement à l'état quelconque de l'atmosphère,

$$\zeta_{(t)} = \zeta_{(10)}\,\frac{h}{0,760}\,\frac{(1+10m)(1+10n)}{(1+mt)(1+nt)}. \tag{3}$$

C'est sur ces formules que les Tables I et II que publie chaque année la *Connaissance des Temps* ont été calculées. La Table I donne les réfractions moyennes $\zeta_{(10)}$ de dix en dix minutes pour toutes les hauteurs apparentes comprises entre 0° et 90°, et celle II fait connaître les deux facteurs par lesquels on doit multiplier la réfraction moyenne pour avoir la réfraction qui répond réellement à la pression barométrique et à la température de l'air au moment de l'observation. Voici du reste quelques exemples de l'application de ces Tables:

I. On a observé une étoile à la hauteur $3°45'18'' = 3°45',3$ avec $t = +9°25'$ et $h = 0^{\text{m}},741$.

TABLE I.

Pour 3°.40′........	12′.35″,90
» 0. 5........	− 12,10
» 0. 0.0″,3....	− 0,73
Réfract. moyenne..	12.23,07 = 743″,07
Produit par 0,02.	− 14″,86
» −0,002	− 1″,49
Réfract. corrigée..	12′6″,72

TABLE II.

Avec $h = 0^{\text{m}},741$ facteur.	0,975
Avec $t + 925$ facteur...	1.003
Produit des facteurs.	0,978
ou	1 − 0,022

II. La même étoile a été observée à $3°44'40''$ avec $t = +8°,125$ et $h = 0,766$.

TABLE I.

Pour $3°.40'$........	$12'.35'',60$
» 0. 4........	$-\ 9,72$
$40'' = 0,67$........	$-\ 1,62$
	$12.24,26 = 744'',26$
Produit par $+0,01$.	$+\ 7'',44$
» $+0,005$	$+\ 3'',72$
Réfract. corrigée..	$12'35'',4$

TABLE II.

Avec $h = 0^m,766$ facteur.	1,008
Avec $t = +8°,125$ fact..	1,007
Produit..........	1,015

NOTES ADDITIONNELLES AU CHAPITRE II.

I.

DISCUSSION DES RACINES DE L'ÉQUATION (α) (PAGE 21).

Dans un Mémoire sur les réfractions inséré parmi ceux de l'Académie des Sciences de Turin (t. XXVII, année 1822), Plana a recherché et trouvé les raisons qui ont fait adopter à Laplace la valeur $f' = 0,000741816$. Nous allons les rapporter ici, en renvoyant pour le détail du calcul au Mémoire même du savant géomètre italien.

En mettant l'équation proposée sous la forme

$$\zeta^2(1-\alpha)^2.\,8f'^3 - 9\alpha^2\pi f'^2 + 6\alpha^2\pi\left(\frac{l}{r_0} - \frac{\alpha}{2}\right)f' - \alpha^2\pi\left(\frac{l}{r_0} - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 0$$

et posant

$$(1)\qquad x = \frac{9\alpha^2\pi}{8(1-\alpha)^2\zeta^2},\quad y = \frac{6\alpha^2\pi\left(\frac{l}{r_0} - \frac{\alpha}{2}\right)}{8(1-\alpha)^2\zeta^2},\quad z = \frac{\alpha^2\pi\left(\frac{l}{r_0} - \frac{\alpha}{2}\right)^2}{8(1-\alpha^2)\zeta^2},$$

on obtient

$$(2)\qquad f'^3 - xf'^2 + yf' - z = 0.$$

Soient

$$(3)\qquad f' = f'_1 + \tfrac{1}{3}x,\quad p = \frac{x^2 - 3y}{3},\quad q = \frac{27z + 2x^3 - 9xy}{27};$$

alors on pourra écrire

$$f_1'^3 - pf_1' - q = 0, \tag{4}$$

équation qui, étant résolue par l'emploi des fonctions trigonométriques, donne, en adoptant les nombres de Laplace,

$$f' = +0,001906483, \quad f' = +0,000741829, \quad f' = +0,000281350.$$

On a par suite, en vertu de l'équation (5) du texte,

$$f = -0,420077, \quad f = +0,490390, \quad f = -2,929670.$$

Considérons les premières valeurs de f' et f, savoir

$$f' = +0,001906483, \quad f = -0,420077;$$

en les substituant dans l'équation (1) du § III, on obtient

$$\frac{\rho}{\rho_0} = (1 - u.220,341)e^{-u.524,520}.$$

et, comme à la limite de l'atmosphère ρ est nul, on voit qu'à cette limite u doit être égal à 0,004538424. Mais, pour cette valeur de u, $s = (u + \alpha) = 0,0048323$, quantité évidemment trop faible, puisqu'en prenant $r_0 = 6366198^m$ on aurait seulement $r_0 s = 30763^m$ pour la hauteur de l'atmosphère, ce qui est inadmissible. Donc la première valeur de f' ne saurait convenir à l'équation proposée.

Il en est de même des troisièmes valeurs de f' et f, qui, substituées dans l'expression (4) de la réfraction horizontale, rendent négative la valeur de ζ. Donc la seule racine admissible est

$$f' = +0,000741816,$$

comme l'a reconnu Laplace au Chapitre I du Livre X de la *Mécanique céleste*.

II.

Développement en série de l'intégrale $\int_{t'}^{\infty} e^{-t^2}dt$ (page 22).

Le développement en série de l'intégrale $\int_{t'}^{\infty} e^{-t^2}dt$, de laquelle dépend le calcul de la réfraction dans le cas des petites hauteurs, peut s'obtenir facilement à l'aide d'une intégration par parties.

On a, en effet,

$$\int e^{-t^2}dt = \int \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)\frac{1}{t},$$

et, par l'intégration du second membre,

$$\int e^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}\frac{e^{-t^2}}{t} - \frac{1}{2}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^2}.$$

On a de même

$$-\frac{1}{2}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)\frac{1}{t^3},$$

et, par suite,

$$-\frac{1}{2}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^2} = +\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{e^{-t^2}}{t^3} + \frac{1}{2}\frac{3}{2}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^4}.$$

En général, on a

$$\int e^{-t^2}dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left[1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{(2t^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2t^2)^3} + \frac{1.3.5.7}{(2t^2)^4} - \ldots\right],$$

et, en effectuant l'intégration entre les limites $t = t'$ et $t = \infty$,

$$(a)\quad \int_{t'}^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{e^{-t'^2}}{2t'}\left[1 - \frac{1}{2t'^2} + \frac{1.3}{(2t'^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2t'^2)^3} + \frac{1.3.5.7}{(2t'^2)^4} - \ldots\right].$$

Le reste de cette série est

$$R = \mp\frac{1.3.5.7(2n+1)}{2^{n+1}}\int_{t'}^{\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{t^{2n+2}},$$

et ce reste est toujours plus petit que le terme qui le précède immédiatement.

En effet, $e^{-t'^2}$ étant la plus grande valeur que puisse acquérir e^{-t^2} entre les limites $t = t'$ et $t = \infty$, on a

$$\int_{t'}^{\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{t^{2n+2}} < e^{-t'^2}\int_{t'}^{\infty}\frac{dt}{t^{2n+2}},$$

c'est-à-dire

$$\int_{t'} e^{-t^2}\frac{dt}{t^{2n+2}} < e^{-t'^2}\frac{1}{2n+1}\frac{1}{t'^{2n+1}}.$$

Ainsi

$$R < \mp\frac{1.3.5.7(2n-1)}{2^{n+1}t'^{2n+1}}e^{-t'^2}.$$

Mais le second terme de cette inégalité, pris avec un signe contraire, est précisément celui qui précède R dans le développement (a). Donc ce reste R est toujours inférieur au terme qui le précède.

Ainsi, bien que la série (a) soit divergente (ce qui est évident à la seule inspection de ses termes), elle n'en est pas moins propre à faire connaître, avec une certaine exactitude, la valeur de la transcendante $\int_t^\infty e^{-t^2}dt$. Il suffira, en effet, lorsqu'on voudra faire cette application, de pousser le calcul jusqu'au terme le plus petit et de s'arrêter à ce terme; l'erreur commise sera alors moindre que cette dernière quantité.

* * *

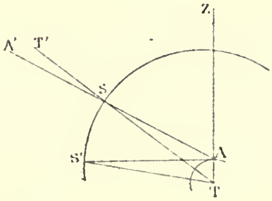
CHAPITRE III.

CALCUL DES PARALLAXES.

I. — Expression de la parallaxe de hauteur en fonction de la parallaxe horizontale et de la distance zénithale vraie ou apparente.

On sait que la *parallaxe* d'un astre est l'angle sous lequel un observateur placé au centre de l'astre verrait le rayon de la Terre; c'est aussi la différence entre sa distance zénithale apparente et sa distance zénithale vraie. On nomme *parallaxe de hauteur* celle qui se rapporte à une position quelconque de l'astre au-dessus de l'horizon et *parallaxe horizontale* celle qui a lieu lorsque l'astre est à l'horizon. La parallaxe horizontale étant donnée, ainsi que la distance zénithale vraie ou apparente, il est bien facile, comme nous allons le voir, d'en déduire la parallaxe de hauteur.

Fig. 5.



En effet, soient (*fig.* 5)

T le centre de la Terre, supposée sphérique;
A le lieu d'observation;
Z son zénith.

ZAS $= z'$ sera la distance zénithale apparente de l'astre en S, ZTS $= z$ sa distance zénithale vraie, et, en désignant par P la parallaxe de hauteur ou l'angle en S, on aura

$$(1)\qquad P = z' - z.$$

Posons AT $= r$ et ST $= \Delta$; par le triangle rectiligne SAT, on aura

$$\frac{\sin P}{\sin z'} = \frac{r}{\Delta},$$

c'est-à-dire

$$(2)\qquad \sin P = \frac{r}{\Delta}\sin z'.$$

La discussion de cette équation montre que P est insensible lorsque le rapport $\frac{r}{\Delta}$ est très petit, ce qui est le cas des étoiles. Pour $z' = 0$, P est nul, et, pour $z' = 90°$, P acquiert une valeur maximum et se change en ce que nous avons appelé la *parallaxe horizontale*.

En désignant par Π cette parallaxe, on aura donc

$$(3)\qquad \sin \Pi = \frac{r}{\Delta},$$

et par suite

$$(4)\qquad \sin P = \sin \Pi \sin z'.$$

Comme les angles P et Π sont toujours très petits (Π atteint à peine 62″ pour la Lune et 8″,86 pour le Soleil), on peut remplacer, dans l'équation ci-dessus, les sinus par les arcs, et cette équation devient alors

$$(5)\qquad P = \Pi \sin z'.$$

Ainsi la parallaxe de hauteur s'exprime en fonction de la parallaxe horizontale et de la distance zénithale apparente.

Mais on peut aussi exprimer cette parallaxe en fonction de Π et de la distance zénithale vraie z. En effet, si l'on écrit l'équation (4) de cette manière,

$$\sin P = \sin \Pi \sin(z + P),$$

et qu'on développe le second membre de cette expression, on aura

$$\sin P = \sin \Pi \sin z \cos P + \sin \Pi \cos z \sin P$$

ou bien, en divisant par $\cos P$,

$$(a)\qquad \operatorname{tang} P = \frac{\sin \Pi \sin z}{1 - \sin \Pi \cos z}.$$

Réduisant cette expression de tang P en série, on obtient, après avoir remplacé tang P par P et sin Π par Π,

$$(6) \qquad P = \Pi \sin z + \frac{\Pi^2}{2} \sin 2z + \ldots \quad (^1);$$

c'est la formule cherchée.

Remarque. — Le lieu d'un astre sur la sphère céleste étant le point de cette sphère où nous le projetons par le rayon visuel mené de l'œil à son centre, il est évident que l'effet de la parallaxe est de nous faire paraître les astres moins élevés au-dessus de l'horizon qu'ils le paraîtraient vus du centre de la Terre. Pour réduire une hauteur observée d'un point A de la surface de la Terre à ce qu'elle

---

(¹) Voici de quelle manière on est conduit à ce développement. Considérons l'équation

$$\operatorname{tang} y = \frac{a \sin x}{b - a \cos x},$$

de même forme que la précédente (a), et dans laquelle nous supposerons $a < b$. En remplaçant dans cette expression tang y, sin x et cos x par leurs valeurs en exponentielles imaginaires, on aura

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{1 - \frac{a}{b} e^{-x\sqrt{-1}}}{1 - \frac{a}{b} e^{+x\sqrt{-1}}},$$

c'est-à-dire

$$2y\sqrt{-1} = \log\left(1 - \frac{a}{b} e^{-x\sqrt{-1}}\right) - \log\left(1 - \frac{a}{b} e^{+x\sqrt{-1}}\right);$$

on a d'ailleurs

$$\log(1 - x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots.$$

Ainsi

$$2y\sqrt{-1} = \frac{a}{b} e^{x\sqrt{-1}} + \frac{a^2}{2b^2} e^{2x\sqrt{-1}} + \frac{a^3}{3b^3} e^{3x\sqrt{-1}} + \ldots$$
$$- \frac{a}{b} e^{-x\sqrt{-1}} - \frac{a^2}{2b^2} e^{-2x\sqrt{-1}} - \ldots.$$

Maintenant, si l'on divise tout par $2\sqrt{-1}$, et qu'on ait égard à ce que

$$\sin mx = \frac{e^{mx\sqrt{-1}} - e^{-mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

on obtiendra, en posant $\frac{a}{b} = A$,

$$y = A \sin x + \frac{A^2}{2} \sin 2x + \frac{A^3}{3} \sin 3x + \ldots.$$

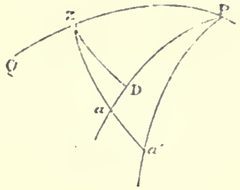
serait, vue de son centre T, on devra donc ajouter à cette hauteur observée la parallaxe P ou en retrancher cet angle s'il s'agit de la distance zénithale apparente; et, comme cette correction doit toujours s'appliquer en même temps que la réfraction, mais en sens inverse, on aura, z'_1 étant la distance zénithale observée et $\zeta_{z'_1}$ la réfraction correspondante à z'_1,

$$z = z'_1 + \zeta_{z'_1} - \mathrm{P}. \tag{7}$$

II. — Influence de la parallaxe sur les coordonnées équatoriales et écliptiques. Parallaxe d'ascension droite et de déclinaison.

La parallaxe n'altère pas seulement la hauteur des astres ou leur distance zénithale; elle altère aussi leur angle horaire et leur distance au pôle. Les changements qui en résultent pour ces deux espèces de coordonnées constituent ce qu'on appelle la *parallaxe d'ascension droite* et la *parallaxe de déclinaison*. Voici comment on les détermine.

Fig. 6.



Soient (*fig.* 6)

PZQ le méridien du lieu;
Z son zénith;
l sa latitude;
P le pôle de l'équateur;
$\mathrm{ZP}a = h$ l'angle horaire vrai;
$\mathrm{ZP}a' = h'$ l'angle horaire apparent;
$\mathrm{P}a = \Delta = 90° - \mathcal{D}$ la distance polaire vraie;
$\mathrm{P}a' = \Delta' = 90° - \mathcal{D}'$ la distance polaire apparente.

On a

$$\mathrm{ZP}a' - \mathrm{ZP}a = h' - h = \Delta\mathcal{AR} = \text{parallaxe d'ascension droite},$$
$$\mathrm{P}a' - \mathrm{P}a = \Delta' - \Delta = \mathcal{D} - \mathcal{D}' = \Delta\mathcal{D} = \text{parallaxe de déclinaison}.$$

Posons en outre $Za = z$, distance zénithale vraie, et $Za' = z'$, distance zénithale apparente. Par la considération des triangles sphériques aPa', ZPa', on aura

$$\frac{\sin a'}{\sin Pa} = \frac{\sin aPa'}{\sin aa'}, \quad \frac{\sin ZPa'}{\sin Za'} = \frac{\sin a'}{\sin PZ},$$

équations qui, étant multipliées membre à membre, donnent

$$\frac{\sin ZPa'}{\sin Pa \sin Za'} = \frac{\sin aPa'}{\sin aa' \sin PZ}$$

ou

$$\frac{\sin(h + \Delta\mathcal{A}\!\mathcal{R})}{\cos\mathcal{D} \sin z'} = \frac{\sin\Delta\mathcal{A}\!\mathcal{R}}{\sin P \cos l},$$

ou bien encore, en observant que $\sin P = \sin \Pi \sin z'$,

$$\frac{\sin(h + \Delta\mathcal{A}\!\mathcal{R})}{\cos\mathcal{D} \sin z'} = \frac{\sin\Delta\mathcal{A}\!\mathcal{R}}{\sin \Pi \sin z' \cos l},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sin(h + \Delta\mathcal{A}\!\mathcal{R})}{\cos\mathcal{D}} = \frac{\sin\Delta\mathcal{A}\!\mathcal{R}}{\sin \Pi \cos l}.$$

Maintenant on a, en développant, dans le premier membre de cette équation, la quantité $\sin(h + \Delta\mathcal{A}\!\mathcal{R})$, et divisant tout par $\cos\Delta\mathcal{A}\!\mathcal{R}$,

$$\sin\Pi \cos l (\sin h + \cos h \operatorname{tang}\Delta\mathcal{A}\!\mathcal{R}) = \operatorname{tang}\Delta\mathcal{A}\!\mathcal{R} \cos\mathcal{D},$$

d'où

$$(1) \qquad \operatorname{tang}\Delta\mathcal{A}\!\mathcal{R} = \frac{\sin\Pi \cos l \sin h}{\cos\mathcal{D} - \sin\Pi \cos l \cos h},$$

formule qu'on rend propre au calcul logarithmique en posant

$$(2) \qquad \cos\varphi = \frac{\sin\Pi \cos l \cos h}{\cos\mathcal{D}},$$

car alors il vient

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\Delta\mathcal{A}\!\mathcal{R} = \frac{\sin\Pi \cos l \sin h}{\cos\mathcal{D}(1 - \cos\varphi)} = \frac{\sin\Pi \cos l \sin h}{2 \cos\mathcal{D} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Si l'on voulait avoir recours au développement en série, il suffirait de poser dans l'équation (1)

$$(4) \qquad \psi = \frac{\sin\Pi \cos l}{\cos\mathcal{D}};$$

on aurait alors

$$(5)\qquad \operatorname{tang}\Delta\mathcal{A} = \frac{\psi \sin h}{1-\psi\cos h} = \psi \sin h + \frac{\psi^2}{2}\sin 2h + \ldots,$$

et, en prenant $\Delta\mathcal{A}\sin 1''$ au lieu de $\operatorname{tang}\Delta\mathcal{A}$, on obtiendrait

$$(6)\qquad \Delta\mathcal{A} = \frac{\psi \sin h}{\sin 1''} + \psi^2\frac{\sin 2h}{2\sin 1''} + \psi^3\frac{\sin 3h}{3\sin 1''} + \ldots,$$

série très convergente, à cause que l'arc ψ est très petit.

Les mêmes triangles $a\mathrm{P}a'$ et $\mathrm{ZP}a'$ donnent encore

$$\frac{\sin a\mathrm{P}a'}{\sin aa'} = \frac{\sin \mathrm{P}a'a}{\sin \mathrm{P}a} = \frac{\sin \mathrm{P}a'\mathrm{Z}}{\sin \mathrm{P}a},\qquad \frac{\sin \mathrm{P}a'\mathrm{Z}}{\sin(90-l)} = \frac{\sin \mathrm{ZP}a'}{\sin \mathrm{Z}a'},$$

relations d'où l'on déduit

$$\sin a\mathrm{P}a' = \sin\Delta\mathcal{A} = \frac{\sin aa' \sin(90-l)\sin \mathrm{ZP}a'}{\sin \mathrm{Z}a' \sin \mathrm{P}a} = \frac{\sin \mathrm{P}\cos l \sin h'}{\sin z' \cos\mathcal{D}},$$

c'est-à-dire en remarquant que $\dfrac{\sin \mathrm{P}}{\sin z'} = \sin \Pi$,

$$(6\ bis)\qquad \sin\Delta\mathcal{A} = \frac{\sin\Pi\cos l\sin h'}{\cos\mathcal{D}} = \operatorname{séc}\mathcal{D}\sin\Pi\cos l\sin h'.$$

Occupons-nous maintenant de déterminer $\Delta\mathcal{D}$ ou la parallaxe de déclinaison.

On a, par les deux triangles sphériques $\mathrm{PZ}a$ et $\mathrm{PZ}a'$,

$$\cos \mathrm{PZ}a = \frac{\sin\mathcal{D} - \cos z\sin l}{\sin z\cos l} = \frac{\sin\mathcal{D}' - \cos z'\sin l}{\cos z'\cos l},$$

relation d'où l'on tire

$$\sin z'(\sin\mathcal{D} - \cos z\sin l) = \sin z(\sin\mathcal{D}' - \cos z'\sin l),$$
$$\sin z'\sin\mathcal{D} - \sin l(\sin z'\cos z - \cos z'\sin z) = \sin z\sin\mathcal{D}',$$

c'est-à-dire

$$\sin z'\sin\mathcal{D} - \sin l\sin(z'-z) = \sin z\sin\mathcal{D}.$$

Mais

$$\sin(z'-z) = \sin \mathrm{P} = \sin\Pi\sin z';$$

donc

$$(a)\qquad \sin z'(\sin\mathcal{D} - \sin l\sin\Pi) = \sin z\sin\mathcal{D}'.$$

On a d'ailleurs

$$\sin \mathrm{PZ}a = \frac{\cos\mathcal{D}\sin h}{\sin z} = \frac{\cos\mathcal{D}'\sin(h+\Delta\mathcal{A})}{\sin z'},$$

d'où

$$\sin z \cos \mathcal{D}' = \frac{\sin z' \cos \mathcal{D} \sin h}{\sin(h + \Delta\mathcal{A})}.$$

Divisant l'équation (a) par cette dernière, on obtient

$$\operatorname{tang} \mathcal{D}' = \frac{\sin \mathcal{D} - \sin \Pi \sin l}{\cos \mathcal{D} \sin h} \sin(h + \Delta\mathcal{A}),$$

expression qu'on peut mettre sous cette forme

$$\frac{\sin l \sin \Pi}{\cos \mathcal{D}} = \operatorname{tang} \mathcal{D} - \frac{\sin h \operatorname{tang} \mathcal{D}'}{\sin(h + \Delta\mathcal{A})}.$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} \mathcal{D} - \operatorname{tang} \mathcal{D}' = \frac{\sin \mathcal{D}}{\cos \mathcal{D}} - \frac{\sin \mathcal{D}'}{\cos \mathcal{D}'} &= \frac{\sin \mathcal{D} \cos \mathcal{D}' - \cos \mathcal{D} \sin \mathcal{D}'}{\cos \mathcal{D} \cos \mathcal{D}'} \\ &= \frac{\sin(\mathcal{D} - \mathcal{D}')}{\cos \mathcal{D} \cos \mathcal{D}'} = \frac{\sin \Delta \mathcal{D}}{\cos \mathcal{D} \cos \mathcal{D}'};\end{aligned}$$

additionnant cette équation avec la précédente, on obtient

$$\frac{\sin l \sin \Pi}{\cos \mathcal{D}} - \operatorname{tang} \mathcal{D}' = \frac{\sin \Delta \mathcal{D}}{\cos \mathcal{D} \cos \mathcal{D}'} - \frac{\sin h \operatorname{tang} \mathcal{D}'}{\sin(h + \Delta\mathcal{A})},$$

ou

$$\frac{\sin l \sin \Pi}{\cos \mathcal{D}} = \operatorname{tang} \mathcal{D}' \left[1 - \frac{\sin h}{\sin(h + \Delta\mathcal{A})} \right] + \frac{\sin \Delta \mathcal{D}}{\cos \mathcal{D} \cos \mathcal{D}'}.$$

Mais

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\sin h}{\sin(h + \Delta\mathcal{A})} &= \frac{\sin(h + \Delta\mathcal{A}) - \sin h}{\sin(h + \Delta\mathcal{A})} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\Delta\mathcal{A}}{2} \cos\left(h + \frac{\Delta\mathcal{A}}{2}\right)}{\sin(h + \Delta\mathcal{A})} \\ &= \frac{\sin \Delta\mathcal{A} \cos\left(h + \frac{\Delta\mathcal{A}}{2}\right)}{\sin(h + \Delta\mathcal{A}) \cos \frac{\Delta\mathcal{A}}{2}} \\ &= \frac{\sin \Pi \cos l}{\cos \mathcal{D} \cos \frac{\Delta\mathcal{A}}{2}} \cos\left(h + \frac{\Delta\mathcal{A}}{2}\right). \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\sin l \sin \Pi}{\cos \mathcal{D}} = \frac{\operatorname{tang} \mathcal{D}' \sin \Pi \cos l}{\cos \mathcal{D} \cos \frac{\Delta\mathcal{A}}{2}} \cos\left(h + \frac{\Delta\mathcal{A}}{2}\right) + \frac{\sin \Delta \mathcal{D}}{\cos \mathcal{D} \cos \mathcal{D}'},$$

et par conséquent

$$\sin\Delta\mathcal{D} = \sin\Pi\left[\sin l\cos\mathcal{D}' - \frac{\sin\mathcal{D}'\cos l\cos\left(h+\frac{\Delta\mathcal{A}}{2}\right)}{\cos\frac{\Delta\mathcal{A}}{2}}\right]. \tag{7}$$

On peut, dans cette expression de $\sin\Delta\mathcal{D}$, écrire $\mathcal{D}-\Delta\mathcal{D}$ au lieu de $\mathcal{D}'$; alors, en posant

$$\cos(h) = \frac{\cos\left(h+\frac{\Delta\mathcal{A}}{2}\right)}{\cos\frac{\Delta\mathcal{A}}{2}},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\sin\Delta\mathcal{D} = {} & \sin\Pi\cos\Delta\mathcal{D}[\sin l\cos\mathcal{D} - \cos l\sin\mathcal{D}\cos(h)]\\ & + \sin\Pi\sin\Delta\mathcal{D}[\sin l\sin\mathcal{D} + \cos l\cos\mathcal{D}\cos(h)],\end{aligned}$$

expression d'où l'on tire, en divisant par $\cos\Delta\mathcal{D}$,

$$\operatorname{tang}\Delta\mathcal{D} = \frac{\sin\Pi[\sin l\cos\mathcal{D} - \cos l\sin\mathcal{D}\cos(h)]}{1-\sin\Pi[\sin l\sin\mathcal{D} + \cos l\cos\mathcal{D}\cos(h)]}.$$

Mais, en considérant le triangle sphérique PZa (*fig.* 6), on a

$$\begin{aligned}\sin aZ\cos ZaP &= \cos PZ\sin Pa - \sin PZ\cos Pa\cos P,\\ \cos aZ &= \cos PZ\cos Pa + \sin PZ\sin Pa\cos P,\end{aligned}$$

et, par suite, en posant $Pa = 90-\mathcal{D}$, $PZ = 90-l$, $P=(h)$, $aZ = 90-\varepsilon$, $ZaP = M$,

$$\begin{aligned}\cos\varepsilon\cos M &= \sin l\cos\mathcal{D} - \cos l\sin\mathcal{D}\cos(h),\\ \sin\varepsilon &= \sin l\sin\mathcal{D} + \cos l\cos\mathcal{D}\cos(h);\end{aligned}$$

on a donc

$$\operatorname{tang}\Delta\mathcal{D} = \frac{\sin\Pi\cos\varepsilon\cos M}{1-\sin\Pi\sin\varepsilon}. \tag{8}$$

Il reste à déterminer les angles ε et M. Or, en menant dans le triangle sphérique PZa l'arc ZD perpendiculaire sur Pa, on a

$$\operatorname{tang} PD = \operatorname{tang} PZ\cos P,$$

puis

$$\sin aD\operatorname{tang} M = \operatorname{tang} ZD = \sin PD\operatorname{tang} P,$$

d'où

$$\operatorname{tang} M = \frac{\sin PD}{\sin aD} \operatorname{tang} P.$$

On a ensuite

$$\operatorname{tang} Za = \frac{\operatorname{tang} aD}{\cos M} \quad \text{ou} \quad \cot aZ = \cot aD \cos M.$$

Faisant $PD = \theta$ et observant que $aD = aP - \theta = 90^\circ - (\theta + \mathfrak{D})$, on a donc

$$(9) \qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\theta = \cot l \cos(h), \\ \operatorname{tang} M = \dfrac{\sin\theta}{\cos(\theta + \mathfrak{D})} \operatorname{tang}(h), \\ \operatorname{tang}\varepsilon = \operatorname{tang}(\theta + \mathfrak{D}) \cos M. \end{cases}$$

Comme

$$\frac{\sin PD}{\sin aD} = \frac{\operatorname{tang} M}{\operatorname{tang} P} = \frac{\cos P \sin M}{\cos M \sin P} = \frac{\cos P \sin PZ}{\cos M \sin aZ},$$

on a encore

$$(10) \qquad \frac{\sin\theta}{\cos(\theta + \mathfrak{D})} = \frac{\cos(h)\cos l}{\cos M \cos\varepsilon},$$

formule qui sert de vérification.

Si l'on voulait obtenir $\Delta\mathfrak{D}$ développé en série, il suffirait de poser, dans la relation (7),

$$(11) \qquad \cot\chi = \frac{\cos\left(h + \dfrac{\Delta\mathcal{A}}{2}\right)\cot l}{\cos\dfrac{\Delta\mathcal{A}}{2}};$$

il viendrait alors

$$\begin{aligned} \sin\Delta\mathfrak{D} &= \sin l \sin\Pi\,(\cos\mathfrak{D}' - \sin\mathfrak{D}'\cot\chi) \\ &= \sin l \sin\Pi \frac{(\cos\mathfrak{D}'\sin\chi - \sin\mathfrak{D}'\cos\chi)}{\sin\chi} \\ &= \frac{\sin l \sin\Pi}{\sin\chi}\sin(\chi - \mathfrak{D}'), \end{aligned}$$

et, en prenant

$$(12) \qquad \tau = \frac{\sin l \sin\Pi}{\sin\chi},$$

on aurait, parce que $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} - \Delta\mathfrak{D}$,

$$\begin{aligned} \sin\Delta\mathfrak{D} &= \tau\sin(\chi - \mathfrak{D} + \Delta\mathfrak{D}) \\ &= \tau\sin(\chi - \mathfrak{D})\cos\Delta\mathfrak{D} + \cos\tau(\chi - \mathfrak{D})\sin\Delta\mathfrak{D}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en divisant les deux membres par $\cos\Delta\text{Æ}$,

$$\operatorname{tang}\Delta\text{Æ} = \tau\sin(\chi - \text{Æ}) + \tau\cos(\chi - \text{Æ})\operatorname{tang}\Delta\text{Æ},$$

d'où

$$(13) \qquad \operatorname{tang}\Delta\text{Æ} = \frac{\tau\sin(\gamma - \text{Æ})}{1 - \tau\cos(\chi - \text{Æ})}.$$

Développant le second membre de cette expression et changeant $\operatorname{tang}\Delta\text{Æ}$ en $\Delta\text{Æ}\sin 1''$ pour réduire en secondes, on aura donc

$$(14) \qquad \Delta\text{Æ} = \frac{\tau\sin(\chi - \text{Æ})}{\sin 1''} + \frac{\tau^2\sin 2(\chi - \text{Æ})}{2\sin 1''} + \frac{\tau^3\sin 3(\chi - \text{Æ})}{3\sin 1''} + \ldots,$$

série dont le premier terme suffit presque toujours pour les astres, tels que le Soleil, les planètes et les comètes; il est rare même que pour la Lune on conserve le troisième.

III. — Parallaxe de longitude et de latitude.

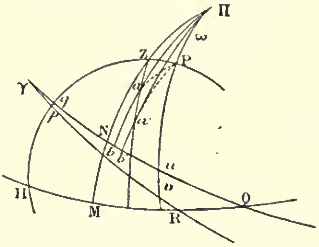
Les calculs à l'aide desquels on parvient à évaluer ces arcs sont les mêmes que ceux relatifs aux parallaxes d'ascension droite et de déclinaison; seulement il se présente ici une difficulté qui tient à ce que la position de l'écliptique change continuellement de place à l'égard de l'horizon. Il convient donc avant tout de déterminer cette position pour un instant quelconque, et c'est ce que l'on peut faire très simplement en cherchant le point de la voûte céleste qui se trouve actuellement au zénith, ou, ce qui revient au même, le point de l'écliptique qui est le plus élevé sur l'horizon, c'est-à-dire le *nonagésime*.

Soient donc (*fig.* 7)

Π le pôle de l'écliptique;
P celui de l'équateur;
Z le zénith du lieu dont la latitude est l;
HR l'horizon;
PZH le méridien;
$\Pi P = \omega$ l'angle qui mesure l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur.

Supposons en outre que a représente le lieu vrai de l'astre et a' son lieu apparent. Si par ces deux points on mène les cercles de latitude Πb, $\Pi b'$, Υb sera la longitude vraie, $\Upsilon b'$ la longitude apparente, ab la latitude vraie, $a'b'$ la latitude apparente, et les différences $\Upsilon b' - \Upsilon b = a\Pi a'$, $ab - a'b'$ exprimeront respectivement

Fig. 7.



ce que nous avons appelé les *parallaxes de longitude et de latitude*, ou les angles $(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L})$ et $(\lambda' - \lambda)$.

Or, si l'on remarque que la longitude ΥN du point N ou du nonagésime est la même que celle du point Z qui est au zénith, et que sa hauteur sur l'horizon, ou l'arc NM est le complément de ZN ou de la latitude du zénith, on voit que la position du point du ciel qui se trouve actuellement au zénith sera déterminée pour un instant quelconque, lorsqu'on connaîtra, pour le même instant, la longitude $\Upsilon\mathrm{N} = n$ du nonagésime et sa hauteur sur l'horizon, ou l'arc $\mathrm{NM} = \zeta$. Cherchons donc ces deux coordonnées n et ζ. Soit pour cela s l'heure sidérale ou l'arc Υp, heure que nous supposerons connue; l'arc pv sera le complément de s, car $pv = \Upsilon v - \Upsilon p = 90° - s$, et l'on aura $\mathrm{ZP}\Pi = 180° - \mathrm{ZP}v = 90° + s$. Dans le triangle PΠZ on connaîtra donc, outre le côté $\mathrm{P}\Pi = \omega$, celui $\mathrm{ZP} = 90 - l$ et l'angle compris $\mathrm{ZP}\Pi = 90° + s$; par suite, on aura, pour déterminer l'angle $\mathrm{Z}\Pi\mathrm{P} = \Upsilon u - \Upsilon\mathrm{N} = 90° - n$ et le côté $\Pi\mathrm{Z} = \zeta$,

$$\cos s \operatorname{tang} n = \operatorname{tang} l \sin\omega + \cos\omega \sin s,$$
$$\cos\zeta = \cos\omega \sin l - \sin\omega \cos l \sin s,$$

ou bien, en posant

$$(1) \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{\sin s}{\operatorname{tang} l},$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} n &= \operatorname{tang} s \frac{\sin(\theta + \omega)}{\sin\theta}, \\ \cos\zeta &= \sin l \frac{\cos(\theta + \omega)}{\cos\theta}. \end{aligned} \right.$$

Ces coordonnées n et ζ une fois déterminées, on obtiendra les expressions de $(\mathcal{L}'-\mathcal{L})$ et de $(\lambda'-\lambda)$ en remplaçant dans les formules (4), (5), (6), (11), (12) et (13) du paragraphe précédent l par $90^\circ-\zeta$, $\mathcal{D}$ par λ et substituant pour h la différence des longitudes $\mathcal{L}-n$. On aura ainsi, pour les formules relatives à la parallaxe en longitude,

$$(3)\qquad \psi_1=\frac{\sin\Pi\sin\zeta}{\cos\lambda},$$

$$(4)\qquad \operatorname{tang}(\mathcal{L}'-\mathcal{L})=\frac{\psi_1\sin(\mathcal{L}-n)}{1-\psi_1\cos(\mathcal{L}-n)},$$

d'où

$$(5)\qquad \mathcal{L}'-\mathcal{L}=\frac{\psi_1\sin(\mathcal{L}-n)}{\sin 1''}+\frac{\psi_2\sin 2(\mathcal{L}-n)}{2\sin 1''}+\ldots.$$

Relativement à la parallaxe de latitude $(\lambda'-\lambda)$, on aurait

$$(6)\qquad \cot\chi=\frac{\cos\left(\mathcal{L}-n+\dfrac{\Delta\mathcal{A}}{2}\right)\operatorname{tang}\zeta}{\cos\dfrac{\Delta\mathcal{A}}{2}},$$

$$(7)\qquad \tau_1=\frac{\sin\Pi\cos\zeta}{\sin\chi}\sin(\chi-\lambda),$$

$$(8)\qquad \operatorname{tang}(\lambda'-\lambda)=\frac{\tau_1\sin(\chi-\lambda)}{1-\tau_1\cos(\chi-\lambda)},$$

d'où

$$(\lambda'-\lambda)=\frac{\tau_1\sin(\chi-\lambda)}{\sin 1''}+\frac{\tau_1^2\sin 2(\chi-\lambda)}{2\sin 1''}+\ldots;$$

et ici, comme au paragraphe précédent, on pourra, dans les développements de $(\mathcal{L}'-\mathcal{L})$ et de $(\lambda'-\lambda)$, s'en tenir aux premiers termes lorsqu'il s'agira des astres, tels que le Soleil et les planètes; mais, pour la Lune, dont la parallaxe peut atteindre 1°, il sera nécessaire d'avoir égard aux termes du second ordre et même à ceux du troisième.

IV. — Correction que l'ellipticité de la Terre apporte dans le calcul des parallaxes. Expression de la parallaxe horizontale équatoriale.

Des mesures géodésiques entreprises en différents lieux de la surface de la Terre ont montré que notre globe avait la forme d'un ellipsoïde de révolution autour de son petit axe ou de la ligne des pôles. Si donc A représente le demi-grand axe de l'ellipse méridienne, B son demi-petit axe, e son excentricité et μ l'aplatissement, on aura

$$e^2 = \frac{A^2 - B^2}{A^2} = 1 - \frac{B^2}{A^2},$$

$$\mu = \frac{A - B}{A} = 1 - \frac{B}{A},$$

$$\frac{B}{A} = \sqrt{1 - e^2},$$

et par suite

$$\mu = 1 - \sqrt{1 - e^2}, \quad e = \sqrt{2\mu - \mu^2}.$$

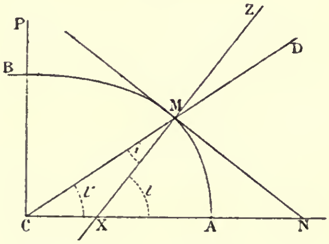
Bessel a conclu, en 1841, les éléments suivants, qui sont les plus exacts que nous possédions :

$$A = 6377398^{\text{m}},04, \quad B = 6356079^{\text{m}},84,$$
$$\log A = 6,8046436, \quad \log B = 6,8031894,$$

d'où

$$\mu = \frac{1}{299,1528}, \quad e = 0,0816967,$$
$$\log \mu = \bar{3},5241069, \quad \log e = \bar{2},9122050.$$

Fig. 8.



Dans la théorie des parallaxes, il est souvent nécessaire de connaître l'angle CMX $= i$ (*fig.* 8) que fait le rayon de la Terre CM avec la verticale MZ du lieu M, à la surface de la Terre. C'est cet angle qui, retranché de la *latitude apparente* ou *astronomique* $l =$ MXN, donne la *latitude vraie* ou *géocentrique* MCA $= l'$. Voici comment on peut le déterminer.

Désignons par x et y les coordonnées du point M rapportées aux deux axes rectangulaires CA, CB passant par le centre de la Terre;

nous aurons, d'après les propriétés de l'ellipse,

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2, \quad \operatorname{tang} l = \frac{A^2 y}{B^2 x}, \quad \operatorname{tang} l' = \frac{y}{x},$$

et par suite

$$\operatorname{tang} l' = \frac{B^2}{A^2} \operatorname{tang} l.$$

En remarquant que $i = l - l'$, nous aurons donc

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} i = \frac{\operatorname{tang} l - \operatorname{tang} l'}{1 + \operatorname{tang} l \operatorname{tang} l'} &= \frac{\operatorname{tang} l - \frac{B^2}{A^2} \operatorname{tang} l}{1 + \frac{B^2}{A^2} \operatorname{tang}^2 l} \\ &= \frac{(A^2 - B^2) \operatorname{tang} l}{(A^2 + B^2) \operatorname{tang}^2 l} \\ &= \frac{(A^2 - B^2) \sin 2l}{2A^2 - 2(A^2 - B^2) \sin^2 l} \\ &= \frac{(A^2 - B^2) \sin 2l}{(A^2 + B^2) + (A^2 - B^2) \cos 2l}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang} i = \frac{m \sin 2l}{1 + m \cos 2l},$$

expression dans laquelle

$$m = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} = \frac{2\mu - \mu^2}{2 - 2\mu + \mu^2}.$$

Cette valeur de $\operatorname{tang} i$ se développe en série convergente, comme nous l'avons vu au § I, et donne

$$i = m \sin 2l - \tfrac{1}{2} m^2 \sin 4l + \ldots;$$

à Paris, on a

$$i = 11' 46'', 4, \quad l' = 48° 38' 27'', 6.$$

Il existe d'ailleurs des Tables à l'aide desquelles on peut trouver i en fonction de l.

Cherchons actuellement l'expression du rayon terrestre R pour une latitude quelconque l. On a

$$R^2 = x^2 + y^2;$$

on a d'ailleurs

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2, \quad B^4 x^2 \operatorname{tang}^2 l = A^4 y^2,$$

relations qui deviennent, en remplaçant B^2 par sa valeur $A^2(1-\mu)^2$,

$$y^2+(1-\mu)^2x^2=A^2(1-\mu)^2,\quad y^2=(1-\mu)^4x^2\operatorname{tang}^2 l.$$

Éliminant x^2 et y^2 entre ces deux équations, on obtient

$$x^2=\frac{A^2}{1+(1-\mu)^2\operatorname{tang}^2 l},\quad y^2=\frac{A^2}{1+(1-\mu)^2\operatorname{tang}^2 l}(1-\mu)^4\operatorname{tang}^2 l;$$

par suite, on a

$$R^2=\frac{A^2}{1+(1-\mu)^2\operatorname{tang}^2 l}[1+(1-\mu)^4\operatorname{tang}^2 l].$$

Cette expression, étant développée en série, donne

$$R=A(1-\mu\sin^2 l+\tfrac{5}{8}\mu^2\sin^2 2l+\ldots),$$

d'où

$$A-R=A(\mu\sin^2 l-\tfrac{5}{8}\mu^2\sin^2 2l-\ldots);$$

c'est l'excès du rayon équatorial A sur tout autre rayon terrestre.

La longueur du rayon R étant ainsi déterminée pour une latitude quelconque l, il est facile d'en conclure la parallaxe horizontale Π, qui se rapporte à cette latitude. Il suffit en effet, pour cela, de remplacer dans les formules du § I, savoir

$$\sin\Pi=\frac{R}{\Delta}\quad\text{ou}\quad\Pi=\frac{R}{\Delta},$$

R par sa valeur $A(1-\mu\sin^2 l+\frac{5}{8}\mu^2\sin^2 2l+\ldots)$. On obtient de la sorte

$$\Pi=\frac{A}{\Delta}(1-\mu\sin^2 l+\tfrac{5}{8}\mu^2\sin^2 2l+\ldots),$$

ou à très peu près

$$\Pi=\frac{A}{\Delta}(1-\mu^2\sin^2 l).$$

Lorsqu'on suppose $l=0$, auquel cas l'observateur se trouve placé sous l'équateur, l'expression précédente se réduit à $\frac{A}{\Delta}$; c'est l'expression de la *parallaxe équatoriale* que donne la *Connaissance des Temps* pour le midi et le minuit de chaque jour. En désignant par H cette parallaxe, nous aurons donc

$$\Pi=H(1-\mu\sin^2 l);$$

et réciproquement, étant donnée la parallaxe horizontale Π sous la latitude l, si l'on voulait obtenir la parallaxe équatoriale H qui lui correspond, on aurait

$$H = \frac{\Pi}{(1 - \mu \sin^2 l)},$$

ou très approximativement

$$H = \Pi(1 + \mu \sin^2 l).$$

Remarque. — Les coordonnées des astres données dans la *Connaissance des Temps* sont géocentriques pour servir à tous les lieux de la Terre. Lorsqu'on veut combiner les données que fournissent nos éphémérides avec les résultats de l'observation, on doit donc corriger les arcs observés de l'effet de la parallaxe au moyen des formules qui précèdent, et, afin de tenir compte de l'aplatissement du sphéroïde terrestre, il faut avoir soin d'y remplacer la latitude astronomique l par celle géocentrique l' ou $l - i$, i étant, comme nous l'avons vu, l'angle que forme le rayon de la Terre avec la verticale du lieu d'observation. La même remarque s'applique à la parallaxe horizontale Π, qui entre dans ces formules, c'est-à-dire que l'on doit y remplacer Π par sa valeur corrigée de l'aplatissement de la Terre ou par $\Pi(1 - \mu \sin^2 l)$. Au moyen de ces corrections, les calculs se trouvent réduits à ce qu'ils seraient si la Terre était parfaitement sphérique.

CHAPITRE IV.

DÉPLACEMENT DES PLANS DE L'ÉQUATEUR ET DE L'ÉCLIPTIQUE. — VARIATIONS QUI EN RÉSULTENT DANS LES COORDONNÉES DES ASTRES. — CALCUL DE LA PRÉCESSION ET DE LA NUTATION.

I. — Des causes qui produisent la précession et la nutation.

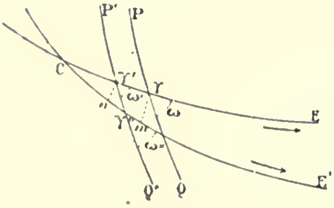
Le premier de ces phénomènes, qui consiste, comme on sait, dans une rétrogradation lente des points équinoxiaux, résulte du mouvement diurne de la Terre, combiné avec l'attraction qu'éprouve son excès de sphéricité. L'action luni-solaire, en agissant avec plus d'intensité sur cette partie du sphéroïde terrestre que sur les autres, tend à imprimer à l'équateur un mouvement circulaire autour de la ligne des nœuds, en même temps qu'à diminuer l'angle ω, que forme le plan de l'écliptique avec celui de l'équateur. Le mouvement de rotation de la Terre vient modifier cet effet en rendant invariable cet angle ω et faisant rétrograder la section de l'équateur avec l'écliptique, attribuant ainsi aux nœuds une variation qui, sans cela, se fût trouvée dans l'obliquité, et donnant à cet angle une constance qui eût appartenu aux nœuds. Comme la masse de la Terre est immense relativement à celle du ménisque que l'on peut supposer recouvrir son équateur, on conçoit que cette rétrogradation doive être fort lente : elle n'est en effet que de $50'',10$ par an en longitude, dont $50'',41$ sont dues aux actions réunies du Soleil et de la Lune, et $-0'',31$ sont causés par l'attraction des planètes qui, en déplaçant un peu l'écliptique, fait avancer le point vernal Υ, dans le sens des signes, du très petit arc $0'',31$.

A ces effets généraux vient s'en joindre un autre résultant de ce que la Lune n'est qu'accidentellement dans l'écliptique. Cet astre, en décrivant autour de la Terre une courbe oblique à ce plan, exerce une action inégale sur le ménisque ou anneau qui entoure son équateur, et de cette inégalité d'action résulte un mouvement oscillatoire du plan de l'équateur autour de la ligne des équinoxes, auquel correspond, en même temps, un balancement alternatif de l'axe de la Terre, qui lui fait décrire une petite surface conique. C'est à ce balancement de l'axe terrestre, dont l'effet est de faire varier l'inclinaison de l'écliptique et de déplacer un peu le point vernal ♈ de part et d'autre de son *lieu moyen* (c'est-à-dire du lieu qu'il occuperait en vertu de la seule précession), que l'on a donné le nom de *nutation*. Il se manifeste par une augmentation et une diminution progressive dans la déclinaison des étoiles d'une quantité égale à environ $\pm 9'', 25$, et dont la période est la même que celle des nœuds de la Lune, c'est-à-dire de dix-huit années et demie. L'attraction solaire contribue aussi à cet effet, mais pour une faible part. La variation qui en résulte est périodique comme la première, et revient aux mêmes valeurs au bout d'une demi-révolution de cet astre autour de la Terre, c'est-à-dire au bout d'une demi-année. Lorsqu'on y a égard on l'ajoute à celle qui provient de la Lune, et l'on a ce qu'on appelle la *nutation luni-solaire*.

II. — Formules de précession en ascension droite et en déclinaison.

Supposons qu'à une époque quelconque, CE (*fig.* 9) représente l'écliptique et PQ l'équateur. Après t années, l'action du Soleil et de la Lune aura transporté l'équateur PQ en P′Q′, et le point vernal ♈ aura pris la position ♈′, en même temps que l'obliquité ω sera devenue ω′. Ce point ♈ aura donc rétrogradé sur l'écliptique

Fig. 9.



de l'arc $\Upsilon\Upsilon' = \psi$, qui est ce qu'on nomme la *précession luni-solaire*. Au bout du même temps, et par suite de l'action exercée par les planètes sur le centre de gravité de notre globe, l'écliptique CE se sera un peu déplacée et aura pris la position CE', en sorte que le nouveau point vernal Υ' aura pris la position Υ'', et l'obliquité ω' sera devenue ω''. En prenant $Cm = C\Upsilon$, l'arc $\Upsilon'' m = \Psi$ est ce qu'on est convenu d'appeler la *précession totale;* c'est, comme on voit, celle qui résulte des actions combinées du Soleil, de la Lune et des planètes; elle est plus faible que celle ψ de tout l'arc $0'',31$, c'est-à-dire que l'on a, au bout d'une année, $\Upsilon\Upsilon' = \Upsilon'' m + 0'',31$.

En adoptant avec Bessel pour plan fixe celui qui coïncidait avec l'écliptique au commencement de 1750, on a, pour l'expression des variations que subissent ces éléments :

Obliquité de l'écliptique CE en 1750....	$\omega = 23°28'18'',0$
Obliquité sur cette dernière après t années..............................	$\omega' = \omega + 0'',00000984233\,t^2$
Obliquité sur l'écliptique variée CE'....	$\omega'' = \omega - 0'',48368\,t - 0'',0000272295\,t^2$
Mouvement d'ascension droite $\Upsilon'\Upsilon''$..	$\mu = \frac{1}{\cos\omega'}(0'',16443\,t - 0'',0002439428\,t^2)$
Angle des deux écliptiques ECE'.......	$\varphi = 0'',48892\,t - 0'',0000030719\,t^2$
Arc $C\Upsilon'$..........................	$\theta = 171°36'10'' - 5'',21t$
Précession luni-solaire $\Upsilon\Upsilon'$........	$\psi = 50'',37572\,t - 0'',0001217945\,t^2$
Précession totale $\Upsilon'' m$..............	$\Psi = 50'',21129\,t + 0'',0001221483\,t^2$

Les plans de l'équateur et de l'écliptique variant sans cesse par l'effet des perturbations, il doit nécessairement en résulter dans les coordonnées des astres des altérations correspondantes : ainsi la longitude, la latitude, de même que l'ascension droite et la déclinaison, ne seront pas constantes. Cependant, pour des durées de temps moindres que dix ans, on peut regarder certaines de ces variations comme insensibles. Ainsi, on pourra, par exemple, supposer que l'écliptique CE se confonde avec celle CE', ce qui permettra de faire $\omega' = \omega''$, et par suite de regarder comme constantes les latitudes λ. Quant aux variations des longitudes $\mathcal{L}$, on pourra les supposer proportionnelles au temps t et prendre pour $d\mathcal{L}$ l'expression $\pm 50'',1 \times t$. Dès lors, pour obtenir $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$, on voit qu'il ne s'agira que de considérer le triangle sphérique ΠPS (*fig.* 1) formé par le pôle Π de l'écliptique, celui P de l'équateur et l'astre S, lequel donne, comme nous l'avons déjà vu au § I du Chapitre I,

$$\cos\lambda\cos\mathcal{L} = \cos\mathcal{D}\cos\mathcal{A}, \tag{1}$$

$$\sin\lambda = \cos\omega\sin\mathcal{D} - \sin\omega\cos\mathcal{D}\sin\mathcal{A}, \tag{2}$$

$$\sin\mathcal{D} = \cos\omega\sin\lambda + \sin\omega\cos\lambda\,\sin\mathcal{L}. \tag{3}$$

Au lieu de procéder de la sorte, il est préférable de chercher les variations qu'éprouvent l'ascension droite et la déclinaison, ou $d\mathcal{A}$ et $d\mathcal{D}$, en fonction de la variation $d\mathcal{L}$ que prend la longitude par l'effet de la précession. Cette méthode conduit en effet à des calculs fort simples quand on se borne, comme on peut toujours le faire lorsqu'il s'agit d'un court espace de temps, aux premiers termes des développements suivants :

$$\left(\frac{d\mathcal{A}}{dt}\right)t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\mathcal{A}}{dt^2}\right)t^2 + \ldots,$$

$$\left(\frac{d\mathcal{D}}{dt}\right)t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\mathcal{D}}{dt^2}\right)t^2 + \ldots,$$

car il suffit alors de différentier les équations précédentes (1), (2), (3), par rapport à $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$, quantités qui, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, sont les seules qu'il soit nécessaire de considérer comme variables. Or, en différentiant de la sorte l'équation (3), on a

$$\frac{d\mathcal{D}}{dt} = \frac{\sin\omega\cos\lambda\cos\mathcal{L}}{\cos\mathcal{D}}\,\frac{d\mathcal{L}}{dt},$$

formule que l'on peut encore écrire de cette manière,

$$\frac{d\mathcal{D}}{dt} = \sin\omega\cos\mathcal{A}\,\frac{d\mathcal{L}}{dt}, \tag{4}$$

eu égard à la relation (1).

De même l'équation (1), différentiée par rapport aux mêmes variables, donne

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\cos\lambda\sin\mathcal{L}\,d\mathcal{L} - \sin\mathcal{D}\cos\mathcal{A}\,d\mathcal{D}}{\sin\mathcal{A}\cos\mathcal{D}\,dt},$$

et, comme

$$\cos\lambda\sin\mathcal{L} = \sin\omega\sin\mathcal{D} + \cos\omega\cos\mathcal{D}\sin\mathcal{A},$$

on obtient, après avoir substitué cette valeur dans l'expression de

$\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ et mis pour $\frac{d\mathcal{D}}{dt}$ sa valeur (4),

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = (\cos\omega + \sin\omega \sin\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D}) \frac{d\mathcal{L}}{dt}.$$

Cette valeur de $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ n'est pas exacte, car elle suppose le point Υ transporté en Υ', tandis qu'il l'est réellement en Υ''. Il faut donc de l'ascension droite $\mathcal{A}$ retrancher le petit arc $\Upsilon'\Upsilon'' = \mu$, et par suite diminuer $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ de $\frac{d\mu}{dt}$, c'est-à-dire prendre

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = (\cos\omega + \sin\omega \sin\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D}) \frac{d\mathcal{L}}{dt} - \frac{d\mu}{dt}.$$

Or, si l'on remarque que l'angle $C = \varphi$ que forme l'écliptique fixe CE avec l'écliptique variée CE' est toujours extrêmement petit, même pour des durées de plusieurs siècles, on voit qu'on pourra regarder le triangle $\Upsilon n \Upsilon''$ comme rectiligne et comme rectangle en n, ce qui donnera, à cause que

$$\Upsilon'_n = \Upsilon\Upsilon' - \Upsilon''_m = \psi - \Psi,$$

$$\Upsilon'\Upsilon'' = \mu = \frac{\psi - \Psi}{\cos\omega},$$

et par suite

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{\cos\omega}\left(\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\Psi}{dt}\right).$$

Maintenant, si l'on différentie par rapport à t les valeurs précédentes de ψ et de Ψ, on obtiendra

$$\frac{d\psi}{dt} = 50'',37572 - 0'',000243589\,t,$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = 50'',21129 + 0'',000242966\,t,$$

t désignant le nombre d'années écoulées depuis 1750, et, si l'on prend pour ω la valeur 23° 27′ 36″ que cette quantité avait en 1840, on aura

$$\frac{d\mu}{dt} = 0'',179243 - 0'',00053185\,t.$$

En posant, pour abréger,

$$m = \cos\omega \frac{d\mathcal{L}}{dt} - \frac{d\mu}{dt},$$

$$n = \sin\omega \frac{d\mathcal{L}}{dt},$$

on aura donc, pour les formules qui expriment la précession en ascension droite et en déclinaison,

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= m + n \sin\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D}, \\ \frac{d\mathcal{D}}{dt} &= n \cos\mathcal{A}. \end{aligned} \right.$$

Quant aux quantités *m* et *n*, elles ont, d'après Bessel, les valeurs numériques suivantes :

$$m = 46'',02824 + 0'',0003086450\,t,$$

$$n = 20'',06442 - 0'',0000970204\,t.$$

C'est à l'aide des formules (A) que l'on calcule les *variations annuelles* en ascension droite et en déclinaison inscrites dans les Catalogues à côté de chaque étoile. Les quantités *m* et *n* ne sont pas rigoureusement constantes, mais pour des durées de dix ans, par exemple, on peut les regarder comme telles ; on les désigne quelquefois sous le nom de *constantes de la précession*.

En prenant pour plan fixe celui de l'écliptique au commencement de 1850 et ramenant à cette époque l'origine du temps *t*, on a

$$\omega = 23^\circ 27' 31'',83,$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} = 0'',13568 - 0'',00044340\,t,$$

$$\frac{d\mu}{dt} = 0'',14790 - 0'',00048336\,t,$$

$$m = 46'',06010 + 0'',00028373\,t,$$

$$n = 20'',05240 - 0'',00008663\,t.$$

Les formules (A) ont été obtenues en bornant l'approximation au premier terme du développement en série de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{D}$. S'il devenait nécessaire d'avoir égard aux termes d'ordres supérieurs, on le pourrait facilement par la différentiation successive des mêmes valeurs (A). Ainsi on aurait, par exemple, pour les termes en $\frac{d^2\mathcal{A}}{dt^2}$ et $\frac{d^2\mathcal{D}}{dt^2}$, et pour l'époque $1850 + t$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\mathcal{A}}{dt^2}\right) = 0'',00014187 - 0'',00004332 \operatorname{tang}\mathcal{D}\sin\mathcal{A} + \tfrac{1}{4} n^2(1 + 2\operatorname{tang}^2\mathcal{D})\sin 2\mathcal{A} + \tfrac{1}{2} mn \operatorname{tang}\mathcal{D}\cos\mathcal{A},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\mathcal{D}}{dt^2}\right) = - 0'',00004332 \cos\mathcal{A} - \tfrac{1}{2} n^2 \sin^2\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D} - \tfrac{1}{2} mn \sin\mathcal{A}.$$

Dans la recherche des valeurs de $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ et $\frac{d\mathcal{D}}{dt}$, nous avons supposé ω constant, ce qu'il est toujours permis de faire lorsqu'il s'agit de durées moindres que dix ans, car alors la différence $\omega - \omega'$ est une quantité insensible. Si l'on voulait, cependant, tenir compte de la variation de ω, il faudrait corriger les valeurs précédentes de $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ et de $\frac{d\mathcal{D}}{dt}$, des termes en $\frac{d\omega}{dt}$ qui s'en déduisent par la différentiation, termes qui sont, comme il est aisé de le reconnaître,

Pour l'ascension droite...... $-\cos\mathcal{A}\operatorname{tang}\mathcal{D}\frac{d\omega}{dt}$,

Pour la déclinaison......... $+\sin\mathcal{A}\frac{d\omega}{dt}$,

et l'on serait ainsi conduit aux formules plus complètes que voici :

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= m + n\sin\mathcal{A}\operatorname{tang}\mathcal{D} - \cos\mathcal{A}\operatorname{tang}\mathcal{D}\frac{d\omega}{dt},\\ \frac{d\mathcal{D}}{dt} &= n\cos\mathcal{A} + \sin\mathcal{A}\frac{d\omega}{dt},\end{aligned}\right.$$

$\frac{d\omega}{dt}$ ayant pour valeur $0'',0000196866$.

Actuellement, soient (*fig.* 10)

S la position d'une étoile;
E*e* l'écliptique fixe de 1850;
b son pôle.

Soient de plus

FN l'équateur de $1850 + t$;
EN celui de $1850 + t'$;
c, *a* les pôles respectifs de ces cercles.

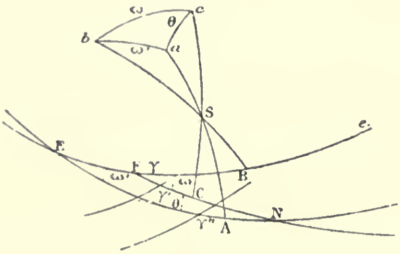
Les coordonnées équatoriales de S en 1850 + t seront représentées par les arcs $\Upsilon' C = \mathcal{A}$, $SC = \mathcal{D}$ et celles relatives à l'époque 1850 + t' par ceux $\Upsilon'' A = \mathcal{A}'$ et $SA = \mathcal{D}'$. D'après cela, et en posant

$$ENF = \theta,\quad EF = \psi' - \psi,\quad E\Upsilon' = \mu,\quad E\Upsilon'' = \mu',\quad EN = 90^\circ + z',\quad FN = 90^\circ - z,$$

on aura

$$FC = \mathcal{A} + \mu,\quad EA = \mathcal{A}' + \mu',$$
$$CN = FN - FC = 90^\circ - (\mathcal{A} + \mu + z),$$
$$AN = EN - EA = 90^\circ - (\mathcal{A}' + \mu' - z').$$

Fig. 10.



Maintenant on a, par les formules de Delambre appliquées au triangle sphérique ENF,

$$\sin\tfrac{1}{2}(z' + z)\cos\frac{\theta}{2} = \cos\tfrac{1}{2}(\omega' + \omega)\sin\tfrac{1}{2}(\psi' - \psi),$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(z' + z)\cos\frac{\theta}{2} = \cos\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega)\cos\tfrac{1}{2}(\psi' - \psi),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(z' - z)\sin\frac{\theta}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega)\cos\tfrac{1}{2}(\psi' - \psi),$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(z' - z)\sin\frac{\theta}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(\omega' + \omega)\sin\tfrac{1}{2}(\psi' - \psi),$$

relations d'où l'on déduit

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(z' + z) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\omega' + \omega)}{\cos\frac{1}{2}(\omega' - \omega)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\psi' - \psi),$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(z' - z) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega' - \omega)}{\sin\frac{1}{2}(\omega' + \omega)}\cot\tfrac{1}{2}(\psi' - \psi),$$

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(z' + z)}{\cos\frac{1}{2}(z' - z)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega' + \omega),$$

c'est-à-dire

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(z'+z) &= \cos\tfrac{1}{2}(\omega'+\omega)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\psi'-\psi),\\ \tfrac{1}{2}(z'-z) &= \frac{\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega)}{\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\psi'-\psi)},\\ \operatorname{tang}\frac{\theta}{2} &= \sin\tfrac{1}{2}(z'+z)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega'+\omega),\end{aligned}\right.$$

en remarquant que $\frac{1}{2}(z'-z)$ et $\frac{1}{2}(\omega'-\omega)$ sont de très petits angles.

On a, d'un autre côté, dans le triangle sphérique Sac,

$$cS = 90^\circ - \mathcal{D},\quad aS = 90^\circ - \mathcal{D}',\quad ca = \theta,$$

$$Sca = 90^\circ - CN = \mathcal{A} + \mu + z,\qquad Sac = 90^\circ + AN = 180^\circ - (\mathcal{A}' + \mu' - z').$$

Si donc on pose

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= \mathcal{A} + \mu + z,\\ A' &= \mathcal{A}' + \mu' - z',\end{aligned}\right.$$

on aura

$$(\beta)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin A'\cos\mathcal{D}' &= \cos\mathcal{D}\sin A,\\ \cos A'\cos\mathcal{D}' &= \cos\mathcal{D}\cos A\sin\theta - \sin\mathcal{D}\sin\theta,\\ \sin\mathcal{D}' &= \cos\mathcal{D}\cos A\sin\theta + \sin\mathcal{D}\cos\theta.\end{aligned}\right.$$

Les valeurs de ω et de μ, ainsi que celles de ω' et μ', étant connues par les formules de précession, on aura, par les relations (α), (β) et (a), tout ce qu'il est nécessaire de connaître pour obtenir $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{D}'$ en fonction de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{D}$. En effet, z', z et θ ayant été déterminés par les formules (α), on aura A par la première des relations (a); après quoi les formules (β) feront connaître $\mathcal{D}'$ et A′, d'où résultera $\mathcal{A}'$, en vertu de la seconde des équations (a).

On peut simplifier le calcul de A′ et $\mathcal{D}'$, et le rendre plus rigoureux, en faisant usage des relations qui expriment les variations $(A'-A)$ et $(\mathcal{D}'-\mathcal{D})$ dans le temps $(t'-t)$, relations que l'on peut obtenir comme il suit.

Multiplions la première des équations (β) par $\cos A$, la deuxième par $\sin A$, puis retranchons les produits l'un de l'autre ; nous obtiendrons

$$\cos\mathcal{D}'\sin(A'-A) = \sin A\cos\mathcal{D}\sin\theta\left(\operatorname{tang}\mathcal{D} + \cos A\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right).$$

La première des équations (β), multipliée par $\sin A$ et ajoutée à la seconde multipliée par cosA, donne pareillement

$$\cos\textcircled{D}'\cos(A'-A)=\cos\textcircled{D}-\cos\textcircled{D}\cos A\sin\theta\left(\operatorname{tang}\textcircled{D}+\cos A\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right),$$

en sorte que, si l'on pose, pour simplifier,

$$(A)\qquad p=\sin\theta\left(\operatorname{tang}\textcircled{D}+\cos A\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right),$$

on aura, pour déterminer $(A'-A)$,

$$(B)\qquad \operatorname{tang}(A'-A)=\frac{p\sin A}{1-p\cos A}\cdot$$

Quant à la relation qui exprime $(\textcircled{D}'-\textcircled{D})$, elle est immédiatement fournie par le triangle Sac, qui donne, en vertu d'une des analogies de Neper,

$$(C)\qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\textcircled{D}'-\textcircled{D})=\frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta.$$

Ainsi, aux trois équations (β) on pourra substituer avec avantage celles (A), (B), (C).

III. — Formules relatives à la nutation.

En désignant par $\odot$ la longitude du Soleil, par ☾ la longitude de la Lune et par ☊ celle de son nœud ascendant, on a, d'après Peters (*Numerus constans nutationis*, etc.), pour la nutation luni-solaire de l'obliquité,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}\Delta\omega&=9'',2231\cos\text{☊}-0'',0897\cos2\text{☊}\\&\quad+0'',0886\cos2\text{☾}+0'',5510\cos2\odot,\end{aligned}\right.$$

et par suite pour la nutation en longitude $\Delta\mathcal{L}$, en prenant pour l'obliquité moyenne la valeur 23° 27′ 54″, 2 qu'elle avait en 1800 et que l'on peut continuer d'adopter pendant une longue suite d'années,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}\Delta\mathcal{L}&=-17'',2405\sin\text{☊}+0'',2073\sin2\text{☊}\\&\quad-0'',2041\sin2\text{☾}-1'',2694\sin2\odot.\end{aligned}\right.$$

Les expressions de $\Delta\omega$ et de $\Delta\mathcal{L}$ ainsi déterminées, les nutations d'ascension droite et de déclinaison sont immédiatement données en fonction de ces éléments par les formules que nous avons fait connaître au § II, c'est-à-dire que l'on a

$$(3)\quad \begin{cases} d\mathcal{A} = (\cos\omega + \sin\omega \sin\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D})\,\Delta\mathcal{L} - \cos\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D}\,\Delta\omega, \\ d\mathcal{D} = \sin\omega \cos\mathcal{A}\,\Delta\mathcal{L} + \sin\mathcal{A}\,\Delta\omega \quad (^1). \end{cases}$$

IV. — Nutation solaire et lunaire en ascension droite et en déclinaison.

En n'ayant égard qu'aux termes en ☊, c'est-à-dire en posant

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta\omega = 9'',2231 \cos ☊, \\ \Delta\mathcal{L} = -17'',2405 \sin ☊, \end{cases}$$

(¹) Voici du reste une démonstration directe de ces formules, fondée sur des considérations purement géométriques.

En conservant les mêmes dénominations que dans le texte, on a, par les principes de la Trigonométrie sphérique,

$$(1)\qquad \sin\mathcal{D} = \sin\omega \cos\lambda \sin\mathcal{L} + \cos\omega \sin\lambda,$$

$$(2)\qquad \operatorname{tang}\mathcal{A} = -\frac{\operatorname{tang}\lambda \sin\omega + \sin\mathcal{L} \cos\omega}{\cos\mathcal{L}}.$$

Considérons d'abord la première de ces équations. L'effet de la nutation, nous l'avons dit, est de produire une petite augmentation dans la longitude de chaque étoile et de faire varier un peu l'obliquité ω de l'écliptique. Comme ces variations sont supposées fort petites, nous pourrons les calculer séparément et les ajouter ensemble. Supposons donc, en premier lieu, que l'obliquité ω ne change pas, et appelons $\mathcal{L}'$ ce que devient $\mathcal{L}$ par l'effet de la nutation; soit, d'ailleurs, $\mathcal{D}'$ la nouvelle valeur de $\mathcal{D}$ qui en résulte : nous aurons

$$\sin\mathcal{D}' = \sin\omega \cos\lambda \sin\mathcal{L}' + \cos\omega \sin\lambda,$$

équation qui, étant combinée avec celle (1), donne

$$\sin\mathcal{D}' - \sin\mathcal{D} = \sin\omega \cos\lambda (\sin\mathcal{L}' - \sin\mathcal{L})$$

ou

$$\sin\tfrac{1}{2}(\mathcal{D}' - \mathcal{D}) \cos\tfrac{1}{2}(\mathcal{D}' + \mathcal{D}) = \sin\omega \cos\lambda [\sin\tfrac{1}{2}(\mathcal{L}' - \mathcal{L}) \cos\tfrac{1}{2}(\mathcal{L}' + \mathcal{L})].$$

La différence des longitudes, ou $\mathcal{L}' - \mathcal{L}$, est ce que nous avons appelé la *nutation en longitude* et désigné par $\Delta\mathcal{L}$; $\mathcal{D}' - \mathcal{D}$ est la *nutation en déclinaison,* que nous avons représentée par $d\mathcal{D}$; ainsi

$$\sin\frac{d\mathcal{D}}{2} \cos\left(\mathcal{D} + \frac{d\mathcal{D}}{2}\right) = \sin\omega \cos\lambda \sin\frac{\Delta\mathcal{L}}{2} \cos\left(\mathcal{L} + \frac{\Delta\mathcal{L}}{2}\right).$$

Comme les arcs $d\mathcal{D}$ et $\Delta\mathcal{L}$ sont très petits, on peut substituer le rapport de ces arcs à celui de leurs sinus, et, en se bornant aux premières puissances de ces variations, ce qui est bien suffisant lorsqu'on s'en tient aux centièmes de seconde, on obtient, pour la *nutation lunaire* en ascension droite et en déclinaison, ω ayant toujours la valeur que nous lui avons supposée,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} d\mathcal{A} &= -9'',2231\cos\mathcal{A}\,\mathrm{tang}\,\mathcal{D}\cos\text{☊}\\ &\qquad -(15'',8148+6'',8650\sin\mathcal{A}\,\mathrm{tang}\,\mathcal{D})\sin\text{☊},\\ d\mathcal{D} &= +9'',2231\sin\mathcal{A}\cos\text{☊}-6'',8650\cos\mathcal{A}\sin\text{☊}.\end{aligned}\right.$$

Quant à la *nutation solaire,* qui dépend de la longitude du Soleil $\odot$, elle est déterminée en prenant simplement

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta\omega &= 0'',5509\cos 2\odot,\\ \Delta\mathcal{L} &= -1'',2692\sin 2\odot.\end{aligned}\right.$$

---

on aura

$$d\mathcal{D} = \frac{\Delta\mathcal{L}\sin\omega\cos\lambda\cos\mathcal{L}}{\cos\mathcal{D}}.$$

Cette expression de $d\mathcal{D}$ se simplifie encore par la considération du triangle sphérique PHS (*fig.* 1), dans lequel $\mathrm{HPS} = 90^\circ + \mathcal{A}$ et $\mathrm{PHS} = 90^\circ - \mathcal{L}$. On en déduit en effet,

$$\frac{\sin\mathrm{PS}}{\sin\mathrm{HS}} = \frac{\sin\mathrm{PHS}}{\sin\mathrm{HPS}} \quad \text{ou} \quad \frac{\cos\mathcal{D}}{\cos\lambda} = \frac{\cos\mathcal{L}}{\cos\mathcal{A}},$$

valeur qui, substituée dans l'expression de $d\mathcal{D}$, donne

$$(a)\qquad d\mathcal{D} = \Delta\mathcal{L}\sin\omega\cos\mathcal{A}.$$

Occupons-nous actuellement de déterminer $d\mathcal{A}$ ou la nutation en ascension droite, et pour cela considérons la seconde des formules (1), savoir

$$\mathrm{tang}\,\mathcal{A} = -\frac{\mathrm{tang}\,\lambda\sin\omega+\sin\mathcal{L}\cos\omega}{\cos\mathcal{L}},$$

$\mathcal{L}'$ représentant toujours ce que devient $\mathcal{L}$ par l'effet de la nutation; on aura, en appelant $\mathcal{A}'$ la valeur de $\mathcal{A}$ correspondant à celle de $\mathcal{L}'$,

$$\mathrm{tang}\,\mathcal{A}' \quad -\frac{\mathrm{tang}\,\lambda\sin\omega+\sin\mathcal{L}'\cos\omega}{\cos\mathcal{L}'},$$

et par conséquent, en retranchant ces deux équations l'une de l'autre,

$$\mathrm{tang}\,\mathcal{A}'-\mathrm{tang}\,\mathcal{A} = -\mathrm{tang}\,\lambda\sin\omega(\cos\mathcal{L}-\cos\mathcal{L}'')+\cos\omega\sin(\mathcal{L}'-\mathcal{L}),$$

c'est-à-dire, en mettant pour $\cos\mathcal{L}-\cos\mathcal{L}'$ sa valeur trigonométrique,

$$\frac{\sin(\mathcal{A}'-\mathcal{A})}{\cos\mathcal{A}\cos\mathcal{A}'} = -\frac{2\,\mathrm{tang}\,\lambda\sin\omega\sin\frac{1}{2}(\mathcal{L}'+\mathcal{L})\sin\frac{1}{2}(\mathcal{L}'-\mathcal{L})+\sin(\mathcal{L}'-\mathcal{L})\cos\omega}{\cos\mathcal{L}\cos\mathcal{L}'}.$$

$\mathcal{A}'-\mathcal{A}$ est la *nutation en ascension droite* que nous avons représentée par $d\mathcal{A}$, d'où résulte

$$(4)\qquad \begin{cases} d\mathcal{A} = -0'',5509\cos\mathcal{A}\,\mathrm{tang}\,\mathcal{D}\cos 2\odot \\ \qquad\qquad -(1'',1642 + 0'',5054\sin\mathcal{A}\,\mathrm{tang}\,\mathcal{D})\sin 2\odot, \\ d\mathcal{D} = +0'',5509\sin\mathcal{A}\cos 2\odot - 0'',5054\cos\mathcal{A}\sin 2\odot. \end{cases}$$

Cette nutation est très faible, et ce n'est que lorsqu'on veut obtenir une très grande précision qu'il est nécessaire d'y avoir égard.

---

et, comme elle est extrêmement petite, ainsi que $\mathcal{L}'-\mathcal{L}$, on peut se borner aux premières puissances de ces quantités et, par suite, substituer aux rapports des sinus celui des arcs; si, de plus, on pose $\mathcal{L}=\mathcal{L}'$, $\mathcal{A}=\mathcal{A}'$, on aura

$$d\mathcal{A} = \frac{\Delta\mathcal{L}\cos^2\mathcal{A}(-\mathrm{tang}\,\lambda\sin\omega\sin\mathcal{L}+\cos\omega)}{\cos^2\mathcal{L}}$$

ou, en mettant pour $\cos\mathcal{L}$ sa valeur ci-dessus,

$$d\mathcal{A} = \frac{\Delta\mathcal{L}(-\sin\lambda\cos\lambda\sin\omega\sin\mathcal{L}+\cos^2\lambda\cos\omega)}{\cos^2\mathcal{D}}.$$

Mais, d'après la première des équations (1),

$$\sin\omega\cos\lambda\sin\mathcal{L} = \sin\mathcal{D} - \cos\omega\sin\lambda;$$

donc

$$d\mathcal{A} = \frac{\Delta\mathcal{L}(-\sin\lambda\sin\mathcal{D}+\cos\omega)}{\cos^2\mathcal{D}}.$$

Maintenant, si pour éliminer λ on remplace $\sin\lambda$ par sa valeur

$$\cos\omega\sin\mathcal{D} - \sin\omega\cos\mathcal{D}\sin\mathcal{A},$$

déduite du triangle sphérique ΠPS, on aura enfin

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \frac{\Delta\mathcal{L}\,[-\sin\mathcal{D}(\cos\omega\sin\mathcal{D}-\sin\omega\cos\mathcal{D}\sin\mathcal{A})+\cos\omega]}{\cos^2\mathcal{D}} \\ &= \frac{\Delta\mathcal{L}(-\cos\omega\sin^2\mathcal{D}+\sin\omega\sin\mathcal{D}\cos\mathcal{D}\sin\mathcal{A}+\cos\omega)}{\cos^2\mathcal{D}} \\ &= \Delta\mathcal{L}\left[\frac{\cos\omega(1-\sin^2\mathcal{D})}{\cos^2\mathcal{D}}+\sin\omega\,\mathrm{tang}\,\mathcal{D}\sin\mathcal{A}\right] \end{aligned}$$

ou

$$(b)\qquad d\mathcal{A} = \Delta\mathcal{L}(\cos\omega+\sin\omega\,\mathrm{tang}\,\mathcal{D}\sin\mathcal{A}).$$

Dans ce qui précède, nous avons admis que l'obliquité ω restait constante lorsque $\mathcal{L}$ venait à varier par l'effet de la nutation. Nous allons maintenant faire la supposition inverse, c'est-à-dire regarder $\mathcal{L}$ comme constant lorsque ω varie, et chercher, dans ce cas, quelles sont les variations qui en résultent pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$.

Reprenons les formules (1), lesquelles, en posant

$$\mathrm{tang}\,\theta = \frac{\sin\mathcal{L}}{\mathrm{tang}\,\lambda},$$

On rend les formules (2) calculables par logarithmes en les écrivant de cette manière,

$$d\mathcal{A} = -9'',2231 \cos\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D} \cos\Omega$$
$$\times \left[1 + \frac{(15'',8148 + 6'',8650 \sin\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D})}{\cos\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D} \cos\Omega}\right] \sin\Omega,$$

$$d\mathcal{D} = +9'',2231 \sin\mathcal{A} \cos\Omega \left[1 - \frac{6'',8650 \cos\mathcal{A} \sin\Omega}{9'',2231 \sin\mathcal{A} \cos\Omega}\right],$$

---

peuvent s'écrire

$$\sin\mathcal{D} = \sin\lambda \cos(\theta - \omega),$$
$$\operatorname{tang}\mathcal{A} = \frac{\operatorname{tang}\mathcal{L} \sin(\theta - \omega)}{\sin\theta}.$$

Si l'on suppose que ω se change en $\omega + \Delta\omega$ par l'effet de la nutation, $\mathcal{L}$ et λ restant les mêmes, l'angle θ ne variera pas, mais $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ se changeront respectivement en $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{D}'$, et, en ne considérant que la valeur de $\sin\mathcal{D}$, on aura

$$\sin\mathcal{D}' = \frac{\sin\lambda \cos(\theta - \omega - \Delta\omega)}{\cos\theta};$$

cette valeur, combinée avec celle de $\sin\mathcal{D}$, donne

$$\sin\mathcal{D}' - \sin\mathcal{D} = \frac{\sin\lambda[\cos(\theta - \omega - \Delta\omega) - \cos(\theta - \omega)]}{\cos\theta}$$

ou

$$\sin\tfrac{1}{2}(\mathcal{D}' - \mathcal{D}) \cos\tfrac{1}{2}(\mathcal{D}' + \mathcal{D}) = \frac{\sin\lambda \dfrac{\sin\Delta\omega}{2} \sin\left(\theta - \omega - \dfrac{\Delta\omega}{2}\right)}{\cos\theta},$$

et, substituant dans cette dernière $\dfrac{\frac{1}{2}(\mathcal{D}' - \mathcal{D})}{\frac{\Delta\omega}{2}}$ à la place de $\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\mathcal{D}' - \mathcal{D})}{\frac{\sin\Delta\omega}{2}}$, puis posant $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ et $\Delta\omega = 0$, on obtient

$$(\mathcal{D}' - \mathcal{D}) = \frac{\Delta\omega \sin\lambda \sin(\theta - \omega)}{\cos\mathcal{D} \cos\theta},$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{D}' - \mathcal{D} = \frac{\Delta\omega \operatorname{tang}\mathcal{A} \sin\lambda \operatorname{tang}\theta}{\cos\mathcal{D} \operatorname{tang}\mathcal{L}},$$

$\sin(\theta - \omega)$ ayant été remplacé par sa valeur $\dfrac{\operatorname{tang}\mathcal{A} \sin\theta}{\operatorname{tang}\mathcal{L}}$.

Si l'on observe maintenant que

$$\sin\lambda \operatorname{tang}\theta = \sin\mathcal{L} \cos\lambda,$$

on aura

$$(\mathcal{D}' - \mathcal{D}) = \frac{\Delta\omega \operatorname{tang}\mathcal{A}}{\cos\mathcal{D}} \cos\lambda \cos\mathcal{L},$$

car, si l'on pose

$$\cot\varphi = \frac{15'',8148 + 6'',8650 \sin\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D}}{9'',2231 \cos\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D}}$$

pour la première et

$$\cot\varphi' = \frac{6'',8650 \cot\mathcal{A}}{9'',2231}$$

pour la seconde, on obtient

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} d\mathcal{A} &= -\frac{9'',2231 \cos\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D}}{\sin\varphi} \sin(\varphi + \text{☊}),\\ d\mathcal{D} &= -\frac{9'',2231 \sin\mathcal{A}}{\sin\varphi'} \sin(\text{☊} - \varphi'),\end{aligned}\right.$$

formules auxquelles le calcul logarithmique s'applique immédiatement.

Pour les applications, il faut toujours faire en sorte que les coefficients qui multiplient $\sin(\varphi + \text{☊})$ et $\sin(\text{☊} - \varphi')$ dans les valeurs de $d\mathcal{A}$ et $d\mathcal{D}$ soient positifs. Or, c'est à quoi il est aisé de parvenir en ajoutant aux arcs $(\varphi + \text{☊})$ et $(\text{☊} - \varphi')$ une demi-

---

et comme dans le triangle sphérique HPS on a

$$\cos\lambda \cos\mathcal{L} = \cos\mathcal{A} \cos\mathcal{D},$$

il viendra

$$(a')\qquad (\mathcal{D}' - \mathcal{D}) = \Delta\omega \sin\mathcal{A}.$$

Relativement à la variation $d\mathcal{A}$ de l'ascension droite, on a

$$\operatorname{tang}\mathcal{A}' = \frac{\operatorname{tang}\mathcal{L} \sin(\theta - \omega - \Delta\omega)}{\sin\theta},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\mathcal{A}' - \operatorname{tang}\mathcal{A} = \frac{\operatorname{tang}\lambda \sin(\theta - \omega - \Delta\omega) - \sin(\theta - \omega)}{\sin\theta},$$

et, par suite,

$$\sin(\mathcal{A}' - \mathcal{A}) = -\frac{2 \operatorname{tang}\lambda \cos\mathcal{A} \cos\mathcal{A}' \sin\frac{\Delta\omega}{2} \cos\left(\theta - \omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)}{\sin\theta}.$$

Par les mêmes raisons que précédemment, on peut écrire

$$\mathcal{A}' - \mathcal{A} = d\mathcal{A} = -\frac{\Delta\omega \operatorname{tang}\mathcal{L} \cos^2\mathcal{A} \cos(\theta - \omega)}{\sin\theta};$$

mais

$$\cos(\theta - \omega) = \frac{\sin\mathcal{D} \cos\theta}{\sin\lambda}:$$

circonférence ou 180°; ainsi l'on a

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} d\mathcal{A} &= \frac{9'',2231 \cos\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D}}{\sin\varphi} \sin(180^\circ + \varphi + \Omega), \\ d\mathcal{D} &= \frac{9'',2231 \sin\mathcal{A}}{\sin\varphi'} \sin(180^\circ - \varphi' + \Omega). \end{aligned} \right.$$

φ et φ' sont ici supposés positifs; mais, s'ils étaient négatifs, il suffirait évidemment, pour conserver le signe positif à ces formules, d'ajouter aux arcs $\varphi + \Omega$ et $\Omega - \varphi'$ une circonférence entière ou 360°.

Les formules (4) sont susceptibles d'une transformation analogue à la précédente. Observons toutefois que l'on peut se dispenser d'y avoir recours, en remarquant que ces équations, dont la forme est la même que celle des équations (2), ont des coefficients qui sont à peu près les 0,075 des premiers, en sorte qu'il suffit de multiplier par ce nombre les valeurs de la nutation lunaire en ascension et en déclinaison, pour avoir immédiatement celles qui se rapportent à la nutation solaire.

---

ainsi

$$d\mathcal{A} = -\frac{\Delta\omega \cos^2\mathcal{A} \sin\mathcal{D} \operatorname{tang}\mathcal{L}}{\sin\lambda \operatorname{tang}\theta}.$$

On a d'ailleurs

$$\sin\lambda \operatorname{tang}\theta = \sin\mathcal{L} \cos\lambda,$$

en sorte que

$$d\mathcal{A} = -\frac{\Delta\omega \cos^2\mathcal{A} \sin\mathcal{D}}{\cos\lambda \cos\mathcal{L}}.$$

Mais

$$\cos\lambda \cos\mathcal{L} = \cos\mathcal{A} \cos\mathcal{D};$$

par conséquent,

$$(b')\qquad d\mathcal{A} = -\Delta\omega \cos\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D}.$$

En réunissant maintenant les variations (a) et (a'), (b) et (b') que nous venons de considérer séparément, on aura, pour l'expression des variations complètes $d\mathcal{A}$ et $d\mathcal{D}$ qu'éprouvent les coordonnées $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ par l'effet de la nutation, c'est-à-dire lorsque ω et $\mathcal{L}$ varient simultanément,

$$\begin{gathered} d\mathcal{A} = \Delta\mathcal{L}(\cos\omega + \sin\omega \sin\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D}) - \Delta\omega \cos\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D}, \\ d\mathcal{D} = \Delta\mathcal{L} \sin\omega \cos\mathcal{A} + \Delta\omega \sin\mathcal{A}, \end{gathered}$$

formules qui sont bien celles données dans le texte.

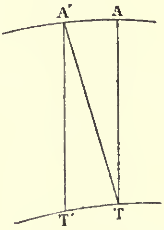
CHAPITRE V.

CALCUL DE L'ABERRATION.

I. — Aberration des étoiles en ascension droite et en déclinaison.

On sait que la lumière nous vient du Soleil en $497^s,78$, temps pendant lequel la Terre décrit, parallèlement à la direction de son mouvement, un petit arc dont la valeur, récemment déterminée par Struve, est de $20'',4451$ (¹). Il en résulte que, lorsqu'un astre est observé en A (*fig.* 11), cet astre, au lieu d'être perçu suivant la direction AT, l'est réellement en AT′, c'est-à-dire suivant la diagonale du parallélogramme formé par le côté AT et l'arc TT′ que

Fig. 11.



(¹) Struve, *Sur le coefficient constant de l'aberration.* Elle a été déduite par ce grand astronome de l'observation des lieux apparents d'un grand nombre d'étoiles. Voici un Tableau des valeurs de cette constante, qui ont été proposées à différentes époques :

	″
Delambre (par l'observation des satellites de ♃) .	20,253
Bessel	20,000
De Lindenau	20,610
Brinckley	20,370
Bailly	20,360

décrit la Terre en $497^s,78$. L'angle ATA', compris entre les côtés TA et TA', est ce qu'on nomme l'*angle d'aberration,* et l'on appelle *constante de l'aberration* l'arc $TT' = 20'',4451$, parcouru par la Terre en $8^m\,18^s$. Le mouvement de la Terre autour de son axe produit aussi une aberration semblable à la précédente et que l'on appelle *aberration diurne;* mais, comme le mouvement de rotation de la Terre n'est que le $\frac{1}{63}$ environ de son mouvement de translation, l'effet de cette aberration n'excède pas $0'',32$ pour des lieux situés sur l'équateur, où cet effet est le plus sensible, et par suite on peut, dans la plupart des cas, se dispenser d'y avoir égard.

Soit ρ le rayon vecteur de la Terre, que nous supposerons être aussi celui de la sphère céleste sur laquelle on projette les astres. Admettons que la vitesse de la lumière soit représentée par ce rayon vecteur, et soit ds l'arc que décrit la Terre en $497^s,78$, en sorte que $\frac{ds}{\rho''} = 20'',4451$.

En concevant le lieu de l'astre rapporté à trois coordonnées rectangulaires x, y, z ayant leur origine au centre de la Terre et dirigées, l'axe des x positifs vers l'équinoxe du printemps, l'axe des y positifs vers le solstice d'été et l'axe des z vers le pôle de l'écliptique, on aura, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ désignant les angles que forment respectivement la distance de l'astre à la Terre, et sa projection avec le plan xy de l'équateur (c'est-à-dire l'ascension droite et la déclinaison de l'étoile), on aura, disons-nous,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \rho\cos\mathcal{A}\cos\mathcal{D},\\ y &= \rho\sin\mathcal{A}\cos\mathcal{D},\\ z &= \rho\sin\mathcal{D}, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$\tang\mathcal{A} = \frac{y}{x},$$

et par suite

$$(2)\qquad d\mathcal{A} = \frac{1}{x^2}(x\,dy - y\,dx)\cos^2\mathcal{A}.$$

Soient maintenant (*fig.* 12)

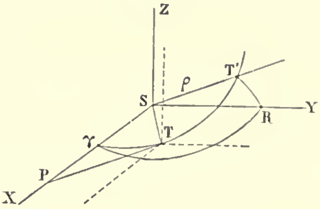
ΥTT' l'orbite de la Terre supposée circulaire;
T la position que cet astre occupe sur cette orbite;
ΥR l'équateur;

TP une tangente à $\gamma TT'$;

ST' une parallèle à cette tangente;

X, Y, Z trois axes rectangulaires menés par le centre du Soleil et parallèles à ceux x, y, z.

Fig. 12.



On aura, pour les cosinus des angles α, β, γ que forme avec les axes des X, Y, Z ou des x, y, z la tangente à la courbe ou l'arc ds,

$$(3)\qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds},\quad \cos\beta = \frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

et par suite, pour la valeur ci-dessus de $d\mathcal{A}$,

$$d\mathcal{A} = \frac{ds}{x}(\cos\beta - \cos\alpha \operatorname{tang}\mathcal{A})\cos^2\mathcal{A},$$

équation qui, en y substituant pour x sa valeur (1), devient

$$(\mathrm{A})\qquad d\mathcal{A} = 20'',4451(\cos\beta\cos\mathcal{A} - \cos\alpha\sin\mathcal{A})\,\text{séc}\,\mathcal{D}.$$

Occupons-nous de la détermination de $d\mathcal{D}$. La troisième des équations (1), différentiée, puis divisée par ds, donne

$$\frac{dz}{ds} = \frac{d\rho\sin\mathcal{D} + \rho\cos\mathcal{D}\,d\mathcal{D}}{ds},$$

d'où l'on tire, en ayant égard aux équations (3),

$$(4)\qquad d\mathcal{D} = 20'',4451\left(\cos\gamma - \frac{d\rho}{ds}\sin\mathcal{D}\right)\text{séc}\,\mathcal{D}.$$

On a d'ailleurs

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad \rho\,d\rho = x\,dx + y\,dy + z\,dz,$$

en sorte que

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{x}{\rho}\frac{dx}{ds} + \frac{y}{\rho}\frac{dy}{ds} + \frac{z}{\rho}\frac{dz}{ds},$$

et, si dans cette expression de $\frac{d\rho}{ds}$ on substitue pour $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ leurs valeurs (3), et pour x, y, z leurs valeurs (1), puis qu'on porte la valeur qui en résulte dans l'expression ci-dessus de $d\mathcal{D}$, on obtient

$$(\mathrm{B}) \qquad d\mathcal{D} = \frac{ds}{\rho}[\cos\gamma\cos\mathcal{D} - \sin\mathcal{D}(\cos\mathcal{A}\cos\alpha + \cos\beta\sin\mathcal{A})].$$

Ces formules (A) et (B) expriment les variations survenues dans l'ascension droite et la déclinaison par l'effet de l'aberration; elles renferment les angles α, β, γ que nous y avons introduits par leurs cosinus, mais rien n'est plus facile que de les en éliminer.

En effet, considérons le triangle sphérique ΥRT′ (*fig.* 12), dans lequel

$$\Upsilon\mathrm{R} = 90^\circ, \quad \Upsilon\mathrm{T}' = \Upsilon\mathrm{ST}' = \alpha, \quad \mathrm{RT}' = \mathrm{T}'\mathrm{SR} = \beta, \quad \mathrm{T}\Upsilon\mathrm{R} = \omega;$$

on a, par ce triangle,

$$(a) \qquad \cos\beta = \sin\alpha\cos\omega.$$

On a ensuite, en considérant le triangle que forment les points Υ, T′ et celui où l'axe des z vient rencontrer la sphère céleste,

$$(b) \qquad \cos\gamma = \sin\alpha\cos\omega.$$

Maintenant, v désignant la longitude héliocentrique de la Terre ou l'angle PST, on a

$$\alpha = 90^\circ + v,$$

et comme, en appelant $\odot$ la longitude du Soleil,

$$\odot = 180^\circ + v,$$

on en conclut

$$\alpha = \odot - 90^\circ;$$

on a donc

$$(c) \qquad \sin\alpha = -\cos\odot, \quad \cos\alpha = \sin\odot.$$

Ces valeurs (c), jointes à celles (a) et (b), permettent d'effectuer l'élimination que nous avons en vue. En effet, par la substitution des valeurs (a) et (b) dans les équations (A) et (B), et eu égard à celles (c), on trouve

$$(2) \qquad \begin{cases} d\mathcal{A} = -20'',451(\sin\mathcal{A}\sin\odot + \cos\omega\cos\mathcal{A}\cos\odot)\,\mathrm{s\acute{e}c}\,\mathcal{D}, \\ d\mathcal{D} = -20'',451(\cos\mathcal{A}\sin\odot - \cos\omega\sin\mathcal{A}\cos\odot)\sin\mathcal{D} \\ \qquad\qquad - 20'',451\sin\omega\cos\odot\cos\mathcal{D}, \end{cases}$$

formules qui ne renferment plus rien d'indéterminé. On les rend calculables par logarithmes, en les écrivant de la manière suivante

$$d\mathcal{A} = -20'',4451 \sin\mathcal{A} \sin\odot\,(1 + \cot\mathcal{A} \cos\omega \cot\odot)\,\text{séc}\,\mathcal{D},$$

$$d\mathcal{D} = -20'',4451 \sin\mathcal{D} \cos\mathcal{A} \sin\odot\,[1 - (\cos\omega\,\text{tang}\,\mathcal{A} - \cot\mathcal{D} \sin\omega\,\text{séc}\,\mathcal{D}) \cot\odot].$$

car, en posant

$$\text{tang}\,\psi = \cot\mathcal{A} \cos\omega$$

pour la première et

$$\text{tang}\,\psi' = \cos\omega\,\text{tang}\,\mathcal{A} - \cot\mathcal{D} \sin\omega\,\text{séc}\,\mathcal{D}$$

pour la seconde, on obtient

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned} d\mathcal{A} &= -20'',4451 \sin\mathcal{A} \sin\odot\,(1 + \text{tang}\,\psi \cot\odot)\,\text{séc}\,\mathcal{D}\\ &= -20'',4451 \sin\mathcal{A}\, \frac{\sin(\psi + \odot)}{\cos\psi}\,\text{séc}\,\mathcal{D}\\ &= \frac{20'',4451 \sin\mathcal{A}\,\text{séc}\,\mathcal{D}}{\cos\psi} \sin(180^\circ + \psi + \odot), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{aligned} d\mathcal{D} &= -20'',4451 \sin\mathcal{D} \cos\mathcal{A} \sin\odot\,(1 - \text{tang}\,\psi' \cot\odot)\\ &= -20'',4451 \sin\mathcal{D} \cos\mathcal{A}\, \frac{\sin(\odot - \psi')}{\cos\psi'}\\ &= \frac{20'',4451 \sin\mathcal{D} \cos\mathcal{A}}{\cos\psi'} \sin(180^\circ - \psi' + \odot). \end{aligned}\right.$$

Comme dans ces formules les coefficients de $\sin(180^\circ + \psi + \odot)$ et $\sin(180^\circ - \psi' + \odot)$ représentent respectivement les maxima d'aberration en ascension droite et en déclinaison, on voit, $\odot$ étant le seul élément qui y varie d'une manière sensible d'un jour à l'autre, que ces coefficients, ainsi que les arcs ψ et ψ', pourront être regardés comme constants pour une même étoile, ce qui facilitera extrêmement la mise en Table de ces formules.

II. — Cas où l'on tient compte de l'excentricité de l'orbite.

Les formules (α) qui précèdent ont été obtenues en négligeant les termes qui dépendent de l'excentricité e de l'orbite, c'est-à-dire en supposant cette orbite circulaire, ce qui peut suffire dans la généralité des cas, vu l'extrême petitesse de cette excentricité. Si l'on voulait cependant, pour des calculs plus précis, en tenir compte, voici par quelles considérations on serait conduit aux formules complètes.

En désignant par φ l'angle que la tangente à l'orbite forme avec le grand axe de cette courbe et par x et y les coordonnées héliocentriques de la Terre rapportées aux axes de cette orbite, on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dy}{dx},$$

et, comme

$$x = \rho\cos(v - \varpi), \quad y = \rho\sin(v - \varpi),$$

(v étant la longitude héliocentrique de la Terre et ϖ la longitude héliocentrique du périhélie de l'orbe terrestre), il en résulte

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin(v - \varpi)\,d\rho + \rho\cos(v - \varpi)\,dv}{\cos(v - \varpi)\,d\rho - \rho\sin(v - \varpi)\,dv}.$$

On a d'ailleurs

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(v - \varpi)},$$

d'où

$$d\rho = \frac{ae(1 - e^2)\sin(v - \varpi)\,dv}{[1 + e\cos(v - \varpi)]^2};$$

ainsi

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{e + \cos(v - \varpi)}{-\sin(v - \varpi)}.$$

Maintenant, si l'on suppose l'excentricité de l'orbite nulle, auquel cas

$$\operatorname{tang}\varphi = -\cot(v - \varpi),$$

on aura

$$\varphi = 90^\circ + v - \varpi.$$

Mais, φ_1 désignant la différence entre cette valeur et celle qui convient au cas d'une orbite elliptique, différence qui est toujours une très petite quantité, on a

$$\varphi = 90^\circ + v - \omega - \varphi_1,$$

et par suite

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{-\cos(v - \varpi) - \sin(v - \varpi)\operatorname{tang}\varphi_1}{\sin(v - \varpi) - \cos(v - \varpi)\operatorname{tang}\varphi_1}.$$

On a donc

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = -\frac{e\sin(v - \varpi)}{1 + e\cos(v - \varpi)}.$$

Comme la différence φ_1 est du même ordre que l'excentricité e, on peut développer cette différence suivant les puissances de e, et, en se bornant au premier ordre, on a

$$\varphi_1 = e\sin(v - \varpi);$$

on a par suite

$$\varphi = 90^\circ + v - \varpi - e\sin(v - \varpi).$$

Mais

$$\alpha = \varphi + \varpi;$$

donc

$$\alpha = 90^\circ + v - e\sin(v - \varpi).$$

Au lieu de v et ϖ, il est préférable d'introduire dans les calculs la longitude du Soleil $\odot$ et celle Π du périgée, quantités qui sont immédiatement fournies par les Tables; dès lors, et en remarquant que v et ϖ sont liés à $\odot$ et Π par les relations

$$\begin{aligned} \odot &= v + 180^\circ, & \Pi &= \varpi + 180^\circ, \\ v &= \odot - 180^\circ, & \varpi &= \Pi - 180^\circ, \end{aligned}$$

on obtient

$$\alpha = \odot - 90^\circ - e\sin(\odot - \Pi),$$

et telle est la valeur de l'angle α qui doit être substituée à celle du paragraphe précédent dans le cas que nous considérons. On en déduit, pour les valeurs de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, analogues à celles (c) du même paragraphe, et qui servent à opérer dans les formules (A) et (B) l'élimination de cet angle,

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= -\cos\odot - e\sin\odot\sin(\odot - \Pi), \\ \cos\alpha &= \sin\odot - e\cos\odot\sin(\odot - \Pi); \end{aligned}$$

par suite, on a

$$(\alpha')\left\{\begin{aligned} d\mathcal{A} = {} & -20'',4451 \operatorname{séc}\mathcal{D}(\cos\omega\cos\mathcal{A}\cos\odot + \sin\mathcal{A}\sin\odot) \\ & \qquad + e\cos\omega\cos\mathcal{A}\cos\Pi + e\sin\mathcal{A}\sin\Pi, \\ d\mathcal{D} = {} & -20'',4451 \sin\mathcal{D}(-\cos\omega\sin\mathcal{A}\cos\odot + \cos\mathcal{A}\sin\odot \\ & \qquad - e\cos\omega\sin\mathcal{A}\cos\Pi + e\cos\mathcal{A}\sin\Pi \\ & \qquad - 20'',4451\cos\mathcal{D}(\sin\omega\cos\odot + e\sin\omega\cos\Pi). \end{aligned}\right.$$

Ce sont les formules cherchées.

III. — Aberration en longitude et en latitude.

Les formules d'aberration en longitude et en latitude se déduisent aisément des précédentes en amenant le plan de l'équateur à coïncider avec celui de l'écliptique. On a alors $\omega = 0$, $\mathcal{A} = \mathcal{L}$, $\mathcal{D} = \lambda$, et par suite

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} d\mathcal{L} &= -20'',4451 \sec\lambda[\cos(\odot - \mathcal{L}) + e\cos(\Pi - \mathcal{L})],\\ d\lambda &= -20'',4451 \sin\lambda[\sin(\odot - \mathcal{L}) + e\sin(\Pi - \mathcal{L})],\end{aligned}\right.$$

ou, en négligeant les termes qui dépendent de e,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} d\mathcal{L} &= -20'',4451 \sec\lambda \cos(\odot - \mathcal{L}),\\ d\lambda &= -20'',4451 \sin\lambda \sin(\odot - \mathcal{L}).\end{aligned}\right.$$

IV. — Aberration solaire.

Relativement au Soleil, on a $\omega = 0$, $\lambda = 0$, $\mathcal{L} = \odot$; l'aberration en latitude disparaît, et il reste, pour l'aberration en longitude,

$$d\odot = -20'',445[1 + e\cos(\odot - \Pi)],$$

ou

$$(3)\qquad d\odot = -20'',445 - 0'',34\cos(\odot - \Pi).$$

Si l'on voulait tenir compte de l'aberration que produit la rotation de la Terre, on le pourrait, en remarquant que, la vitesse de rotation à l'équateur étant environ soixante-cinq fois plus petite que celle de translation, on a, pour l'expression de cette vitesse, $\frac{20'',4451}{65} = 0'',314$, ou pour celle qui convient à un point quelconque de la surface de la Terre, dont D est la déclinaison, $0'',314\cos D$. Dès lors, en ajoutant cette quantité à la valeur ci-dessus de $d\odot$, on aurait, d'une manière plus exacte,

$$(4)\qquad d\odot = -20'',4451 + 0'',314\cos D - 0'',34\cos(\odot - \Pi).$$

V. — Orbite apparente des étoiles autour de leur lieu moyen.

Par l'effet de l'aberration, les étoiles paraissent décrire sur la sphère céleste des courbes fermées, dont il est bien facile, d'après ce qui précède, de déterminer la nature et les dimensions. Concevons, en effet, qu'on ait mené par le lieu moyen de l'astre un plan tangent à la sphère céleste, et prenons pour axes coordonnés les traces que forment sur ce plan l'intersection d'un plan parallèle à l'écliptique et celle d'un autre plan perpendiculaire à celui-ci. On aura, x et y désignant ces coordonnées, dont l'origine est le lieu moyen de l'astre,

$$x = d\mathcal{L} \cos\lambda = -20'',445 \cos(\odot - \mathcal{L}),$$
$$y = d\lambda = -20'',445 \sin\lambda \sin(\odot - \mathcal{L}).$$

Ajoutant ces deux équations après les avoir élevées au carré, on obtient, pour l'équation de l'orbite cherchée,

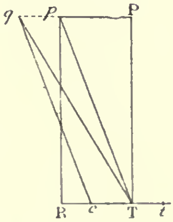
$$y^2 + x^2 \sin^2\lambda = (20'',445)^2 \sin^2\lambda.$$

Cette équation représente, comme on voit, une ellipse dont le demi-grand axe, invariable quelle que soit la position de l'étoile, est égal à $20'',445$, et dont le demi-petit axe est représenté par l'expression $20'',445 \sin\lambda$ et varie par conséquent avec le sinus de la latitude. Pour $\lambda = 0$, le petit axe s'évanouit et l'ellipse se change en une portion de ligne droite ; l'astre semble alors osciller entre $+20'',445$ et $-20'',445$, de chaque côté de son lieu moyen ; c'est le cas des étoiles situées dans le plan de l'écliptique. Pour une étoile qui se trouverait au pôle de l'écliptique, on aurait $\lambda = 90°$ et l'ellipse deviendrait un cercle de rayon égal à $20'',445$.

VI. — Aberration des planètes.

Soient P (*fig.* 13) une planète qui se meut avec une vitesse représentée par Pp dans un temps dt, et pR la vitesse d'un rayon lumineux émané de cet astre dans le même instant. Si la Terre était immobile en T, ce rayon serait perçu par un observateur placé en ce point, suivant la diagonale pT du parallélogramme pRTP, con-

Fig. 13.



struit sur les deux vitesses, et l'erreur commise sur le lieu de la planète ou l'aberration serait mesurée par l'angle pTP. La Terre n'étant pas immobile, soit tT le chemin parcouru par cet astre de t vers T pendant le même instant dt. Rien ne nous empêche, évidemment, de transporter à la planète ce mouvement de la Terre et de supposer que cette planète se meut de p en q avec une vitesse qp égale à Tt, mais dirigée en sens contraire. Dès lors, on voit que l'aberration totale est l'angle qTP ou la somme des mouvements propres de la planète et de la Terre; cette aberration serait la différence de ces mouvements, si celui de la planète s'effectuait dans le même sens que celui de la Terre. En général, on peut dire que cette aberration est égale au mouvement géocentrique de la planète, c'est-à-dire à son mouvement apparent de translation autour de la Terre supposée fixe. Ainsi, selon que l'on prendra le mouvement en longitude, latitude, ascension droite ou déclinaison, on obtiendra l'aberration en longitude, latitude, etc.

Cela posé, soient

m le mouvement géocentrique d'une planète pendant une seconde;
Δ sa distance à la Terre;
v le temps que la lumière met à venir du Soleil à la Terre, celle-ci étant dans sa moyenne distance 1.

Δv exprimera le temps que la lumière met à venir de la planète à la Terre, et $m\Delta v$ le mouvement géocentrique de la planète dans le temps Δv; par suite, on aura

$$\text{aberration planétaire} = -\,m\Delta v = -\,m\Delta\,497'',78.$$

Si, au lieu du mouvement m pour une seconde, on voulait employer le mouvement $\mathfrak{M}$ pour une heure, on aurait

$$\text{aberration planétaire} = -\,0'',138272\,\mathfrak{M}\,\Delta.$$

Enfin, M étant le mouvement en vingt-quatre heures, on a $M = 24 \times \mathfrak{M}$; par suite,

$$\text{aberration planétaire} = -\,0'',0057613\,M\Delta.$$

C'est cette formule que l'on emploie dans le calcul des éphémérides des planètes.

DEUXIÈME PARTIE.

CONSTRUCTION DES ÉPHÉMÉRIDES.

CHAPITRE I.

COMPOSITION DU CALENDRIER. — EXPLICATION DES PRINCIPAUX ARTICLES DE L'*ANNUAIRE*.

I. — Calendrier romain. — Réformes julienne et grégorienne.

L'année composée par Romulus aux premiers temps de la République romaine était vague et ne comprenait que 304 jours divisés en 10 mois. Mars (*martius*) était le premier de ces mois et se composait de 31 jours; venaient ensuite, dans l'ordre de leur succession, avril (*aprilis*), de 30 jours; mai (*maïus*), de 31 jours; juin (*junius*), de 30 jours; *quintilis*, de 31 jours; *sextilis*, de 30 jours; *september* (septembre), de 30 jours; *october* (octobre), de 31 jours; *november* (novembre), de 30 jours, et *december* (décembre), de 30 jours. Les intercalations fréquentes que nécessitait cette distribution du temps pour s'accorder avec le cours des saisons déterminèrent Numa à la réforme qui porte son nom. Ce prince, prenant pour modèle l'année dont se servaient les principaux peuples de la Grèce, ajouta à l'année romaine deux nouveaux mois, janvier (*januarius*), de 29 jours, et février (*februarius*), de 28 jours, qu'il plaça, le premier au commencement de l'année de Romulus et le second à la fin de la même année, c'est-à-dire après décembre; puis, pour que l'année ainsi composée pût s'accorder avec l'année lunaire, il eut soin d'ôter un jour de chacun des six mois pairs de Romulus, ce qui rendit tous les mois de son calendrier impairs, à l'exception du mois de février, auquel il conserva une quotité paire de jours (¹). L'ordre dans lequel se succédèrent les mois de Numa et leurs durées fut alors le suivant : janvier, 29 jours ; mars, 31 jours ; avril, 29 jours ; mai, 31 jours : juin, 29 jours ; quintilis, 31 jours ; sextilis, 29 jours ; septembre, 29 jours ; octobre, 31 jours ; novembre, 29 jours ; décembre, 29 jours, et février, 28 jours. Par cette distribution, l'année romaine s'accordait assez bien avec l'année lunaire, mais il était loin d'en être de même à l'égard de l'année solaire. Pour remédier à cet inconvénient, Numa décida que l'on ajouterait, de deux en deux années, un mois intercalaire de 22 et de 23 jours, alternativement, ce qui rendait la première année de son calendrier de 365 jours, la seconde de 377 jours, la troisième de 365 jours, puis la quatrième de 378 jours, et ainsi de suite pour les autres périodes de quatre années. Comme les 1465 jours de ces quatre années donnent une moyenne de 366 jours $\frac{1}{4}$, cette première institution de Numa eut pour effet, comme on voit, de rendre l'année moyenne romaine plus longue d'un jour que l'année solaire. Ce prince entrevit bien le vice de son calendrier et chercha à y remédier ; mais les indications qu'il laissa à ce sujet furent si mal comprises ou si mal suivies par les pontifes chargés de veiller à la constitution du calendrier, que, aux derniers temps de la République romaine, il en était résulté une confusion telle, que l'équinoxe civil s'écartait de l'équinoxe astronomique de près de trois mois et que l'ordre des saisons était entièrement interverti. Jules César, qui venait d'être investi de la dignité pontificale et à qui revenait, par conséquent, la mission de veiller à la constitution du calendrier, résolut de mettre fin à un pareil désordre et de le prévenir pour toujours en donnant à l'année une constitution plus régulière et plus en harmonie avec l'année astronomique. Dans cette vue, il fit venir Sosigène d'Alexandrie et le chargea de la partie astronomique du travail, c'est-à-dire de la détermination exacte de l'année solaire. Cet astronome ayant adopté pour durée de l'année tropique un nombre de 365 jours $\frac{1}{4}$, il fut décidé que,

---

(¹) C'est par une superstition attachée aux nombres impairs, que l'antiquité regardait comme d'un heureux présage, que Numa en agit ainsi.

sur quatre années consécutives, trois seraient de 365 jours et la quatrième de 366 jours, pour tenir compte des 24 heures dont quatre années ordinaires diffèrent de quatre années astronomiques. Ce jour épagomène se plaçait six jours avant les calendes de mars, c'est-à-dire entre le 23 et le 24 février, et s'appelait *bissexto-calendas* (¹), d'où le nom de *bissextile* donné à l'année qui le porte. Cette réforme eut lieu en l'an 45 avant J.-C. ou en l'an 709 de Rome; deux ans auparavant on avait été obligé, pour remettre l'équinoxe à sa place, d'ajouter à l'année deux mois supplémentaires, outre le mois intercalaire de 23 jours, qui se trouvait avoir lieu à cette époque, ce qui rendit cette année de 445 jours (ou, suivant certains auteurs, de 443 jours) et lui fit donner le nom d'*année de confusion*.

Comme l'année ainsi composée avait 10 jours de plus que celle de l'ancien calendrier romain réformé par Numa, on convint de répartir ces 10 jours entre tous les mois qui n'avaient eu jusqu'alors que 29 jours, sans toucher à ceux de mars, mai, quintilis et octobre, qui avaient été établis de 31 jours par Romulus; janvier, sextilis et décembre furent faits de 31 jours, et avril, juin, septembre et novembre, de 30 jours. Quant au mois de février, il fut conservé tel que l'avait laissé Numa, c'est-à-dire de 28 jours. C'est à cette époque, et en mémoire de cette réforme de Jules César, que le mois de quintilis fut appelé *julius* (juillet); un peu plus tard, le mois de sextilis prit le nom d'*augustus* (août), en l'honneur d'Auguste.

Réforme grégorienne. — La durée de l'année moyenne, supposée par Sosigène de $365^j,25$, était un peu trop longue, puisque l'année tropique n'est réellement que de $365^j,2422$. Il en résultait un avancement des équinoxes de $0^j,0078$ par an ou de $0^j,78$ par siècle. Cette anticipation des équinoxes, qui, au commencement

---

(¹) Le premier jour du mois s'appelait *calendes*, et c'est de là qu'est dérivé le mot *calendrier;* le 5 s'appelait les *nones* et le 13 les *ides;* mais en mars, mai, juillet et octobre, ces dates étaient reculées de 2 jours et arrivaient le 7 et le 15. Les noms des autres jours du mois se déduisaient de leur rang en rétrogradant; ainsi le 20 janvier se nommait le 13ᵉ jour des calendes de février, le 9 février le 5ᵉ jour des nones de ce mois, etc. Comme le jour que Jules César intercala tous les quatre ans entre le 23 et le 24 février précédait le 6ᵉ jour des calendes de mars, il fut appelé *second sixième jour des calendes de mars* ou *bissexto-calendas.*

de l'ère julienne, n'avait qu'un effet insensible sur la marche des saisons, finit, en s'accumulant, par devenir considérable et par nécessiter une nouvelle réforme du calendrier, qui fut entreprise au XVI^e^ siècle par le pape Grégoire XIII, avec le concours des astronomes de son temps. A cette époque, en effet (1582), l'anticipation était de 10 jours, si bien que l'équinoxe du printemps, qui, au temps du concile de Nicée, c'est-à-dire en l'an 325 après J.-C., tombait le 21 mars, n'arrivait plus, à l'époque dont nous parlons, que le 11 de ce mois. Pour remettre les choses en l'état où elles se trouvaient au temps du concile, il fut décidé que l'on retrancherait les 10 jours d'anticipation de l'année 1582 et que le lendemain du 4 octobre de cette même année serait appelé, non le 5, mais le 15 octobre 1582; et pour qu'à l'avenir l'excès de $0^j,0078$ ne s'accumulât plus, on convint de supprimer le jour intercalaire dans les trois années séculaires 1700, 1800, 1900, et de ne le conserver que pour l'année 2000, qui serait bissextile, ainsi que 2400, 2800, etc., de sorte que, sur quatre années séculaires, trois fussent communes et la quatrième toujours bissextile. Le bref de Grégoire XIII qui contenait ces dispositions et abrogeait l'ancien calendrier parut à la fin de février ou au commencement de mars de l'année 1581. Tous les États qui devaient obéissance à l'Église, la France, l'Espagne, le Portugal, l'Italie, etc., reçurent la nouvelle réforme à son origine; mais les protestants, de même que les Danois et les Hollandais, refusèrent longtemps de l'admettre; ils s'y soumirent enfin en 1700, et les Anglais suivirent cet exemple en 1752. Aujourd'hui, le calendrier grégorien est généralement en usage chez tous les peuples d'Europe, si ce n'est toutefois chez les Russes, les Grecs et quelques chrétiens d'Orient, qui ont conservé l'usage du calendrier julien.

II. — Des calendriers en usage chez les différents peuples.

Calendrier égyptien. — L'année civile des Égyptiens était une année solaire vague de 360 jours, divisée en 12 mois de 30 jours chacun; après le douzième mois, on ajoutait 5 jours *épagomènes* ou complémentaires, ce qui portait à 365 le nombre total des jours de cette année. L'année égyptienne retardait donc d'un jour tous les quatre ans sur l'année solaire, en sorte que ce n'était qu'après

1461 ans de 365 jours qu'elle recommençait au même point solaire ; ce long intervalle de temps s'appelait la *période sothiaque*. Voici les noms des 12 mois de l'année égyptienne : 1° Thòth ; 2° Paòphi ; 3° Athyr ; 4° Khoïac ; 5° Tybi ; 6° Mechir ; 7° Phamenòth ; 8° Pharmouthi ; 9° Pakhôn ; 10° Payni ; 11° Epiphi ; 12° Mesori. Ptolémée, dans l'*Almageste,* rapporte la date de ses observations à ces mois et compte les années égyptiennes à partir de l'*ère de Nabonassar,* dont le commencement est fixé à l'an 746 avant J.-C.

Calendrier persan. — L'ancienne année persane était une année solaire composée de 365 jours, divisés en 12 mois de 30 jours chacun, sans compter les 5 jours épagomènes que l'on plaçait à la fin de l'année. Les noms de ces 12 mois étaient les suivants : 1° Farvardin ; 2° Ardibehescht ; 3° Khordâd ; 4° Tir ; 5° Amerdad ; 6° Schahriver ; 7° Mihir ; 8° Abân ; 9° Ader ; 10° Deh ; 11° Bahman ; 12° Isfendarmad. L'année persane était donc une année solaire vague semblable à l'année égyptienne. Vers le milieu du XI^e^ siècle, on entreprit de corriger le calendrier persan en intercalant un jour de quatre en quatre années ; et, comme à cette époque on avait déjà reconnu que l'année solaire n'est pas exactement de 365 jours $\frac{1}{4}$, on décida qu'alternativement, après sept ou huit intercalations, on intercalerait la cinquième année commune et non la quatrième. Comme on le voit, l'année persane diffère très peu de l'année grégorienne, que les Européens n'ont employée cependant que plus de cinq cents ans plus tard.

Calendrier arabe. — Le calendrier arabe ou turc est purement lunaire, du moins dans ses détails. L'année y est divisée en 12 mois, qui sont alternativement de 30 et de 29 jours ; quelquefois aussi elle contient 13 mois. Le commencement des mois coïncide toujours avec une nouvelle lune, en sorte que, au bout de 33 ans, ils ont parcouru, en rétrogradant, toutes les saisons. Les noms de ces mois sont : 1° Mouharram, de 30 jours ; 2° Safar, de 29 jours ; 3° Reby 1^er^, de 30 jours ; 4° Reby 2^e^, de 29 jours ; 5° Djoumadi 1^er^, de 30 jours ; 6° Djoumadi 2^e^, de 29 jours ; 7° Redjeb, de 30 jours ; 8° Schaaban, de 29 jours ; 9° Ramadân, de 30 jours ; 10° Schewal, de 29 jours ; 11° Dsou'lkaadah, de 30 jours, et 12° Dsou'lhedjah, de 29 jours dans les années communes et de 30 jours dans les années *embolismiques* ou intercalaires. On rend embolismiques les 2^e^, 5^e^, 7^e^, 10e, 13e, 16e, 18e, 21e, 24e, 26e et 29e années d'un cycle de 30 ans; les 19 autres sont communes ou de 354 jours. La première année de l'*hégire*, ou ère des Mahométans, a commencé le 16 juillet de l'an 622 après J.-C.

Calendrier juif. — L'année des Juifs est une année luni-solaire composée de 12 mois dans les années communes et de 13 dans les années embolismiques. Ces dernières sont les 3e, 6e, 8e, 11e, 14e, 17e et 19e d'un cycle de 19 ans. Les noms des mois du calendrier juif sont : Nisan, 30 jours; Iyar, 29 jours; Sivan, 30 jours; Thamouz, 29 jours; Ab, 30 jours; Eloul, 29 jours; Tisri, 30 jours; Marchesvan, 29 jours; Kislev, 30 jours; Tébeth, 29 jours; Schebat, 30 jours, et Adar, 29 jours. Pour former les années embolismiques, on ajoute un mois de 29 jours, nommé *Veadar* ou 2e Adar, et alors Adar devient de 30 jours. Par ce moyen, la Pâque n'est jamais séparée de la nouvelle lune la plus voisine de l'équinoxe du printemps, qui fixe, comme on sait, le renouvellement de l'année juive.

Calendrier grec. — L'année grecque était lunaire et composée de 12 mois, alternativement de 30 et de 29 jours. A chaque 3e, 5e, 8e, 11e, 14e, 16e et 17e année du cycle de 19 ans on ajoutait, comme pour l'année juive, un mois embolismique de 30 jours, afin que les nouvelles et pleines Lunes revinssent aux mêmes époques de l'année. Voici quel était l'ordre dans lequel se succédaient les mois grecs : 1° Hecatombæon, 29 jours; 2° Metagitnion, 30 jours; 3° Boédromion, 29 jours; 4° Maimactérion, 30 jours; 5° Pyanepsion, 29 jours; 6° Posidéon, 30 jours; 7° Gamélion, 29 jours; 8° Anthestérion, 30 jours; 9° Élaphébolion, 29 jours; 10° Munychion, 30 jours; 11° Thargélion, 29 jours; 12° Skirophorion, 30 jours. Cette année était nommée l'*année attique;* le commencement en était fixé à la pleine lune qui suit le solstice d'été. Dans les années intercalaires ou embolismiques, on doublait le sixième mois Posidéon qui devenait Posidéon 1er; et alors le mois intercalaire qui suivait était appelé Posidéon 2e. Les Grecs eurent, par la suite, une période de quatre années qu'ils nommaient *Olympiade,* parce que le commencement en était fixé à l'époque de la célébration des jeux olympiens. La 1re Olympiade eut lieu en l'an 775 avant J.-C.

III. — De quelques périodes astronomiques usitées en Chronologie.

Ères diverses. — 1° *Du cycle solaire.* — Le cycle solaire est une période de 28 années juliennes, après laquelle les jours de la semaine reviennent dans le même ordre, aux mêmes jours du mois. Ce cycle a commencé l'an 9 avant notre ère, en sorte qu'il suffit d'ajouter 9 au millésime d'une année et de diviser la somme par 28 pour que le reste, s'il y en a un, exprime le cycle solaire qui répond à l'année proposée. Par exemple, si l'on demande à quelle année du cycle solaire on était en 1875, on a $\frac{1875+9}{28}$, ce qui donne 65 pour quotient et 8 pour reste. 8 est le cycle solaire demandé, lequel, depuis l'an —9, s'est reproduit 65 fois.

On trouve dans nos Livres d'église une forme de *calendrier perpétuel,* dans lequel les noms des jours de la semaine y sont représentés par les lettres

A, B, C, D, E, F, G,

écrites périodiquement en regard de chaque date (*voir* la Table I). A est placé à côté du 1er janvier, B l'est à côté du 2, C à côté du 3, et ainsi de suite jusqu'à G, qui est placé en regard du septième jour. Si donc l'année commence par un jeudi, ce jour sera désigné par A durant toute l'année, vendredi le sera par B, etc., et dimanche par D. La lettre qui indique le dimanche se nomme *dominicale;* elle change chaque année et rétrograde d'un rang, parce que l'année a un jour de plus que 52 semaines. Dans les années bissextiles, comme février a un jour de plus que dans les années communes, la lettre qui a désigné dimanche en janvier et février désigne lundi en mars, avril, ..., décembre, et c'est la lettre précédente qui devient alors dominicale. Ainsi, dans les années bissextiles, il y a toujours deux lettres dominicales, une qui sert depuis le commencement de l'année jusqu'à la Saint-Mathias, et l'autre qui sert depuis cette fête exclusivement jusqu'à la fin de l'année. A l'époque actuelle, on ne change, dans les années bissextiles, la lettre dominicale qu'à partir du 1er mars.

La lettre dominicale d'une année est connue lorsqu'on sait quel est le nom du jour qui commence mars. Or, de 1800 à 1900, on a cette règle bien simple pour trouver l'*initial* de ce mois : au nombre exprimé par les deux chiffres à droite du millésime ajoutez son quart (en rejetant les fractions), ôtez 1, puis divisez le résultat par 7. Le reste de la division indiquera l'*initial* de mars, et ce jour sera un lundi si ce reste est 1, ce sera un mardi si ce reste est 2, un mercredi s'il est 3, etc., enfin un dimanche s'il est zéro. Par exemple, en 1877, on a

$$\text{reste}\left[\frac{(77+19)-1}{7}\right]=4;$$

donc l'initial de mars est un jeudi. On conclut de là que le 1er janvier est un lundi, et par suite que la lettre dominicale est G.

2° *Cycle lunaire.* — Le cycle lunaire, comme nous avons déjà eu l'occasion de le dire, est une période de 19 années juliennes ou de 6939 jours, après laquelle les nouvelles lunes reviennent aux mêmes jours de l'année. Ce cycle, découvert par Méton environ 430 ans avant J.-C., fut trouvé si beau, qu'on en fit graver le calcul en lettres d'or sur le temple de Minerve ; de là le nom de *nombre d'or* donné à l'année du cycle lunaire dans laquelle on se trouve. Comme le cycle lunaire a dû commencer un an avant notre ère, on a cette règle bien simple pour trouver le nombre d'or ou le cycle lunaire d'une année proposée : ajoutez 1 à l'année dont il s'agit, divisez la somme par 19, et le reste de la division sera le nombre d'or cherché. On trouve, par exemple, que le nombre d'or de l'année 1875 est 14, parce qu'en divisant 1875 + 1 par 19 on obtient 14 pour reste. Le quotient 98 marque le nombre de périodes accomplies depuis le commencement de notre ère.

3° *Cycle d'indiction romaine.* — C'est une période entièrement arbitraire, qui ne repose sur aucune considération astronomique, et dont la durée est de 15 années juliennes (1). Si l'on prolonge cette période en remontant, on trouve qu'elle a dû commencer trois ans avant notre ère. Donc, pour trouver l'indiction d'une année, il suffit d'ajouter 3 au millésime de cette année et de diviser la somme par 15. Le reste de la division, s'il y en a un, sera l'indiction de l'année proposée. D'après cette règle, on trouve, par exemple, que le nombre d'indiction qui convient à l'année 1878 est 6, car $\frac{1878 + 3}{15}$ donne 125 pour quotient et 6 pour reste.

---

(1) Cette période, introduite à Rome sous les Empereurs, était relative à une perception d'impôts qui s'opérait tous les quinze ans. De nos jours elle est encore d'un grand usage à la cour pontificale.

4° *Période julienne.* — Le produit des trois cycles solaire, lunaire et d'indiction, ou celui des nombres 28, 19, 15, forme une période de 7980 ans, après laquelle les trois cycles reviennent ensemble, dans le même ordre, pour chaque année, sans qu'il puisse jamais y avoir deux années qui aient les mêmes nombres pour les trois cycles. C'est à cette période remarquable, dont l'étendue embrasse toutes les dates historiques, que l'on a donné le nom de *période julienne.* Comme l'an 1 de notre ère répond à l'an 4713 de la période julienne, il suffit d'ajouter ce nombre au millésime d'une année donnée après notre ère pour savoir à quelle année de la période julienne correspond l'année proposée. Voici un Tableau des époques les plus célèbres usitées en Chronologie, avec les années correspondantes de la période julienne :

Ère des Juifs, commence 3760 avant J.-C., ou l'an	953	de la période julienne.
Ère des Olympiades, commence 775 avant J.-C., ou l'an	3938	»
Fondation de Rome, selon Varron, 752 avant J.-C., ou l'an	3961	»
Ère de Nabonassar, 746 avant J.-C., ou l'an	3967	»
Époque des Turcs, ou hégire, 16 juillet 622 après J.-C., ou l'an	5335	»

IV. — Des épactes.

La réforme du calendrier julien, entreprise en 1582 par le pape Grégoire XIII, avait, dans les vues de l'Église, un autre objet que celui de la fixation de l'équinoxe au 21 mars : c'était de lier l'année lunaire à l'année solaire, de manière à pouvoir déterminer avec exactitude l'époque de la célébration de la fête de Pâques et des autres fêtes qui en dépendent et qui, comme elle, sont en rapport avec le cours de la Lune. Or c'est ce qu'Aloysius Lilius, astronome et médecin véronais, fit d'une manière très simple et très ingénieuse, à l'aide des *épactes* dont il nous reste maintenant à expliquer le mécanisme (¹).

Dans son principe, l'épacte est ce qu'il faut ajouter à l'année lunaire pour former l'année solaire; ainsi, l'année lunaire étant de 354 jours et l'année commune solaire de 365, la différence 11 est l'*âge* de la lune moyenne au commencement de la seconde année, en supposant que la nouvelle lune soit arrivée le 1er janvier; c'est l'épacte de la seconde année. L'épacte de la troisième année est 22; l'épacte de la quatrième année serait 33, mais, comme à la fin de la troisième année on met un mois intercalaire de 30 jours, cette épacte se réduit à 3. Les épactes suivantes sont : 14, 25 et 36 ou 6; 17, 28 et 39 ou 9; 20, 31 ou 1; 12, 23 et 34 où 4; 15, 26, 37 ou 7; 18, 29, 40 ou 10; 21, 32 ou 2; 13, 24, 35 ou 5; 16, 27, 38 ou 8; 19, 30 ou 0.

Tel est l'ordre primitif et régulier des épactes. Pour faire servir ces nombres à trouver toutes les nouvelles lunes d'une année, on les place, dans le calendrier perpétuel, à côté des jours du mois, mais dans un ordre rétrograde, de manière que l'astérisque * qui tient lieu de l'épacte XXX se trouve à côté du 1er janvier, l'épacte XXIX à côté du 2, celle XXVIII à côté du 3, et ainsi de suite jusqu'à l'épacte I, après laquelle on recommence * ou XXX. D'après l'ordre dans lequel sont écrits ces nombres, on voit que la nouvelle lune de janvier, pour une année quelconque, doit arriver le jour devant lequel se trouve placée l'épacte, car pour 1877, par exemple, l'épacte étant 15, ce nombre indique qu'au 1er janvier

---

(¹) Le défaut du calendrier julien avait été aperçu longtemps avant Grégoire XIII. Dès l'an 700 de notre ère, Bède l'avait signalé, bien qu'à cette époque l'anticipation des équinoxes ne fût que de 3 jours. Au XIIIe siècle, Jean de Sacrobosco, savant anglais, Roger Bacon et Jean de Saxe présentèrent des projets de réformation qui restèrent sans résultats. Le même sujet fut traité au siècle suivant, mais sans plus de succès, par Jean Angelus (1504), Jean Stoeffler (1516), Pighius (1520), Jean Schöner (1522), Lucas Gauricus (1525), Pierre Pitatus (1550). Les conciles de Constance et de Bâle, tenus en 1414 et 1436, s'en occupèrent aussi, sur les représentations des cardinaux d'Ailly et de Cusa. Enfin, la même question ayant été soumise au concile de Trente par le pape Pie IV, la réformation fut cette fois ordonnée; mais, faute d'un plan convenable, elle ne put être entreprise que longtemps après par Grégoire XIII, et comme nous l'avons dit, le projet qui réunit les suffrages fut celui d'Aloyso Lilio, astronome véronais.

l'âge de la lune était 15, en sorte que la lunaison ayant commencé le 16 décembre, doit finir 30 jours plus tard, c'est-à-dire le 15 janvier. La nouvelle lune de janvier arrive donc le 16, et c'est précisément ce que marque le chiffre XV placé en regard de cette date. Et cette épacte, se trouvant reproduite à 29 et 30 jours de distance, indique ainsi les nouvelles lunes pour toute la durée de l'année (¹). Quant aux autres phases, on les obtient en ajoutant les nombres 6, 13 et 20 à l'épacte de l'année proposée. Ainsi l'on a en 1877, année pour laquelle l'épacte est 15 :

	NL.	PL.	PQ.	DQ.		NL.	PL.	PQ.	DQ.
Janvier.....	16	3	10	26	Juillet......	12	29	6	22
Février.....	14	2	8	24	Août........	10	27	4	20
Mars.......	16	3	10	26	Septembre..	9	26	3	19
Avril......	14	2	8	24	Octobre.....	8	25	2	18
Mai.......	14	1	8	24	Novembre...	7	24	1	17
Juin........	12	29	6	22	Décembre...	6	23	30	16

Comme les douze lunaisons de chaque année sont alternativement de 29 et de 30 jours, on met, de 2 en 2 mois lunaires, deux épactes à un même jour; ces épactes sont XXV et XXIV; elles se placent au 5 février, au 5 avril, au 3 juin, au 1er août, au 29 septembre et au 27 novembre. Par ce moyen, les 30 épactes ne répondent qu'à 29 jours dans les six mois que nous venons de nommer.

Il nous reste, pour compléter ces notions relatives aux épactes, à déterminer ce nombre pour une année proposée. Ce problème est bien facile à résoudre lorsque l'on connaît l'épacte de l'année précédente, car il suffit simplement d'ajouter 11 à cette dernière, et, si la somme n'excède pas 30, elle est l'épacte cherchée; si elle excède 30, on en retranche ce nombre, et le reste est l'épacte. Par

---

(¹) Il est presque superflu de faire remarquer ici que les NL, PL, etc., obtenues par ce moyen ne sont qu'approchées, et qu'elles diffèrent des *phases lunaires astronomiques*, c'est-à-dire de celles que l'on observe et que l'on donne dans les *Éphémérides*, de 1, 2 et même 3 jours, ce qui tient à ce que, dans le calcul des épactes, on suppose à la Lune des mouvements moyens, ce qui n'a pas lieu en réalité. Mais, dans les calculs qui se rapportent au calendrier, l'usage des épactes est moins de déterminer les époques des phases que de faire connaître la date à laquelle doit se célébrer la fête de Pâques, et pour cet objet les nouvelles lunes déterminées à l'aide des épactes sont suffisamment exactes.

exemple, en 1877, l'épacte étant 15, celle de 1878 sera 15 + 11 ou 26.

Pour trouver l'épacte d'une année quelconque à partir de 1800, on peut faire usage de la formule suivante, dans laquelle E est l'épacte cherchée, N le nombre d'or et $R\left(\frac{a}{b}\right)$ le reste de la division de deux nombres a et b.

$$E = R\left[\frac{11 \times (N - 1)}{30}\right].$$

Par exemple, en 1877, le nombre d'or étant 16, on a

$$E = R\left[\frac{11 \times 15}{30}\right] = 15,$$

en négligeant les fractions. Cette formule peut s'appliquer, sans correction, depuis 1800 jusqu'à 1900.

V. — De la fête de Pâques.

D'après les décisions de l'Église, la fête de Pâques doit arriver le *premier dimanche d'après la pleine lune qui suit le 20 mars.* Il en résulte que, si la pleine lune tombe le 21 mars et que le lendemain de ce jour, c'est-à-dire le 22, soit précisément un dimanche, ce jour sera celui de Pâques. Cette fête ne peut donc jamais arriver plutôt que le 22 mars et jamais plus tard que le 25 avril, car la circonstance la plus défavorable serait celle où la pleine lune arriverait le 20 mars. Il faudrait alors attendre la pleine lune suivante, qui n'arriverait que le 18 avril, et, si ce jour était un dimanche, il faudrait encore aller jusqu'au dimanche suivant, qui serait le 25 avril.

Il est bien facile, d'après cela, de déterminer le jour de la fête de Pâques qui convient à une année proposée. En 1877, par exemple, l'épacte est XV. En se reportant au calendrier grégorien (Table I), on reconnaît que le 16 mars est le jour de la néoménie; 13 jours plus tard, on a le 16 + 13 = 29 mars : c'est le jour de la pleine lune pascale. Or, comme en 1877 la lettre dominicale est G, on voit que le dimanche qui suit le 29 mars est le 1er avril, jour de la fête de Pâques.

Si l'épacte était 25, il faudrait cumuler cette épacte avec 26 ou 24, suivant que le nombre d'or serait ou ne serait pas plus grand que 11.

Nous donnons à la fin du Volume une Table au moyen de laquelle on peut trouver immédiatement le jour de la fête de Pâques, pour une année proposée quelconque, lorsque l'on connaît l'épacte et la lettre dominicale (*voir* la Table II).

VI. — Composition du calendrier grégorien.

Nous allons maintenant appliquer les règles qui précèdent à la composition du calendrier grégorien, en prenant pour exemple celui de l'année 1877.

I. *Comput ecclésiastique.* — On comprend sous cette dénomination : 1° l'indiction romaine; 2° le nombre d'or; 3° l'épacte; 4° le cycle solaire; 5° la lettre dominicale. Voici le Tableau de ces nombres pour l'an 1877 :

1° Indiction romaine....... $R\left[\frac{1877+3}{15}\right]=5$

2° Nombre d'or............ $R\left[\frac{1877+1}{19}\right]=16$

3° Épacte................. $R\left[\frac{11\times(N-1)}{30}\right]=\text{XV}$

4° Cycle solaire............ $R\left[\frac{1877+9}{28}\right]=10$

5° Lettre dominicale............................. G

II. *Fêtes mobiles et immobiles.* — Parmi les fêtes que l'on inscrit au calendrier, les unes sont *immobiles*, c'est-à-dire tombent toujours aux mêmes dates; les autres sont *mobiles* et dépendent de la fête de Pâques, qui change de date chaque année. Voici les conventions qui règlent ces dernières.

L'*Ascension* est le jeudi 40e jour après Pâques; les 3 jours qui précèdent sont les *Rogations*.

La *Pentecôte* est le dimanche 50e jour après Pâques ou le 10e jour après l'Ascension.

La *Trinité* est le dimanche après la Pentecôte ou le 8e dimanche après Pâques.

La *Fête-Dieu* est le jeudi après la Trinité.

Quasimodo est le dimanche qui suit Pâques.

Septuagésime est le 9e dimanche ou 63 jours avant Pâques.

La *Quinquagésime*, ou dimanche gras, est le dimanche 49e jour avant Pâques.

Le jour des *Cendres* est le mercredi après le dimanche gras.

Le dimanche de la *Passion* est le 2e dimanche ou 14 jours avant Pâques.

Le dimanche des *Rameaux* est le 1er dimanche ou 7 jours avant Pâques.

Les *Quatre-Temps* arrivent aux mercredis qui suivent : 1° les Cendres,; 2° la Pentecôte; 3° le 14 septembre; 4° le 13 décembre.

Enfin, les 4 dimanches avant Noël sont ceux de l'*Avent*.

Ainsi, ayant trouvé qu'en 1877 la fête de Pâques tombait le 1er avril, on en conclut pour les dates des autres fêtes mobiles, en s'en tenant seulement à celles que donne l'*Annuaire :*

Quatre-Temps.	*Fêtes mobiles.*	
Février : 21, 23 et 24.	Septuagésime, 28 fév.	Pentecôte, 20 mai.
Mai : 23, 25 et 26.	Cendres, 14 février.	Trinité, 27 mai.
Septembre : 19, 21 et 22.	Pâques, 1er avril.	Fête-Dieu, 31 mai.
Décembre : 19, 21 et 22.	Ascension, 10 mai.	Avent, 2 déc. (1er dim.).

Quant aux fêtes immobiles, elles arrivent toujours aux dates suivantes :

La Circoncision, le 1er janvier.
L'Épiphanie ou les Rois, le 6 janv.,
La Purification ou la Chandeleur, le 2 février.
L'Annonciation, le 25 mars.
La Saint-Jean d'été, le 24 juin.
La Saint-Pierre et Saint-Paul, le 29 juin.
L'Assomption, le 15 août.
La Saint-Louis, le 25 août.
La Nativité de la Vierge, le 8 septembre.
La Toussaint, le 1er novembre.
La Conception, le 8 décembre.
La Noël, le 25 décembre.

Toutefois, lorsque le dimanche de Pâques arrive avant le 2 avril, l'Annonciation est remise au lundi, 8 jours après Pâques, parce que l'Église a décidé que cette fête ne doit jamais tomber dans la semaine sainte.

III. *Dates et noms des jours qui leur correspondent.* — Il reste, pour achever la formation du calendrier, à distribuer aux diverses dates des mois de l'année les noms des jours qui leur correspondent. Or c'est ce qu'il est bien facile de faire lorsque la lettre dominicale qui convient à l'année proposée est déterminée, car, comme nous l'avons dit, le nom du 1er janvier ou l'initial de de ce mois s'en déduit immédiatement. Pour passer ensuite de l'initial de janvier à celui de février, et généralement d'un mois quelconque au suivant, on n'a qu'à procéder de deux ou trois rangs au delà de l'initial du premier mois, selon que ce mois a 30 ou 31 jours (l'initial de mars est toujours le même que celui de février dans les années communes et avance d'un rang dans les années bissextiles). Ainsi, ayant trouvé qu'en 1877 la lettre dominicale est G, on en conclut que janvier commence par un lundi, et, par suite, on a :

		1.	2.	3.	
31 jours,	janvier.....	lundi,	mardi,	mercredi,	...,
28 »	février.....	jeudi,	vendredi,	samedi,	...,
31 »	mars.......	jeudi,	vendredi,	samedi,	...,
30 »	avril.......	dimanche,	lundi,	mardi,	...,
31 »	mai........	mardi,	mercredi,	jeudi,	...,
30 »	juin........	vendredi,	samedi,	dimanche,	...,
31 »	juillet......	dimanche,	lundi,	mardi,	...,
31 »	août.......	mercredi,	jeudi,	vendredi,	...,
30 »	septembre..	samedi,	dimanche,	lundi,	...,
31 »	octobre....	lundi,	mardi,	mercredi,	...,
30 »	novembre..	jeudi,	vendredi,	samedi,	...,
31 »	décembre..	samedi,	dimanche,	lundi,	...,

Les jours de chaque mois ainsi distribués, il reste à placer les fêtes mobiles, d'après la date pascale, et à inscrire aux autres dates les noms des fêtes fixes et des saints, ce qui ne peut offrir aucune difficulté, d'après ce que nous avons dit plus haut. Quant aux phases lunaires, aux éclipses et autres prédictions astronomiques que l'on a coutume d'indiquer dans les calendriers, comme l'objet de cet Ouvrage est précisément d'indiquer le moyen de les calculer, nous renverrons aux divers Chapitres où ces sujets se trouvent traités.

NOTE ADDITIONNELLE AU CHAPITRE I.

DÉTERMINATION DE LA LETTRE DOMINICALE POUR UNE ANNÉE QUELCONQUE.

Soit n le numéro de la lettre dominicale pour une année quelconque, en prenant les lettres dans l'ordre alphabétique

$$\begin{array}{ccccccc} A, & B, & C, & D, & E, & F, & G, \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7. \end{array}$$

Puisque la lettre dominicale rétrograde d'un rang chaque année, le numéro de cette lettre sera $n - 1$ l'année suivante, et $n - A$ après A années. Comme il arrive presque toujours que A est plus grand que n, on rend la soustraction possible en ajoutant à n un nombre quelconque s de semaines, c'est-à-dire $7s$ jours; dès lors, la formule générale devient

$$7s + n - A.$$

Ainsi, il suffit de connaître la lettre dominicale d'une année pour en déduire toutes celles des années suivantes. Or il est constaté que l'an 1 de notre ère commençait par un samedi; A indiquait donc ce jour, et par suite B était la lettre dominicale de l'an 1, d'où il suit que C était la lettre dominicale de l'an 0, et, comme le numéro de C est 3, on a, pour le numéro de la lettre dominicale à partir de l'an 0,

$$7s + 3 - A.$$

Mais sur quatre années il y en a une bissextile et chaque année bissextile fait rétrograder la lettre d'une unité; la relation précédente devient donc

$$7s + 3 - A - \frac{A}{4}; \tag{a}$$

$\frac{A}{4}$ est toujours un nombre entier, et l'on néglige le reste de la division lorsqu'elle en présente un.

Cette relation ne convient qu'au calendrier julien, où l'intercalation bissextile a lieu régulièrement tous les quatre ans. Pour la rendre applicable au calendrier grégorien, il faut se souvenir qu'en 1582 on a retranché 10 jours et que le 5 octobre est devenu le 15; ainsi, depuis le 5 octobre 1582 jusqu'à 1700, nous avons compté 10 jours de plus que ceux qui ont conservé l'usage du calendrier julien. De plus, nous avons fait commune l'année 1700, qui devait être bissextile, ainsi que celle 1800, en sorte qu'en ce moment nous comptons 12 jours de plus que les Russes, par exemple, qui ont conservé l'année julienne. Pour réduire au calendrier julien une date proposée, il faut donc retrancher d'abord les 10 jours omis en 1582 et appliquer ensuite la correction $\frac{3}{4}(S - 16)$, S étant le nombre qui marque le siècle, ce qui donne, pour la correction totale que doit subir toute date grégorienne pour être ramenée à la date julienne correspondante,

$$(b) \qquad 10 + \tfrac{3}{4}(S - 16) \text{ ou } 10 + (S - 16) - \tfrac{1}{4}(S - 16),$$

Cette expression, étant ajoutée à la formule (*a*), fait connaître le numéro de la lettre dominicale qui convient à une année grégorienne, c'est-à-dire que l'on a, pour la relation cherchée,

$$7s + 3 - A - \tfrac{1}{4}A + 10 + (S - 16) - \tfrac{1}{4}(S - 16)$$

ou, parce que s est arbitraire,

$$(c) \qquad 7s + 6 - A - \tfrac{1}{4}A + (S - 16) - \tfrac{1}{4}(S - 16).$$

Cette formule s'applique à toutes les années postérieures à la réformation. Pour les années antérieures à la réformation, on doit faire usage de la formule $7s + 3 - A - \frac{1}{4}A$.

Voici une application de la formule (*c*) à la détermination de la lettre dominicale qui convient à l'année 1877. On a

$$L = 7s + 6 - 1877 - \frac{1877}{4} + 2 - \frac{2}{4}$$

ou [en négligeant les fractions données par $\frac{1}{4}A$ et $\frac{1}{4}(S - 16)$]

$$L = 7s + 6 - 1877 - 469 + 2,$$

c'est-à-dire

$$L = 7s - 2338.$$

Comme le nombre s est arbitraire, il faut le choisir de manière que $7s$ soit plus grand que 2338, mais sans que cependant la différence $7s - 2338$ puisse excéder 7. Or, dans le cas qui nous occupe, on voit qu'en prenant $s = 335$ on a

$$L = 2345 - 2338 = 7;$$

ainsi G est la lettre dominicale qui convient à l'année 1877.

CHAPITRE II.

ÉPHÉMÉRIDES DU SOLEIL.

I. — Obliquité apparente de l'écliptique.

L'écliptique est soumise à deux variations qu'il importe de bien distinguer. La première, simplement périodique, résulte des actions combinées du Soleil et de la Lune sur la partie renflée de l'équateur; elle se rétablit toutes les fois que le Soleil et la Lune reviennent aux mêmes positions relatives par rapport à la Terre, et, par conséquent, ne change pas l'obliquité moyenne. On peut la déterminer, comme nous l'avons vu au § III du Chapitre IV de la première Partie, par la formule

$$\Delta\omega = 9'',2231 \cos \text{☊} - 0'',0897 \cos 2\text{☊} + 0'',0886 \cos 2\text{☾} + 0'',5510 \cos 2\odot,$$

dans laquelle ☊ représente la longitude du nœud ascendant de la Lune et ☉ la longitude vraie du Soleil. La seconde provient de l'action que les planètes exercent sur le centre de gravité de notre globe, et diminue graduellement l'obliquité de l'écliptique de $0'',47594$ par année; c'est-à-dire que l'on a, t désignant le nombre d'années écoulées à partir de 1850, époque pour laquelle $\omega = 23° 27', 31''83$,

$$\text{obliquité moyenne} = 23°27'31'',83 - 0'',47594\, t.$$

Il suit de là que l'*obliquité apparente*, qui n'est autre chose que l'obliquité moyenne corrigée de la nutation luni-solaire, a pour expression, en prenant pour $\Delta\omega$ la valeur que cette quantité avait en 1850 (*voir* la Note additionnelle I au présent Chapitre),

$$\begin{aligned}\text{obliquité apparente} = 23^\circ 27' 31'',83 &- 0'',47594\, t\\ &+ 9'',2236 \cos \text{☊} - 0'',0897 \cos 2\text{☊}\\ &+ 0'',0886 \cos 2 \text{☾} + 0'',5509 \cos 2 \odot.\end{aligned}$$

Voici un exemple de ce calcul pour le 9 juin 1875, en faisant usage, pour la détermination des termes périodiques, des Tables du Soleil de Le Verrier :

Obliq. moy. le 9 juin 1875 ($23^\circ 27' 31'',83 - 0'',47594 \times 25.4353$).		$23^\circ.27'.19'',72$
Nutation lunaire, 1re partie, Table XLVII (1)	+	8,87
» 2e partie, Table XLVII	+	0,05
Nutation solaire, Table XLVIII (2)	—	0,49
Obliquité apparente le 9 juin 1875		23.27.28,15

C'est ce qui s'accorde avec le nombre donné dans la *Connaissance des Temps* (3).

II. — Points équinoxiaux.

1° *Précession en longitude.* — t désignant le nombre d'années écoulées depuis 1750, on a, pour la précession totale Ψ,

$$\Psi = 50'',21129\, t + 0'',0001221483\, t^2.$$

Différentiant cette valeur de Ψ, on en déduit, pour la précession

---

(1) Cette première partie de la Table comprend les termes

$$+ 9'',2236 \cos \text{☊} - 0'',0897 \cos 2\text{☊}.$$

La seconde partie donne le terme

$$+ 0'',0886 \cos 2 \text{☾};$$

on y entre avec l'argument $2A + 2l'$, que nous apprendrons à former au § VI du présent Chapitre.

(2) Cette Table comprend le terme

$$+ 0'',5509 \cos 2 \odot;$$

elle a pour argument la longitude vraie du Soleil.

(3) On rendrait ce calcul plus rigoureux en prenant pour l'obliquité moyenne $\Delta\omega$ sa valeur à l'époque actuelle et tenant compte du petit terme $+ 0'',0092 \cos(\odot + \Pi)$ qui dépend de la longitude Π du périgée solaire.

totale annuelle en 1750 + t,

$$\frac{d\Psi}{dt} = 50'',21129 + 0'',0002442966\,t,$$

et, si dans cette équation on fait $t = 127$, on trouve, pour la valeur de $\frac{d\Psi}{dt}$ qui convient à l'époque 1877,

$$\frac{d\Psi}{dt} = 50'',24232.$$

De là on conclut :

Précession pour 1 jour solaire......	0″, 13755
» pour 10 jours solaires....	1″, 3755

C'est l'addition réitérée de cette dernière quantité qui fournit les nombres consécutifs de la première colonne.

2° *Nutation en longitude et en Æ.* — La nutation en longitude est immédiatement donnée par la formule que nous avons rapportée au Chapitre IV de la première Partie, ou plus exactement par la suivante,

$$\Delta\mathcal{L} = -17'',2526 \sin \text{☊} + 0'',2073 \sin 2\text{☊} - 1'',2694 \sin 2\odot,$$

qui convient à l'époque actuelle (*voir* la Note additionnelle I au présent Chapitre). On supprime ici le terme en 2☾, à cause de sa petitesse et du peu de durée de sa période. Cette valeur de $\Delta\mathcal{L}$ dépend des quantités ☊ et ☉, que nous enseignerons à former un peu plus loin. En les supposant connues, voici le calcul qui donne cette nutation pour le 10 janvier 1877. On a

$$\text{☊} = 343^\circ 27' 55''$$
$$\odot = 290^\circ 25' 44''$$

log − 17″, 2526 ...	1, 23685 −	log + 0″, 2073 ...	9, 31660 +
log sin ☊	9, 45423 −	log sin 2☊	9, 73692 −
	0, 69108 +		9, 05352 −
	+ 4, 910		− 0, 113

log − 1″, 2694	0, 10360 −
log sin 2☉	9, 81570 −
	9, 91930 +
	+ 0, 830

$$\Delta\mathcal{L} = + 4,910 - 0,113 + 0,830 = 5'',63$$

Quant à la nutation en Æ que l'on voit inscrite dans la dernière colonne, il suffit, pour l'obtenir, de projeter le petit arc $\Delta\mathcal{L}$ sur l'équateur; on a ainsi

$$\Delta\text{Æ} = \Delta\mathcal{L} \cos\omega.$$

En prenant $\omega = 23^\circ 27' 19''$, on trouve, pour la valeur de ΔÆ réduite en temps et qui convient au 10 janvier 1877 :

$\log \Delta\mathcal{L}$	0,75051
$\log\cos\omega$. . . .	9,96254
$-\log 15$	1,17609
$\log \Delta$Æ ...	9,53696

ΔÆ en temps $= 0^s,34$.

III. — Commencement des saisons.

Le commencement de chaque saison a lieu au moment où le Soleil passe au point équinoxial ou solsticial qui porte son nom, et par conséquent lorsque sa longitude devient égale à 0°, 90°, 180° ou 270°.

Quand on a une Table des longitudes du Soleil calculées pour des intervalles de temps assez rapprochés, il est bien facile d'en conclure les époques de l'année auxquelles les saisons commencent.

Supposons que l'on veuille déterminer le commencement du printemps, qui est l'instant où le Soleil passe au point équinoxial ♈, c'est-à-dire où sa longitude devient égale à 0°. En consultant la *Connaissance des Temps* pour l'an 1875, par exemple, on voit que le Soleil atteint la longitude 0° entre le 21 et le 22 mars, à midi moyen de Paris, car la longitude qui se rapporte à la première date est plus petite que 360° et celle qui se rapporte à la seconde est plus grande que 0°. Il s'agit donc de déterminer l'instant précis où cette longitude devient égale à 0°. Or, en appelant $\mathcal{L}_\odot$ la plus petite de ces longitudes, $\mathcal{L}'_\odot$ la plus grande et $\mathfrak{T}$ l'époque cherchée, on a

$$\frac{\mathcal{L}'_\odot - \mathcal{L}_\odot}{24^h} = \frac{360^\circ - \mathcal{L}_\odot}{\mathfrak{T}},$$

d'où l'on tire

$$\mathfrak{T} = \frac{360^\circ - \mathcal{L}_\odot}{\mathcal{L}'_\odot - \mathcal{L}_\odot} \times 24^h.$$

La même formule donnerait l'époque du commencement de l'été, de l'automne ou de l'hiver en y remplaçant 360° par 90°, 180° ou 270°. Voici le détail du calcul pour l'année que nous venons de considérer. On a

$$\begin{array}{lr}
\mathcal{L}_\odot \text{ le 21 mars à midi moyen}\ldots & 359^\circ.28'.59'',1 \\
\mathcal{L}'_\odot \text{ le 22 mars à midi moyen}\ldots & \underline{360.28.30,9} \\
\text{Diff. } \mathcal{L}'_\odot - \mathcal{L}_\odot \ldots\ldots & 0.59.30,9
\end{array}$$

et de plus

$$360^\circ - \mathcal{L}_\odot = 31'0'',9.$$

A l'aide de ces valeurs, on trouve

$$\begin{array}{rr}
\log 24 \ldots\ldots\ldots\ldots & 4,93651 \\
\log 31'\ 0'',9 \ldots\ldots & 3,26972 \\
-\log 59'30'',9 \ldots\ldots & \underline{6,44722} \\
\log \mathfrak{T} \ldots\ldots & 4,65345
\end{array}$$

$$\mathfrak{T} = 12^h 30^m 25^s.$$

Ainsi, le commencement du printemps a eu lieu, à Paris, en 1875, le 21 mars, à $0^h 30^m 25^s$ du matin.

Cherchons encore le commencement de l'été, qui est l'instant où la longitude du Soleil atteint 90°. On a

$$\begin{array}{lr}
\mathcal{L}_\odot \text{ le 21 juin à midi moyen}\ldots & 89^\circ.38'.42'',4 \\
\mathcal{L}'_\odot \text{ le 22 juin à midi moyen}\ldots & \underline{90.35.55,2} \\
\text{Diff. } \mathcal{L}'_\odot - \mathcal{L}_\odot \ldots\ldots & 0.57.12,8
\end{array}$$

Par suite, la formule donne

$$\begin{array}{rr}
\log 24^h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 4,93651 \\
\log(90 - \mathcal{L}_\odot) \ldots\ldots & 3,10636 \\
-\log(\mathcal{L}'_\odot - \mathcal{L}_\odot) \ldots\ldots & \underline{6,46435} \\
\log \mathfrak{T} \ldots\ldots & 4,50722
\end{array}$$

$$\mathfrak{T} = 8^h 55^m 53^s.$$

Ainsi, l'été a commencé, à Paris, en 1875, le 21 juin, à $8^h 55^m 53^s$ du soir.

IV. — Fraction de l'année.

La fraction de l'année est le rapport de la durée de l'année tropique, que l'on sait être égale à $365^j,24222$, au temps écoulé depuis le 1^er^ janvier à midi moyen de l'année que l'on considère. n désignant le nombre de jours écoulés depuis le 1^er^ de l'an jusqu'à la date proposée, on aura donc, pour la fraction de l'année qui correspond à cette date,

$$\frac{n-1}{365,24222}$$

Par exemple, si l'on demande la fraction de l'année correspondante au 10 mars 1875, comme il s'est écoulé depuis le 1^er^ janvier jusqu'à cette date 69 jours, on aura

$$\frac{68}{365,24222} = 0,1862,$$

Tous ces nombres ont pour différence constante 0,0027379, qui est le rapport de l'unité à 365,24222, en sorte qu'il est bien facile de former les nombres de cette colonne.

V. — Lever et coucher apparents du centre du Soleil.

La *Connaissance des Temps* fait connaître, aux pages 12 et 13, en temps moyen civil, l'heure du lever et du coucher *apparents* du centre du Soleil à Paris pour tous les jours de l'année, c'est-à-dire que l'on a tenu compte de l'effet de la réfraction qui fait paraître à l'horizon les astres qui se trouvent à 33′ environ au-dessous de ce cercle. Voici comment se déterminent ces quantités.

Soient (*fig.* 14)

P le pôle;
Z le zénith;
φ la latitude du lieu (à Paris $\varphi = 48°50'11$);
H′PZ le méridien;
H′H l'horizon;
A la position de l'astre sur la sphère céleste.

On a, par le triangle ZAP,

$$\cos ZA = \cos PA \cos PZ + \sin PA \sin PZ \cos P,$$

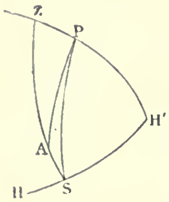
et, comme

$$PA = 90^\circ - \mathcal{D} \quad \text{et} \quad PZ = 90^\circ - \varphi,$$

il en résulte

$$\cos ZA = \sin \mathcal{D} \sin \varphi + \cos \mathcal{D} \cos \varphi \cos P.$$

Fig. 14.



A l'horizon, $ZA = 90^\circ$; ainsi

$$0 = \sin \mathcal{D} \sin \varphi + \cos \mathcal{D} \cos \varphi \cos P,$$

d'où

(1) $$\cos P = -\operatorname{tang} \mathcal{D} \operatorname{tang} \varphi.$$

Lorsqu'on veut tenir compte de la réfraction, il faut remplacer ZA par $90^\circ + (33' 45'' - 8''.86)$; alors le triangle n'est plus rectangle, et l'on a

$$\cos P = \frac{\cos ZA - \sin \varphi \sin \mathcal{D}}{\cos \varphi \cos \mathcal{D}},$$

formule que l'on transforme, comme on sait, dans la suivante,

(2) $$\sin \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\sin(\mu - \mathcal{D}) \sin(\mu - \varphi)}{\cos \varphi \cos \mathcal{D}}},$$

en posant

$$ZA + \mathcal{D} + \varphi = 2\mu.$$

On a encore

(3) $$\cos \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\cos \mu \cos(\mu - ZA)}{\cos \varphi \cos \mathcal{D}}},$$

(4) $$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\sin(\mu - \mathcal{D}) \sin(\mu - \varphi)}{\cos \mu \cos(\mu - ZA)}}.$$

P est ici l'angle horaire qui, réduit en temps, fait connaître l'heure du lever ou du coucher apparent. On appelle cet arc l'*arc semi-diurne,* parce qu'il exprime le temps que l'astre met à aller du méridien à l'horizon, et réciproquement.

Lorsqu'on veut appliquer l'une des relations qui précèdent, il se présente une difficulté qui tient à ce que, dans ces formules, la déclinaison $\mathcal{D}$ du Soleil doit être prise pour l'heure même du phénomène, heure qui est précisément ce que l'on cherche, en sorte que $\mathcal{D}$ est inconnu. Mais on peut prendre pour $\mathcal{D}$ la valeur approchée résultant d'une valeur supposée de l'heure et rectifier ensuite successivement le calcul, à l'aide de l'heure trouvée, jusqu'à ce qu'on parvienne à un résultat qui ne diffère pas notablement de celui supposé (¹). C'est, du reste, ce que l'exemple suivant va éclaircir.

Soit proposé de trouver l'heure du coucher apparent du Soleil le 15 septembre 1875 à Paris.

En prenant pour $\mathcal{D}$ la déclinaison du Soleil à 6^h du soir, heure qui ne doit pas différer beaucoup de la véritable, on a $\mathcal{D} = 2°59'55''$, puis :

Première approximation.

φ	48°50'11"	$\log\sin(\mu - \mathcal{D})$	9,9677567
$\mathcal{D}$	2.59.55	$\log\sin(\mu - \varphi)$	9,5801971
ZA	90.33. 0	$-\log\cos\varphi$	0,1816345
2μ	142.23. 6	$-\log\cos\mathcal{D}$	0,0005951
μ	71.11.33	$\log\sin^2\frac{1}{2}P$	9,7301834
$\mu - \mathcal{D}$	68.11.38	$\log\sin\frac{1}{2}P$	9,8650917
$\mu - \varphi$	22.21.22		

$\frac{1}{2}P$	47°8'12"
P en temps vrai	$6^h 17^m 5^s$
P en temps moyen	$6^h 12^m 13^s$

Reprenant maintenant le calcul de P avec la déclinaison

(¹) Pour les astres autres que le Soleil et la Lune, on peut toujours se dispenser d'avoir recours à l'interpolation dont nous parlons, car la déclinaison des étoiles et des planètes peut être regardée comme constante dans l'intervalle de vingt-quatre heures.

$\mathcal{D} = 2°59'38''$, correspondante à l'heure obtenue par ce premier calcul, on trouve, par une seconde approximation :

Seconde approximation.

φ	48°.50′.11″	$\log\sin(\mu - \mathcal{D})$ ...	9,9677644
$\mathcal{D}$	2.59.38	$\log\sin(\mu - \varphi)$....	9,5801562
ZA.....	90.33. 0	$-\log\cos\varphi$.......	0,1816345
2μ.....	142.22.49	$-\log\cos\mathcal{D}$	0,0005932
μ	71.11.25	$\log\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{P}$	9,7301483
$(\mu - \mathcal{D})$.	68.11.47	$\log\sin\frac{1}{2}\mathrm{P}$	9,8650742
$(\mu - \varphi)$.	22.21.14		

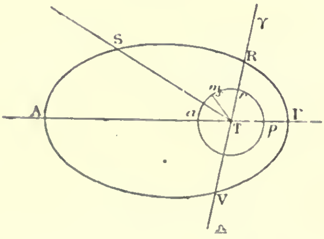
$\frac{1}{2}$P.................. 47°8′3″
P en temps vrai...... $6^h 13^m 4^s$

On voit par là comment on devrait opérer dans le cas où l'on voudrait pousser plus loin l'approximation, ce qu'il ne paraît guère nécessaire de faire. L'heure du lever du Soleil se détermine par un calcul semblable; il faut avoir soin, seulement, de prendre le complément de P à 12^h.

VI. — Lieu du Soleil. — Tables de Le Verrier.

1° *Longitude du Soleil.* — Soient PRAV (*fig.* 15) l'écliptique, T la place que la Terre semble occuper au foyer de cette courbe, ♈ ♎ la ligne des équinoxes et PA celle des absides. Concevons

Fig. 15.



un mobile *m* assujetti à se trouver, en même temps que le Soleil, sur la ligne PA, et à décrire le cercle *prav* d'un mouvement uniforme. Au périgée P le Soleil est animé de sa plus grande vitesse, tandis qu'à l'apogée A sa vitesse est la plus petite; le mouvement se faisant de P vers RAV, il en résulte que, au-dessus de la ligne AP, le Soleil devancera constamment le mobile m, tandis qu'au-dessous de la même ligne ce sera, au contraire, le mobile m qui sera constamment en avance sur le Soleil. Cela posé, soient S et s les positions respectives du Soleil et du mobile à un instant quelconque; menons les rayons vecteurs TS et Ts : l'angle rTs sera la longitude moyenne L, RTS la longitude vraie v, rap la longitude du périgée Π, et, en appelant ζ l'anomalie moyenne ou l'arc sTP, il est clair qu'on aura

$$\zeta = \mathrm{L} + 360^\circ - \Pi \quad \text{ou} \quad \zeta = \mathrm{L} - \Pi.$$

Dans les Tables solaires de Le Verrier, qui servent de fondement à nos calculs, le temps y est compté en années juliennes de 365,25 jours, et commence au midi moyen du 1^{er} janvier 1850; c'est l'époque de ces Tables. D'après cet astronome, la longitude moyenne du Soleil et celle du périgée pour l'époque $1850 + t$, comptées à partir de l'équinoxe moyen de la même époque, ont respectivement pour expressions

$$\mathrm{L} = 280^\circ 46' 43'', 51 + 1.296027'', 6784\, t + 0'', 00011073\, t^2,$$
$$\Pi = 280^\circ 21' 21'', 5 + 61'', 6995\, t + 0'', 0001823\, t^2.$$

C'est sur ces formules que les deux premières colonnes de la Table I ont été composées. L et Π doivent ensuite être augmentés respectivement de leurs moyens mouvements $0^\circ 59' 8'', 3304$ et $0, 169$ pour chaque jour écoulé depuis l'époque 1850 jusqu'à la date proposée, en tenant compte des variations séculaires qu'éprouvent ces longitudes par l'effet des actions planétaires. Les Tables III et IV abrègent ces calculs en les donnant tout faits et peuvent s'étendre aux heures, minutes et secondes; la Table V fait connaître la somme des trois termes séculaires L_1, L_2, L_3, termes qui doivent être ajoutés à la longitude moyenne L, ainsi que la correction relative à la longitude Π du périgée.

Une fois L et Π déterminés, on obtient aisément l'anomalie moyenne ζ, et l'on s'en sert, comme argument, pour calculer, à l'aide de la Table VII, l'équation du centre et la partie de sa variation séculaire, qui est proportionnelle au temps. Ces deux valeurs trouvées, on les ajoute à la longitude moyenne L, et l'on a ainsi la *longitude vraie* dans l'orbite, comptée de l'*équinoxe moyen*.

Il faut avoir ensuite égard aux variations périodiques qu'éprouve cette longitude, en vertu des actions combinées de la Lune et des planètes. Or, c'est à quoi les Tables suivantes sont destinées. Les six dernières colonnes des Tables I et II font connaître les arguments l, l', l'', l''', l^{iv}, l^{v} des inégalités relatives aux diverses planètes pour tous les jours, heures, minutes et secondes de l'année, et les trois dernières fournissent les arguments x, A, N relatifs à la perturbation lunaire. Ces arguments déterminés, on obtient facilement, à l'aide des Tables XIII, XIV et suivantes, les termes qui représentent les perturbations de Mercure, Vénus, Mars, etc., et au moyen de la Table VI celle qui est relative à la Lune. Il faut avoir soin seulement de multiplier les termes dus à l'action de Vénus par 1,004 et ceux provenant de Mars par 0,895; tous ces termes sont exprimés en centièmes de seconde.

Enfin, si l'on veut obtenir la longitude comptée, non plus à partir de l'équinoxe moyen, mais à partir de l'*équinoxe apparent*, c'est-à-dire telle que la donne la *Connaissance des Temps*, on devra ajouter à la longitude, corrigée, comme on vient de le dire, de l'équation du centre et des perturbations, les termes qui proviennent de la nutation solaire et de la nutation lunaire, termes qui sont fournis par les Tables X et XI, en prenant respectivement pour arguments N et la longitude L, corrigée seulement de l'équation du centre, ce qui est suffisamment exact. Quant aux termes qui proviennent de l'aberration proprement dite, comme cette quantité est renfermée dans la longitude moyenne, il est inutile de s'en occuper.

Voici un exemple de l'application des Tables au calcul de la longitude apparente du Soleil pour le 9 juin 1875, à midi moyen de Paris. Nous donnerons à la fin du Chapitre une autre application fondée sur l'emploi des *Tables particulières* que Le Verrier a jointes à sa théorie du Soleil, et qu'il y a avantage à employer dans le calcul des lieux solaires.

TABLEAU DES ARGUMENTS.

Argument ζ.

	L.	II.
Table I (années)........	280°.43′.28″,39	280°.47′. 3″,9
» III (jours)..........	156.43. 4,53	+ 0. 0.26,9
» V (terme séculaire).	— 0. 0. 4,85	+ 0. 0. 0,2
	77.26.28,07	280.47.31,0

On déduit de là

$$\zeta = \mathrm{L} - \mathrm{II} = 156^\circ 38' 57'',1.$$

Arguments de perturbations planétaires.

	l.	l'.	l''.	l'''.	l^{IV}.	l^{V}.
Table I.....	2827	1273	1115	2096	2208	3560
» III...	3230	2830	1741	926	147	59
» VI...					3	
	2057	103	2856	3022	2358	3619

Arguments de perturbations lunaires.

	x.	A.	N.
Table I......	1918	3212	3749
» III....	3081	1537	94
» V.....		76	
	999	825	3843

Ces arguments obtenus, on procède aux calculs suivants :

Calcul de l'équation du centre.

Table VII	0°.45′. 6″,61
Partie proportionnelle	— 0. 0.16,27
Variation séculaire..........	— 0. 0. 1,70
Équation du centre	0.44.48,64

Perturbation lunaire.

Table IX, première partie P_1..	$+\ 6'',25$
» deuxième partie P_2..	$+\ 0,01$
» troisième partie P_3..	$-\ 0,09$
Perturbation lunaire...	$+\ 6,17$

Calcul de la nutation.

Nutation lunaire, Table X...	$\Psi_1 = -4'',12$ $\Psi_2 = +0,17$
Nutation solaire, Table XI...	$\Psi_\odot = -0,53$
Nutation..........	$-4,48$

Partie variable de l'aberration.

Table XII.... $+\ 0'',32$

Perturbation produite par Mercure.

Table XIII... $-\ 0'',04$

Perturbation produite par Vénus.

Table XIV,	$l'' - l' = \delta'$	2753	$+\ 8'',61$
» XV,	$l'' + 2\delta'$	362	$+\ 2,28$
» XVI,	$l'' + 3\delta'$	3115	$+\ 0,34$
» XVII,	$2l'' + 3\delta'$	1971	$-\ 0,28$
» XVIII,	$l'' + 4\delta'$	1868	$+\ 0,15$
» XIX,	$2l'' + 5\delta'$	3477	$+\ 0,07$
» XX,	$3l'' + 5\delta'$	2333	$+\ 0,09$
» XXI,	$5l'' + 8\delta'$	304	$+\ 0,68$
» XXII,	arg. l'', δ', ensemble des autres termes.......		$-\ 0,26$
	Perturbation..........		$+\ 11,68$

Perturbation par Mars.

Table XXIII,	$l''' - l'' = \delta''$........................	166	$+\ 1'',00$
» XXIV,	$l''' + \delta'''$........................	3188	$-\ 1,59$
» XXV,	$l''' + 2\delta'''$........................	3354	$-\ 0,28$
» XXVI,	$l''' + 3\delta'''$........................	3520	$-\ 0,09$
» XXVII,	$7l''' + 8\delta''$	2482	$+\ 0,21$
» XXVIII,	argu. l''' et δ''', ensemble des autres termes....		$-\ 0,26$
	Perturbation...........		$-\ 1,01$

Perturbation par Jupiter.

$\delta^{\text{iv}} = l^{\text{iv}} - l''$	3502	
Table XXIX		$-2'',31$
Tab. XXX, ensemble des autres termes.		$-0'',19$
Perturbation........		$-2''.50$

Perturbation par Saturne.

$\delta^{\text{v}} = l^{\text{v}} - l''$ ...	763
Table XXXI.	$+0'',65$

Ajoutant à L les valeurs que nous venons de trouver pour l'équation du centre, les perturbations planétaires et lunaires, la nutation et l'aberration, on en conclut, pour la valeur de la longitude cherchée,

$$\odot = 78^\circ 11' 27'', 50.$$

2° *Latitude du Soleil.* — Par l'effet des perturbations planétaires et lunaires, le Soleil ne se meut pas exactement dans le plan de l'écliptique ; il s'écarte, de part et d'autre de ce plan, d'un petit arc qui constitue sa latitude et que les Tables font connaître. Voici le calcul qui donne cette latitude pour le 9 juin 1875, temps moyen de Paris, en ne considérant que les actions provenant des planètes Vénus, Jupiter et Saturne, les seules, en effet, qui soient sensibles :

Perturbation de Vénus, Table XLII........	$+0'',05$
» de Jupiter, Table XLIII.....	$-0,14$
» de Saturne, Table XLIV......	$+0,04$
Action de la Lune, arg. $A + l'' + N$........	$+0,38$
Latitude.........	$+0,33$

3° *Rayon vecteur de la Terre.* — La formule qui exprime la partie elliptique de cette distance est la suivante (*voir* la Note additionnelle au Chapitre III),

$$R = a\left[1 + \tfrac{1}{2}e^2 - \left(e - \tfrac{3}{8}e^3 + \ldots\right)\cos\zeta - \left(\tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{2}e^4 + \ldots\right)\cos 2\zeta - \ldots\right],$$

dans laquelle a est le demi-grand axe de l'orbite de la Terre, e son excentricité et ζ l'anomalie moyenne $nt + \varepsilon - \omega$. La Table XXXII, construite sur cette formule, fait connaître cette partie de R, ainsi que sa variation séculaire, pour toutes les valeurs de l'anomalie ζ. On doit ensuite, si l'on veut obtenir cette distance avec toute la précision que comporte la théorie, avoir égard aux perturbations des planètes et de la Lune, comme on l'a vu précédemment. Voici un exemple de ce calcul pour la date considérée plus haut, et en ayant égard à toutes les influences :

Valeur de R (Table XXXII)...		1,0154238
Partie proportionnelle........	+	168
Variation séculaire....... ...	—	102
R................		1,0154304

Perturbation lunaire.

Première partie R_1...	+ 86
Deuxième partie R_2....	0
Perturbation lunaire...	+ 86

Perturbation par Vénus.

Table XXXV......	— 58
» XXXVI.....	+ 27
	— 31

Perturbation par Mercure.

Table XXXIV........	+ 3

Perturbation par Mars.

Table XXXVII.......	+ 47
» XXXVIII......	+ 13
	+ 60

Perturbation par Jupiter.

Table XXXIX....	+ 106
» XL........	— 22
	+ 84

Perturbation par Saturne

Table XLI....	+ 4,0

En ajoutant ces diverses corrections à la valeur de R trouvée ci-dessus, on obtient

$$R = 1,0154510.$$

VII. — Ascension droite et déclinaison.

Connaissant la longitude $\odot$ du Soleil et l'obliquité ω de l'écliptique, on en conclut l'ascension droite et la déclinaison par les formules que nous avons rapportées au § I du Chapitre I (I^re^ Partie), savoir

$$\tang \mathcal{A} = \cos\omega \tang\odot,$$
$$\sin\mathcal{D} = \sin\omega \sin\odot,$$

formules auxquelles on doit joindre, comme nous l'avons dit, celles

$$\delta\mathcal{A} = -\frac{\sin\omega\cos\mathcal{A}}{\cos\mathcal{D}}\lambda_{\odot}, \qquad \delta\mathcal{D} = \frac{\cos\omega}{\cos\mathcal{D}}\lambda_{\odot},$$

afin d'avoir égard à la petite latitude du Soleil. La Table L, construite sur ces dernières formules, donne les corrections $\delta\mathcal{A}$ et $\delta\mathcal{D}$, avec $\odot$ pour argument, et dans l'hypothèse de $\lambda_{\odot} = +1''$. Voici un exemple de ce calcul pour le 9 juin 1875 à midi moyen, à Paris :

log tang $\odot$	0,6796972	log sin $\odot$	9,9907095
log cos ω	9,9625367	log sin ω	9,5999633
log tang $\mathcal{A}$	0,6422339	log sin $\mathcal{D}$	9,5906728
$\mathcal{A}$	77° 9′39″,39	$\mathcal{D}$	22°55′57″,43
$\delta\mathcal{A}$, Table L $= -0,10 \times +0,33$.	− 0° 0′ 0″,03	$\delta\mathcal{D} = +1,00 \times 0,33$	0° 0′ 0″,33
$\mathcal{A}$ corrigé	77° 9′39″,36	$\mathcal{D}$ corrigé	22°55′57″,76
$\mathcal{A}$ à midi moyen, à Paris	$5^h\ 8^m 38^s,63$		

Les ascensions droites et les déclinaisons apparentes données dans la *Connaissance des Temps* sont accompagnées d'une colonne de *différences* destinée à faciliter le calcul des interpolations. Pour les ascensions droites, ces différences sont toutes positives, car ces arcs croissent sans cesse ; pour les déclinaisons, elles sont, comme on sait, positives de 0° à 90° et négatives de 90° jusqu'à 180°.

VIII. — Temps sidéral à midi moyen à Paris.

Le temps sidéral à midi moyen ou l'ascension droite moyenne du Soleil est l'heure sidérale du passage du Soleil moyen au méridien de Paris. Comme

$$\text{ascension droite } \odot \text{ moyen} = \text{longitude moyenne L},$$

on en conclut, pour l'époque $1850 + t$,

$$\text{ascension droite } \odot \text{ moyen} = \text{L} = 280^\circ 46' 43'',51 + 1296027'',6784\, t.$$

C'est donc cette valeur qui, réduite en temps, fait connaître l'ascension droite moyenne du Soleil pour la même époque. On l'obtient, à une autre époque, en ajoutant à L le produit

$$\text{A} \times j \times 3^m 56^s,5553,$$

j et A étant les nombres de jours et d'années écoulés depuis l'époque de la Table. Mais les termes de cette expression ont été réduits en Tables, comme nous l'avons vu § VI, et le plus court est donc d'y recourir. Voici un exemple pour le 9 juin 1875 :

Longit. moyenne ⊙ à midi moyen.	77°.26′.28″,07
Nutation	— 0. 0. 4,48
	77.26.23,59

Ascension droite du Soleil moyen ou temps sidéral à midi moyen :

$$5^h 9^m 45^s,57.$$

Dans le calcul des *Éphémérides,* on détermine l'ascension droite moyenne du Soleil qui correspond au 1^{er} janvier de l'année que l'on considère, et l'on forme ensuite les autres nombres en ajoutant successivement à cette ascension droite la quantité

$$3^m 56^s,5553.$$

IX. — Temps moyen à midi vrai à Paris.

La *Connaissance des Temps* donne, pour tous les jours de l'année, le *temps moyen à midi vrai* ou l'heure que doit marquer une pendule réglée sur le temps moyen lorsque le centre du Soleil vrai est au méridien de Paris. Cette quantité est ce qu'il faut retrancher de l'heure de temps moyen pour avoir l'heure vraie, ou l'*équation du temps.* Lorsque le Soleil vrai précède au méridien le Soleil moyen, le Soleil vrai avance et l'équation du temps est positive; elle est négative, au contraire, lorsque c'est le Soleil moyen qui précède le Soleil vrai. Dans la *Connaissance des Temps,* et pour la facilité des applications numériques, on a remplacé ces nombres négatifs par leur complément à 12^h. Ainsi, le 11 février 1875, on trouve que le temps moyen à midi vrai est $0^h 14^m 30^s,10$: c'est l'équation du temps additive telle que la donne la *Connaissance des Temps.* Le 14 octobre de la même année, on trouve que le temps moyen à midi vrai est $11^h 46^m 6^s,28$: l'équation du temps est négative et égale à $-13^m 53^s,72$.

L'ascension droite du Soleil moyen et celle du Soleil vrai étant données dans la *Connaissance des Temps* pour tous les jours de l'année, il est bien facile d'en conclure, pour une date quelconque, l'équation du temps, qui est la différence entre ces deux ascensions droites; mais, comme ces arcs ne sont donnés que pour midi moyen, leur différence ne peut faire connaître que l'*équation du temps à midi moyen de Paris*. On obtient cette équation à midi vrai en déterminant la variation qu'éprouvent ces coordonnées dans l'intervalle de temps représenté par l'équation du temps à midi moyen, puis prenant la différence. Voici un exemple de ce calcul pour le 5 janvier 1875 :

	h m s
Ascension droite du Soleil vrai à midi moyen....	19. 4.15,61
Temps sidéral à midi moyen..................	18.58.39,75
Équation du temps à midi moyen......	+ 0. 5.35,86

Cherchant maintenant la variation des ascensions droites dans l'intervalle de temps + $5^m 35^s,86$, on a

		h m s
Ascension droite du Soleil moyen à midi moyen...		18.58.39,75
Variation en 24^h........................	$3^m 56^s,56$	
» en 1^h..................	$0^m\ 9^s,84$	
» en $5^m 35^s,86$..................	$0^m\ 0^s,92$	0. 0. 0,92
Ascension droite du Soleil à midi vrai...		18.58.40,67

puis

		h m s
Ascension droite du Soleil vrai à midi moyen......		19. 4.15,61
Variation en 24^h........................	$4^m 23^s,30$	
» en 1^h......	$0^m 10^s,97$	
» en $5^m 35^s,86$..................	$0^m\ 1^s,02$	0. 0. 1.02
		19. 4.16,63

On a donc

Équation du temps à midi vrai
= ascension droite du Soleil vrai à midi vrai
— ascension droite du Soleil moyen à midi vrai
= $5^m 35^s,96$.

On conclut de là que l'excès de l'équation du temps à midi moyen sur l'équation du temps à midi vrai est, dans l'exemple qui précède, égal à — $0^s,10$. Ces différences sont toujours extrêmement petites; elles sont données dans la *Connaissance des Temps* de cinq en cinq jours (p. 38 et 39), sous le titre d'*Équation du temps à midi moyen moins équation du temps à midi vrai*, et servent ainsi à passer de l'équation du temps à midi vrai à l'équation du temps à midi moyen.

X. — Parallaxe horizontale du Soleil.

Soient Π la parallaxe horizontale du Soleil et Δ la distance du Soleil au centre de la Terre. Comme à la distance moyenne $\Pi = 8'',86$, on a, à la distance Δ,

$$\Pi = \frac{8'',86}{\Delta}.$$

Voici une application de cette formule pour le 9 juin 1875 :

$\log 8'',86$	0,9474337
$\log \Delta$	0,0066589
$\log \Pi$	0,9407748

$$\Pi = 8'',7252.$$

Ces nombres sont donnés dans la *Connaissance des Temps,* de cinq jours en cinq jours.

XI. — Demi-diamètre du Soleil.

En appelant D ce demi-diamètre, on a, à la *distance moyenne,* $D = 16'1'',45$ (¹); à la distance Δ, on a donc

$$D = \frac{16'1'',45}{\Delta}.$$

Cette formule, appliquée à notre exemple, donne

$\log 16'1'',45$	2,9829267
$\log \Delta$	0,0066589
$\log D$	2,9762678

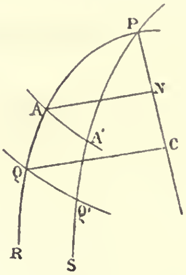
$$D = 15'46'',82.$$

(¹) Cette valeur de D résulte d'un grand nombre d'observations de passages faites à Greenwich, de 1836 à 1847. Le Verrier, par l'observation des passages de Mercure sur le Soleil, a trouvé $2D = 32'0'',01$.

XII. — Durée du passage du demi-diamètre par le méridien.

Soient PR et PS (*fig.* 16) deux cercles horaires tangents aux bords du disque du Soleil; ces cercles interceptent sur l'équateur et sur l'écliptique des arcs AA′, QQ′ qui sont entre eux comme leurs rayons AN, CQ, en sorte que l'on a, en faisant $CQ = 1$ et appelant D le demi-diamètre du Soleil,

Fig. 16.



$$\frac{QQ'}{2D} = \frac{1}{NA}.$$

Mais, en représentant par $\mathfrak{D}$ la déclinaison du Soleil, on a évidemment

$$NA = \cos\mathfrak{D}.$$

On a donc

$$QQ' = \frac{2D}{\cos\mathfrak{D}},$$

et pour la durée t du demi-diamètre, exprimée en temps, il vient

$$t = \frac{D}{15\cos\mathfrak{D}}.$$

Appliquons cette formule à l'évaluation, en temps moyen, de la durée du passage du demi-diamètre solaire par le méridien de Paris, le 10 avril 1875. On a

$$D = 15'59'',03 \quad \text{et en temps} \quad 63^s 56^t,12 = 63^s,935,$$

$$\mathfrak{D} = +7^\circ 54' 6'',5,$$

$$\begin{array}{lr} \log D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1,8057387 \\ -\log 15\cos\mathfrak{D} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{9,9958567} \\ \log t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1,8098820 \end{array}$$

$$t = 1^m 4^s,54.$$

Convertissant cette durée en temps sidéral, on obtient

$$t = 1^{m}\,4^{s},71.$$

Ce sont les valeurs que donne la *Connaissance des Temps*.

XIII. — Aberration.

L'aberration du Soleil en longitude, la seule qu'il soit nécessaire de considérer, est, comme nous l'avons vu § III, Chap. V (Ire Partie), égale à

$$-20'',445[1 + e \cos(\odot - \Pi)]$$

ou à

$$-20'',445 - 0'',341 \cos(\odot - \Pi),$$

en prenant pour la valeur de l'excentricité $e = 0,016853$, et, comme nous l'avons fait remarquer au § VI du présent Chapitre, cette aberration se trouve renfermée dans la longitude moyenne. Il en résulte que, lorsqu'on a besoin de connaître la *longitude vraie* du Soleil, comme cela est nécessaire dans le calcul des lieux géocentriques des planètes, il faut ajouter à la *longitude apparente* donnée dans la *Connaissance des Temps* la quantité

$$+ 20'',445 + 0'',341 \cos(\odot - \Pi),$$

que l'on trouve toute calculée de cinq en cinq jours aux pages 38 et 39 de ces *Éphémérides*. Le nombre $-20'',445$ qui figure dans cette expression est ce que nous avons appelé la *constante de l'aberration;* et, quant à la partie variable $-0'',341 \cos(\odot - \Pi)$, qui dépend de l'excentricité, on en trouve sa valeur calculée pour toutes celles de l'angle $\odot - \Pi$ ou ζ dans les Tables solaires de Le Verrier, à la page 156; il est donc bien facile, comme on voit, d'obtenir ces nombres. Cherchons, par exemple, l'aberration du Soleil pour le 9 juin 1875. On a

Partie constante............	$-20'',445$
» variable.............	$+0,32$
Aberration	$-20,13$

XIV. — Coordonnées du Soleil.

Les coordonnées rectilignes X, Y, Z du Soleil rapportées à l'équateur sont données dans la *Connaissance des Temps,* pour chaque jour de l'année et pour midi moyen de Paris. On les obtient à l'aide des relations

$$\begin{aligned}X &= R\cos\odot,\\ Y &= R\sin\odot\cos\omega - \lambda\sin\omega\sin 1'',\\ Z &= R\sin\odot\sin\omega + \lambda\cos\omega\sin 1'',\end{aligned}$$

dans lesquelles R désigne le rayon vecteur de la Terre, $\odot$ la longitude *vraie* du Soleil comptée de l'équinoxe vrai, λ la latitude du Soleil (¹) et ω l'obliquité apparente de l'écliptique.

En mettant dans ces formules pour ω l'obliquité moyenne du 1^{er} janvier et pour $\odot$ la longitude du Soleil comptée de l'équinoxe moyen au 1^{er} janvier, on obtient le système de coordonnées X', Y', Z'; alors l'axe fixe des X' est toujours dirigé vers l'équinoxe moyen du 1^{er} janvier, et l'on a

$$X' = X + \Delta X,\quad Y' = Y + \Delta Y,\quad Z' = Z + \Delta Z.$$

Quant aux corrections ΔX, ΔY, ΔZ qui, appliquées aux valeurs des coordonnées X, Y, Z, permettent d'opérer la réduction à l'équinoxe moyen du 1^{er} janvier, on a, pour les déterminer,

$$\begin{aligned}\Delta X &= +R\Delta\odot\sin 1''\sin\odot,\\ \Delta Y &= -R\Delta\odot\sin 1''\cos\omega\cos\odot + R\Delta\omega\sin 1''\sin\omega\sin\odot,\\ \Delta Z &= -R\Delta\odot\sin 1''\sin\omega\cos\odot - R\Delta\omega\sin 1''\cos\omega\sin\odot,\end{aligned}$$

expressions dans lesquelles, pour chaque jour de l'année, $\Delta\odot$ représente la somme de la précession et de la nutation en longitude, puis $\Delta\omega$ la somme de la nutation et de la diminution de l'obliquité de l'écliptique.

(¹) A cause de la petitesse de λ, les corrections $-\lambda\sin\omega\sin 1''$ et $+\lambda\cos\omega\sin 1''$ sont toujours très faibles; ces corrections ne portent, en effet, que sur les sixième et septième décimales des valeurs de Y et de Z.

NOTES ADDITIONNELLES AU CHAPITRE II.

I.

EXPRESSIONS COMPLÈTES DES VALEURS DE LA NUTATION LUNI-SOLAIRE EN LONGITUDE ET DE L'OBLIQUITÉ.

Bien que les valeurs de $\Delta\omega$ et de $\Delta\mathcal{L}$ données dans le texte puissent suffire en général pour les besoins de l'Astronomie, nous croyons devoir rapporter ici les expressions complètes de ces valeurs, telles qu'elles ont été obtenues par Peters dans l'Ouvrage, à jamais mémorable, *Numerus constans nutationis,* etc., et pour les deux époques 1800 et 1900. Nous y joindrons les valeurs de $\delta\mathcal{A}$ et de $\delta\mathcal{D}$, données dans le même Ouvrage et que l'on peut avoir à employer dans certains calculs délicats.

En appelant

☊ la longitude du nœud ascendant de la Lune;
$\odot$ et ☾ les longitudes vraies du Soleil et de la Lune;
Π et Π' les longitudes de leur périgée,

on a

$$
\begin{aligned}
\Delta\omega = {} & \underset{(+9)}{+9'',2231} \cos\text{☊} \underset{(+1)}{-0'',0897} \cos 2\text{☊} \\
& \underset{(-1)}{+0,0886} \cos 2\text{☾} \underset{(-3)}{+0'',5510} \cos 2\odot \\
& \underset{(-1)}{+0,0093} \cos(\odot + \Pi) + 0,0027 \cos(3\odot - \Pi) \\
& + 0,0181 \cos(2\text{☾} - \text{☊}) - 0,0067 \cos(2\odot - \text{☊}) \\
& + 0,0113 \cos(3\text{☾} - \Pi') - 0,0050 \cos(\text{☾} - \Pi') \\
& - 0,0031 \cos(\text{☾} + \text{☊} - \Pi') + 0,0030 \cos(\text{☾} - \text{☊} - \Pi') \\
& - 0,0010 \cos(\text{☾} - \text{☊} + \Pi') - 0,0024 \cos(2\Pi' - \text{☊}) \\
& + 0,0023 \cos(3\text{☾} - 2\odot + \Pi') + 0,0023 \sin\Pi' \\
& - 0,0008 \cos 2\Pi' - 0,0011 \cos(\text{☾} + 2\odot - \Pi') \\
& + 0,0012 \cos(4\text{☾} - 2\Pi') + 0,0014 \cos(4\text{☾} - 2\odot),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} = {} & \underset{(-172)}{-17'',2405} \sin\text{☊} + 0'',2073 \sin 2\text{☊} \\
& \underset{(-1)}{-1,2694} \sin 2\odot \underset{(-4)}{+0,1279} \sin(\odot - \Pi) \\
& - 0,2041 \sin 2\text{☾} + 0,0677 \sin(\text{☾} - \Pi')
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&-0'',0339\sin(2\text{☾}-\text{☊})+0'',0125\sin(2\odot-\text{☊})\\
&-0,0261\sin(3\text{☾}-\Pi')+0,0115\sin(\text{☾}+\Pi')\\
&+0,0150\sin(\text{☾}-2\odot+\Pi')+0,0058\sin(\text{☾}+\text{☊}-\Pi')\\
&+0,0057\sin(\text{☾}-\text{☊}-\Pi')+0,0020\sin(\text{☾}-\text{☊}+\Pi')\\
&+0,0044\sin(2\Pi'-\text{☊})+0,0061\sin(2\text{☾}-2\odot)\\
&-0,0052\sin(3\text{☾}-2\odot+\Pi')+0,0053\sin(2\odot-2\Pi')\\
&+0,0026\cos\Pi'+0,0020\sin 2\Pi'\\
&+0,0025\sin(\text{☾}+2\odot-\Pi')+0,0028\sin(2\text{☾}-2\Pi')\\
&+0,0024\sin(2\text{☾}-2\text{☊})-0,0024\sin(2\odot-2\text{☊})\\
&-0,0028\sin(4\text{☾}-2\Pi')-0,0033\sin(4\text{☾}-2\odot)\\
&-0,0213\sin(\odot+\Pi)-0,0058\sin(3\odot-\Pi)\\
&-0,0005\sin(2\odot-2\Pi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{A}=&-\underset{(-173)}{15'',8148}\sin\text{☊}-[\underset{(+33)}{6'',8650}\sin\mathcal{A}\sin\text{☊}+\underset{(+9)}{9'',2231}\cos\mathcal{A}\cos\text{☊}]\operatorname{tang}\mathcal{D}\\
&+0,1903\sin 2\text{☊}+[0,0822\sin\mathcal{A}\sin 2\text{☊}+\underset{(-1)}{0,0896}\cos\mathcal{A}\cos 2\text{☊}]\operatorname{tang}\mathcal{D}\\
&-0,1872\sin 2\text{☾}-[\underset{(-1)}{0,0813}\sin\mathcal{A}\sin 2\text{☾}+\underset{(-1)}{0,0886}\cos\mathcal{A}\cos 2\text{☾}]\operatorname{tang}\mathcal{D}\\
&+0,0621\sin(\text{☾}-\Pi')+0,0270\sin\mathcal{A}\sin(\text{☾}-\Pi')\operatorname{tang}\mathcal{D}\\
&-\underset{(-2)}{1,1642}\sin 2\odot-[\underset{(-2)}{0,5054}\sin\mathcal{A}\sin 2\odot+\underset{(-3)}{0,5509}\cos\mathcal{A}\cos 2\odot]\operatorname{tang}\mathcal{D}\\
&+\underset{(-3)}{0,1173}\sin(\odot-\Pi)+\underset{(-2)}{0,0509}\sin\mathcal{A}\sin(\odot-\Pi)\operatorname{tang}\mathcal{D}\\
&-0,0195\sin(\odot+\Pi)\\
&-[0,0085\sin\mathcal{A}\sin(\odot+\Pi)+\underset{(-1)}{0,0093}\cos\mathcal{A}\cos(\odot+\Pi)]\operatorname{tang}\mathcal{D},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{D}=&-\underset{(-33)}{6'',8650}\cos\mathcal{A}\sin\text{☊}+\underset{(+9)}{9'',2231}\sin\mathcal{A}\cos\text{☊}\\
&+0,0822\cos\mathcal{A}\sin 2\text{☊}-\underset{(-1)}{0,0896}\sin\mathcal{A}\cos 2\text{☊}\\
&-\underset{(+1)}{0,0813}\cos\mathcal{A}\sin 2\text{☾}+\underset{(-1)}{0,0886}\sin\mathcal{A}\cos 2\text{☾}\\
&+0,0270\cos\mathcal{A}\sin(\text{☾}-\Pi')\\
&-\underset{(+2)}{0'',5054}\cos\mathcal{A}\sin 2\odot+\underset{(-3)}{0'',5509}\sin\mathcal{A}\cos 2\odot\\
&+\underset{(-2)}{0,0509}\cos\mathcal{A}\sin(\odot+\Pi)\\
&-0,0085\cos\mathcal{A}\sin(\odot+\Pi)+\underset{(-1)}{0,0093}\sin\mathcal{A}\cos(\odot+\Pi).
\end{aligned}$$

Les chiffres écrits entre parenthèses et placés au bas des nombres sont les corrections qu'il faut appliquer, avec leurs signes, aux coefficients numériques des valeurs de $\Delta\omega$, $\Delta\mathcal{L}$, $\delta\mathcal{A}$ et $\delta\mathcal{W}$ qui se rapportent à 1800 pour obtenir celles qui conviennent à l'époque 1900. Dans la valeur de $\delta\mathcal{A}$ ces corrections s'appliquent aux nombres entre crochets, abstraction faite du signe qui est placé devant.

II.

DU TEMPS ET DE SA MESURE.

1° *Des différentes espèces de temps.* — La révolution de la sphère céleste étant parfaitement uniforme, on s'en est servi pour mesurer le temps. On distingue trois espèces de temps : le *temps sidéral,* le *temps vrai* et le *temps moyen.* Le temps qui s'écoule depuis l'instant où une étoile passe au méridien supérieur jusqu'à celui où elle y revient, durée qui est la même pour toutes les étoiles, est ce qu'on nomme le *jour sidéral.* Cette durée est divisée en 24 heures, que l'on compte de 0 à 24, à partir de l'instant où le point vernal ♈ passe au méridien. C'est l'heure marquée par les pendules des observatoires. Le *jour solaire vrai* est l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du centre du Soleil au même méridien. On le divise en 24 heures solaires vraies, que l'on compte de 0 à 24, d'un midi vrai au midi suivant. Cette durée constitue ce qu'on appelle le *jour astronomique.* Enfin, on appelle *jour moyen* l'intervalle de temps compris entre deux passages consécutifs au même méridien du Soleil fictif qu'on imagine parcourir annuellement l'équateur céleste avec une vitesse uniforme. Le jour moyen est divisé en 24 heures moyennes, que l'on compte de 0 à 24, d'un midi au suivant, le midi moyen étant l'instant où le centre du Soleil moyen traverse le méridien supérieur. Cet astre est d'accord avec le Soleil vrai à quatre époques différentes, savoir : vers le 15 avril, le 14 juin, le 1er septembre et le 24 décembre. De la première époque à la deuxième, le Soleil vrai précède le Soleil moyen ; de la deuxième à la troisième, il en est précédé ; de la troisième à la quatrième, le Soleil vrai reprend son avance sur le Soleil moyen, et ainsi de suite. La différence entre le temps vrai et le temps moyen, pour chaque jour, est ce qu'on nomme l'*équation du temps.* Cette équation change donc quatre fois de signe par an.

2° *Calcul de l'heure vraie au moyen de l'heure moyenne, et réciproquement.* — En désignant par h_v l'heure vraie, par h_m l'heure moyenne et par ε l'équation du temps, on a

$$(a) \qquad \varepsilon = h_m - h_v, \quad \text{d'où} \quad h_m = h_v + \varepsilon, \quad h_v = h_m - \varepsilon.$$

Ainsi, l'observation du Soleil ayant fait connaître l'heure vraie h_v, il suffira d'ajouter algébriquement à cette heure vraie l'équation du temps ε pour avoir l'heure moyenne correspondante. Réciproquement, en retranchant de l'heure moyenne h_m l'équation du temps, on aura l'heure vraie.

Exemple I. — *Un phénomène a été observé le* 22 *octobre* 1875, *à* $12^{\text{h}}57^{\text{m}}18^{\text{s}},03$, *temps vrai : on demande le temps moyen correspondant.*

On a

$$h_m = h_v + \varepsilon = h_v + \text{temps moyen à midi vrai corrigé.}$$

	h m s
Temps vrai donné	12.57.18,03
Temps moyen à midi vrai le 22 octobre (*C. d. T.*).	11.44.34,36
La variation diurne de ε du 22 au 23 est $8^{\text{s}},55$; en 1^{h} elle est de $0^{\text{s}},356$ et en $12^{\text{h}}57^{\text{m}}18^{\text{s}}$ ou $12^{\text{h}},95$ de	— 0. 0. 4,61
Donc, heure moy. de l'observ. (en ôtant 12^{h}).	12.41.47,78

Exemple II. — *Quelle est l'heure moyenne qui répond à l'heure vraie* $4^{\text{h}}27^{\text{m}}31^{\text{s}},59$ *le* 2 *février* 1875?

	h m s
Temps vrai donné................................	4.27.31,59
Temps moyen à midi vrai le 2 février = ε.........	0.13.57,62
La variation de ε va en augmentant et est de $6^{\text{s}},85$ du 2 au 3, c'est-à-dire en 24^{h}; en 1^{h} elle est de $0^{\text{s}},285$ et en $4^{\text{h}}27^{\text{m}}31^{\text{s}}$ de	+ 0. 0. 1,27
Donc, heure moyenne demandée..................	4.41.30,48

Exemple III. — *On demande le temps vrai qui répond, le* 22 *octobre* 1875, *à l'heure moyenne* $12^{\text{h}}41^{\text{m}}47^{\text{s}},78$.

On a

$$h_v = h_m - \varepsilon = h_m - \text{temps moyen à midi vrai corrigé.}$$

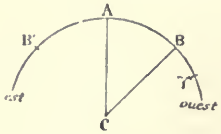
	h m s
Heure moyenne donnée..........................	12.41.47,78
Temps moyen à midi vrai le 22	—11.44.34,36
Heure approchée de temps vrai + 12^{h}.......	12.57.13,42
Correction pour $12^{\text{h}}57^{\text{m}}13^{\text{s}},42$	+ 0. 0. 4,61
Heure vraie demandée....................	12.57.18,03

La correction de ε doit porter ici sur le temps vrai; mais, comme ce temps est précisément l'inconnu de la question, on interpole pour l'heure approchée $12^{\text{h}}57^{\text{m}}13^{\text{s}},42$, sauf à corriger le résultat à l'aide d'une seconde approximation, s'il est nécessaire.

3° *Calcul de l'heure sidérale au moyen de l'heure moyenne, et réciproquement.* — Soient (*fig.* 17)

♈BAB′ l'équateur;
CA le méridien du lieu;
♈ le point équinoxial à partir duquel on compte toutes les ascensions droites; ce point s'avance uniformément vers l'ouest avec toute la sphère céleste.

Fig. 17.



♈A est le temps écoulé depuis que le point ♈ a traversé le méridien ou que le jour sidéral a commencé; c'est l'ascension droite du méridien, ou, en temps, l'heure sidérale. Supposons que le Soleil vrai ou moyen projeté sur l'équateur soit en B; l'arc ♈B sera son ascension droite, et celui AB le temps écoulé depuis son passage en A au méridien CA, c'est-à-dire l'heure solaire, et, comme ♈A = AB + B♈, on aura

(*b*) $h_s = h_v + \mathcal{A}_{\odot}$ vrai et $h_s = h_v + \mathcal{A}_{\odot}$ moyen.

Nous supposons ici que le Soleil est situé à l'ouest; s'il était situé à l'est, on aurait $\mathcal{A}_{\odot} = 24^h - \delta$, δ étant la distance du Soleil à l'équinoxe ♈, et, comme on peut toujours ajouter ou retrancher 24^h, on voit que l'on retombe sur les mêmes équations (*b*).

Exemple I. — *On demande l'heure sidérale qui correspond, le 2 août 1875, à* $21^h32^m14^s,87$, *temps moyen.*

On a

$$h_s = h_m + \mathcal{A}_{\odot} \text{ moyen} + \text{correction (Table VI, voir } C.\ des\ T.\text{)}.$$

	h m s
Heure moyenne donnée, le 2 août	21.32.14,87
Temps sidéral à midi moyen ou $\mathcal{A}_{\odot}$ moyen à midi (*Connaissance des Temps*)...............	+ 8.42.40,04
Correction pour $21^h32^m15^s$ (Table VI)............	+ 0. 3.32,28
Heure sidérale demandée (en ôtant 24^h)	6.18.27,19

Exemple II. — *On demande l'heure moyenne, le 25 octobre 1875, qui répond à l'heure sidérale* $9^h16^m41^s,05$.

On a

$$h_m = h_s - (\mathcal{A}_\odot \text{ moyen} + \text{correction Table V}).$$

	h m s
Heure sidérale donnée............................	9.16.41,05
Temps sidéral = $\mathcal{A}_\odot$ moy. le 25 à midi moy. (*C. d. T.*)	−14.13.50,64
Heure moyenne approchée (en ajoutant 24^h).	19. 2.50,41
Correction pour $19^h 2^m 50^s,41$ (Table V)............	− 0. 3. 7,23
Heure moyenne demandée.................	18.59.43,18

Nous employons dans ce cas la Table V, car la correction doit être exprimée en temps moyen, et ici se présente une difficulté analogue à celle du § II, puisque l'heure moyenne est précisément l'inconnue du problème; mais on peut prendre cette correction pour la valeur approchée $19^h 2^m 50^s,41$, sauf à corriger ensuite le résultat à l'aide d'une seconde approximation, si on le juge nécessaire.

Exemple III. — *On demande l'heure moyenne du passage de Régulus le* 22 *septembre* 1875.

L'ascension droite d'une étoile étant le temps sidéral de son passage au méridien, on a :

	h m s
$\mathcal{A}_*$ = temps sidéral	10. 1.43,96
Temps sidéral à midi moyen le 22..................	−12. 3.44,36
	21.57.59,60
Correction pour $21^h 57^m 59^s,60$....................	− 0. 3.35,92
Heure moyenne du passage.................	21.54.23,68

Exemple IV. — *On demande l'heure vraie qui répond, le* 8 *août* 1875, *à* $19^h 11^m 45^s,72$ *de temps sidéral.*

Ce problème se ramène aux précédents, en cherchant d'abord l'heure moyenne qui répond à l'heure sidérale donnée, et convertissant ensuite cette heure moyenne en heure vraie, comme il est dit au § II. Ainsi, dans l'exemple proposé, on a :

	h m s
Heure sidérale donnée............................	19.11.45,72
$\mathcal{A}_\odot$ moyen le 8 (*Connaissance des Temps*)......	− 9. 6.19,39
Heure moyenne approchée..................	10. 5.26,33
Correction pour cette heure (Table VI)..........	− 0. 1.39,46
Heure moy. qui répond au temps sidéral donné.	10. 3.46,87

Convertissant maintenant cette heure moyenne en heure vraie, on trouve :

	h m s
Heure moyenne	10. 3.46,87
Équation du temps à midi vrai	— 0. 5.26,89
Heure approchée de temps vrai	9.58.19,98
La variation diurne étant $7^s,86$, on a, pour le mouvement horaire, $0^s,328$, et pour $9^h 58^m 20^s = 9^h,97$.	— 0. 0. 3,27
Heure vraie demandée	9.58.16,71

III.

TABLES PARTICULIÈRES DU MOUVEMENT DU SOLEIL.

Le calcul des lieux du Soleil se trouve un peu simplifié par l'emploi des Tables particulières que Le Verrier a données dans la Section VI de sa *Théorie du Soleil,* et dont nous allons, dans cette Note, indiquer brièvement et la formation et l'usage. C'est surtout dans la détermination de la longitude que ce mode de calcul est expéditif. On peut l'appliquer aussi à la recherche de l'ascension droite, mais il n'y a avantage à le faire que lorsqu'on veut obtenir cet élément directement, sans passer par la longitude. Dans le cas ordinaire, il est préférable de se servir des formules que nous avons rapportées au § VII du présent Chapitre.

Désignons par S une période de $365\frac{1}{4}$ jours, par m le nombre entier de périodes accomplies depuis l'origine du temps, qui se trouve, dans ces Tables, fixé au 1^er^ janvier de l'année 1801, et par j le nombre de jours excédant une période, en sorte que $j + mS$ exprime le temps écoulé à partir de l'origine. Les valeurs de $\odot$, R et $\mathcal{A}$, qui accomplissent leurs révolutions en 365 jours $\frac{1}{4}$, à très peu près, sont susceptibles de se développer suivant les puissances de m, et l'on peut, dans ces développements, se borner aux secondes puissances de cette quantité : cette précision suffit, en effet, pendant plusieurs siècles avant et après l'origine du temps. On a ainsi

$$\odot = v_0 + v_1\, m + v_2 \left(\frac{m}{100}\right)^2,$$

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_0 + \mathrm{R}_1\, m + \mathrm{R}_2 \left(\frac{m}{100}\right)^2,$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1\, m + \mathcal{A}_2 \left(\frac{m}{100}\right)^2,$$

expressions dans lesquelles v_0, v_1, v_2, R_0, R_1, R_2, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ désignent des fonctions de j.

Ces formules ont été réduites en Tables dans la Section VI de la *Théorie du Soleil.* La Table I donne la valeur de j pour le 1$^{\text{er}}$ janvier de chaque année, à midi moyen, ainsi que le nombre m de périodes accomplies, et la Table II fait connaître pour chaque division de j en six heures les valeurs des fonctions v_0, v_1, v_2, R_0, R_1, R_2, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ qui composent la longitude, la distance à la Terre et l'ascension droite. On a tenu compte, dans le calcul de ces valeurs, des parties séculaires, proportionnelles au temps et au carré du temps, qui proviennent soit des expressions de la longitude moyenne et de la longitude du périgée, soit de l'expression de l'équation du centre, et aussi des termes de l'aberration et de la nutation solaire, ainsi que d'une petite correction due à l'effet des perturbations à très longues périodes de la longitude moyenne. Il reste à ajouter aux valeurs de $\odot$ et R qui résultent de ce premier calcul les termes provenant des perturbations planétaires et ceux dus à l'effet de la nutation et de la perturbation lunaires. Or, c'est ce qu'il est bien aisé de faire pour les premiers termes à l'aide de la Table III et pour les autres termes au moyen des Tables de la Section V. Relativement à l'ascension droite déduite de la Table II, elle a besoin de recevoir, outre la petite correction provenant de la latitude et que fournit la Table L de la Section V, celle exprimée par la formule

$$\delta\mathcal{A} = \frac{d\mathcal{A}}{d\odot}\delta\odot + \frac{d\mathcal{A}}{d\omega}\Omega,$$

dans laquelle $\delta\odot$ représente l'ensemble des corrections à appliquer à la longitude approchée pour avoir celle rigoureuse et où Ω est la nutation luni-solaire de l'obliquité. Les Tables XLVII et XLVIII de la Section V font connaître Ω, comme nous l'avons déjà vu, et, quant aux valeurs numériques des facteurs $\frac{d\mathcal{A}}{d\odot}$ et $\frac{d\mathcal{A}}{d\omega}$, elles sont immédiatement fournies par la Table V de la Section VI pour chacun des degrés de l'ascension droite du Soleil. Il est donc bien facile, comme on voit, d'obtenir $\delta\mathcal{A}$.

Voici une application des Tables dont nous parlons au calcul du lieu du Soleil, le 9 juin 1875, à midi moyen de Paris, date qui est la même que celle considérée plus haut.

On a ici

$$j = -12, \quad m = +74,$$

d'où

$$\left(\frac{m}{100}\right)^2 = 0,55,$$

et par suite

v_0 ……………	77°.36′. 1″,71	R_0 ……………	1,0155377
mv_1 ……………	+ 0.35.19,45	mR_1 ……………	— 1063,4
$v_2\left(\frac{m}{100}\right)^2$ ………	+ 0. 0. 0,28	$R_2\left(\frac{m}{100}\right)^2$ ………	— 9,9
	78.11.21,44		1,0154304
Perturb. planétaire.	+ 0. 0. 3,79	Perturb. planétaire.	+ 119
Nutation lunaire …	— 0. 0. 3,94	Perturb. lunaire…	+ 86
Perturbat. lunaire..	+ 0. 0. 6,17	R………..	1,0154509
⊙……….	78.11.27,46		

Termes de la latitude……	— 0″,05
Perturbation lunaire ……	+ 0,39
Latitude…………	+ 0,34

CHAPITRE III.

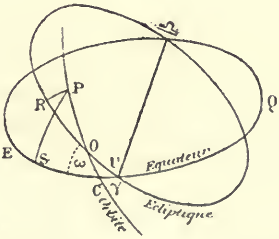
ÉPHÉMÉRIDES DES PLANÈTES.

I. — Calcul des lieux héliocentriques.

1° *Longitude.* — Le calcul du lieu d'une planète, à un instant donné, se détermine par des procédés analogues à ceux que nous avons fait connaître en traitant du Soleil. On suppose à l'astre un mouvement circulaire et uniforme, ce qui fait connaître son mouvement moyen et détermine sa longitude L; puis on corrige le résultat ainsi obtenu de l'erreur due à cette hypothèse, en ajoutant à L l'équation du centre et la partie de sa variation séculaire qui dépend du temps. On tient compte ensuite des actions perturbatrices des planètes et de la Lune, comme on l'a vu au § VI du Chapitre précédent.

La longitude ainsi déterminée est représentée par un arc OC (*fig.* 18), compté sur l'orbite de la planète, à partir du point C, déterminé par la relation OU = OC, et il reste, comme on voit, à faire subir à cette longitude une petite correction pour la ramener à être comptée sur l'écliptique.

Fig. 18.



Soient

O♎R♈ l'écliptique;
EQ l'équateur;
♈ le point vernal, origine des longitudes et des ascensions droites;
P la position de la planète sur son orbite à un instant donné.

En abaissant de ce lieu P les arcs PR et PS perpendiculaires, le premier sur l'écliptique et le second sur l'équateur, ♈R sera la longitude de la planète, ♈S son ascension droite, PR sa latitude et PS sa déclinaison, et il s'agira évidemment de calculer la différence des longitudes ♈R — CP ou OP — OR $= \rho$, différence qui est toujours un très petit arc. Or, en considérant le triangle OPR et faisant

$$\text{POR} = \varphi, \quad \cos\varphi = n, \quad \text{OP} = x, \quad \text{OR} = y, \quad \text{d'où} \quad \rho = x - y = v - v_1,$$

on aura

$$\operatorname{tang}\rho = \frac{\operatorname{tang}x - \operatorname{tang}y}{1 + \operatorname{tang}x \operatorname{tang}y} = \frac{(1-n)\operatorname{tang}x}{1 + n\operatorname{tang}^2 x}$$

$$= \frac{(1-n)\sin x\cos x}{\cos^2 x + n\sin^2 x} = \frac{(1-n)\sin 2x}{1 + \cos 2x + n - n\cos 2x} = \frac{\dfrac{1-n}{1+n}\sin 2x}{1 + \dfrac{1-n}{1+n}\cos 2x},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}\rho = \frac{m\sin 2x}{1 + m\cos 2x},$$

en posant, pour abréger, $\frac{1-n}{1+n} = m$. Cette expression de $\operatorname{tang}\rho$ se développe en série, comme on l'a vu au Chapitre III de la première Partie, et donne

$$\rho = v - v_1 = m\sin 2x - \tfrac{1}{2}m^2\sin 4x + \ldots,$$

ou bien, en appelant θ la longitude du nœud ascendant de l'orbite POC, et remarquant que m est égal à $\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varphi$ et x à $v - \theta$,

$$v - v_1 = \frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varphi}{\sin 1''}\sin 2(v-\theta) - \frac{\operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\varphi}{2\sin 1''}\sin 4(v-\theta) + \ldots.$$

Pour la longitude héliocentrique v_1 réduite à l'écliptique, on a donc

$$v_1 = v - \frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varphi}{\sin 1''}\sin 2(v-\theta) + \frac{\operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\varphi}{2\sin 1''}\sin 4(v-\theta) - \ldots.$$

La quantité qui, dans le second membre de cette expression, s'ajoute avec son signe à v, pour former v_1, porte le nom de *réduction à l'écliptique*. On en trouve la valeur toute calculée dans les Tables de Le Verrier.

La longitude ainsi déterminée est comptée à partir de l'*équinoxe moyen;* pour l'avoir rapportée à l'*équinoxe vrai,* c'est-à-dire telle que la donne la *Connaissance des Temps,* il faut encore ajouter à cette longitude la *nutation luni-solaire,* telle qu'elle résulte des Tables X et XI, données dans la Section V de la *Théorie du Soleil.* De là et de ce qui précède on conclut que

$$\begin{aligned}\text{longitude héliocentrique } v_1 = {} & \text{longitude moyenne} \\ & + \text{équation du centre} \\ & + \text{perturbations} \\ & + \text{réduction à l'écliptique} \\ & + \text{nutation luni-solaire.}\end{aligned}$$

2° *Latitude héliocentrique.* — La latitude héliocentrique ou l'arc $PR = s$ (*fig.* 18) se déduit directement du triangle sphérique rectangle OPR, lequel donne

$$\sin s = \sin(v - \theta)\sin\varphi. \tag{1}$$

On a aussi

$$\cos(v_1 - \theta)\cos s = \cos(v - \theta),$$
$$\operatorname{tang}(v_1 - \theta) = \operatorname{tang}(v - \theta)\cos\varphi,$$

en sorte que, multipliant la première de ces relations par la seconde et ayant égard à l'équation (1), on obtient

$$\operatorname{tang} s = \sin(v_1 - \theta)\operatorname{tang}\varphi. \tag{2}$$

Les Tables planétaires donnent la valeur de s déterminée par la première des formules ci-dessus, avec l'argument $(v - \theta)$. Comme l'inclinaison φ y est remplacée par sa valeur à l'origine du temps (1^{er} janvier 1850), il faut ajouter à s les termes de la variation séculaire proportionnels au temps écoulé depuis cette époque, termes qui sont fournis par les mêmes Tables. Ensuite, on doit avoir égard aux actions perturbatrices des planètes, comme nous l'avons expliqué au Chapitre qui précède.

3° *Rayon vecteur; rayon accourci.* — La distance de la planète au Soleil ou son rayon vecteur r est déterminé par la formule que nous avons rapportée au § VI du Chapitre II, et, quant au rayon accourci r_1, qui est la projection de r sur l'écliptique, il a évidemment pour expression

$$r_1 = r \cos s.$$

Les Tables font connaître la valeur de r et la partie de sa variation séculaire qui est proportionnelle au temps, ainsi que les termes provenant des perturbations des autres planètes.

II. — Lieux géocentriques.

Les coordonnées héliocentriques v, s, r étant connues pour un instant donné, il reste à en déduire les coordonnées correspondantes L, λ, Δ vues du centre de la Terre. On peut, à cet effet, se servir des formules que nous avons données au § IV du Chapitre I (Ire Partie), savoir (1) :

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta \cos\lambda \cos \mathrm{L} &= r \cos s \cos v + \mathrm{R} \cos \odot, \\ \Delta \cos\lambda \sin \mathrm{L} &= r \cos s \sin v + \mathrm{R} \sin \odot, \\ \Delta \sin\lambda &= r \sin s + \mathrm{R} \sin \lambda \odot. \end{aligned} \right.$$

On peut aussi faire usage de la méthode suivante, qui est celle dont se sont servis, jusqu'à ces dernières années, les calculateurs de la *Connaissance des Temps*.

Soient (*fig.* 19)

S la position du Soleil;
T celle de la Terre;
P le lieu de la planète;
P′ sa projection sur le plan de l'écliptique;
S☊ la ligne des nœuds;
T♈ celle des équinoxes.

---

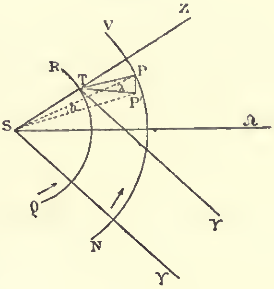
(1) On peut joindre à ces formules la suivante, qui leur sert de vérification,

$$\Delta \cos\lambda \sin(\mathrm{L} - v) = \mathrm{R} \sin(\odot - v),$$

et que l'on obtiendrait aisément en retranchant de la seconde des équations ci-dessus, multipliée par $\cos v$, la première multipliée par $\sin v$.

En menant S♈ parallèle à T♈, ♈SP' = H sera la longitude héliocentrique de la planète et PSP' = s sa latitude, ♈TP' = L la longitude géocentrique de la planète et PTP' = λ sa latitude;

Fig. 19.



de plus, on aura ST = R, SP = r, R et r désignant les distances du Soleil à la Terre et à la planète.

Considérons le triangle P'ST, dans lequel on connaît, outre les deux côtés ST = R, SP' = $r_1 = r\cos s$, l'angle compris

$$\mathrm{TSP'} = \mathrm{S} = \Upsilon\mathrm{ST} - \Upsilon\mathrm{SP'} = ♁ - \mathrm{H} = 180° + \odot - \mathrm{H},$$

ou la *commutation*. On a, dans ce triangle,

$$\frac{\mathrm{SP'} + \mathrm{ST}}{\mathrm{SP'} - \mathrm{ST}} = \frac{\tang\frac{1}{2}(\mathrm{P'TS} + \mathrm{SP'T})}{\tang\frac{1}{2}(\mathrm{P'TS} - \mathrm{SP'T})},$$

c'est-à-dire

$$\frac{r_1 + \mathrm{R}}{r_1 - \mathrm{R}} = \frac{\tang\frac{1}{2}(\mathrm{T} + \mathrm{P'})}{\tang\frac{1}{2}(\mathrm{T} - \mathrm{P'})}.$$

On a d'ailleurs

$$\mathrm{S} + \mathrm{T} + \mathrm{P'} = 180°,$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{T} + \mathrm{P'}) = \tfrac{1}{2}(180° - \mathrm{S}) = 90° - \tfrac{1}{2}\mathrm{S}.$$

Ainsi

$$\tang\tfrac{1}{2}(\mathrm{T} - \mathrm{P'}) = \frac{r_1 - \mathrm{R}}{r_1 + \mathrm{R}}\cot\tfrac{1}{2}\mathrm{S}.$$

Soit

$$\tang x = \frac{r_1}{\mathrm{R}};$$

par cette valeur, l'expression précédente deviendra

$$\tang\tfrac{1}{2}(\mathrm{T} - \mathrm{P'}) = \frac{\tang x - 1}{\tang x + 1}\cot\tfrac{1}{2}\mathrm{S},$$

et, en remarquant que

$$\frac{\tan g x - 1}{\tan g x + 1} = \tan g(x - 45°),$$

on aura

$$(1)\qquad \tan g \tfrac{1}{2}(\mathrm{T} - \mathrm{P}') = \tan g(x - 45°) \cot \tfrac{1}{2}\mathrm{S}.$$

Maintenant, si l'on fait $y = \frac{1}{2}(\mathrm{T} - \mathrm{P}')$, et qu'on ajoute cet arc à $\frac{1}{2}(\mathrm{T} + \mathrm{P}')$ ou $90° - \frac{1}{2}\mathrm{S}$, on obtiendra, pour la valeur de l'angle à la Terre T ou de l'*élongation,*

$$(2)\qquad \mathrm{T} = 90° - \tfrac{1}{2}\mathrm{S} + y,$$

y étant connu par la relation (1). Cet angle déterminé, on obtient aisément L par la formule

$$\mathrm{L} = \Upsilon \mathrm{TP}' = \Upsilon \mathrm{TZ} - \mathrm{P}'\mathrm{TZ} = \Upsilon \mathrm{ST} - (180° - \mathrm{T}),$$

qui devient

$$(3)\qquad \mathrm{L} = \odot + \mathrm{T},$$

en vertu de la relation $\Upsilon \mathrm{ST} = 180° + \odot$.

Il nous reste à déterminer λ et Δ. Or, en considérant les triangles PP′S, PP′T, rectangles en P′, on a

$$\mathrm{PP}' = \mathrm{P}'\mathrm{S} \tan g s = \mathrm{P}'\mathrm{T} \tan g \lambda,$$

d'où

$$\tan g \lambda = \frac{\mathrm{P}'\mathrm{S}}{\mathrm{P}'\mathrm{T}} \tan g s,$$

et, comme par le triangle P′ST

$$\frac{\mathrm{P}'\mathrm{S}}{\mathrm{P}'\mathrm{T}} = \frac{\sin \mathrm{T}}{\sin \mathrm{S}},$$

on en conclut

$$(4)\qquad \tan g \lambda = \frac{\sin \mathrm{T}}{\sin \mathrm{S}} \tan g s:$$

c'est l'expression de la latitude géocentrique.

Quant à la distance $\mathrm{PT} = \Delta$ de la Terre à la planète, on l'obtient par la considération du triangle P′ST, qui donne

$$\frac{\sin \mathrm{STP}'}{\mathrm{SP}'} = \frac{\sin \mathrm{P}'\mathrm{ST}}{\mathrm{TP}'},$$

d'où

$$\frac{\sin \mathrm{T}}{r \cos s} = \frac{\sin \mathrm{S}}{\mathrm{TP}'}, \quad \mathrm{TP}' = \frac{r \cos s \sin \mathrm{S}}{\sin \mathrm{T}}.$$

Mais

$$\mathrm{PT} = \frac{\mathrm{TP}'}{\cos\lambda};$$

par conséquent,

$$\Delta = \frac{r\cos s\sin \mathrm{S}}{\sin \mathrm{T}\cos\lambda}. \tag{5}$$

Pour donner une application des formules qui précèdent, proposons-nous de calculer la position géocentrique de Saturne, pour le midi moyen de Paris, au 1$^{\text{er}}$ janvier 1879. On a, en faisant usage des formules (A) et posant, pour simplifier,

$$\begin{aligned} r\cos s\ \sin v + \mathrm{R}\ \sin\odot &= \Sigma\mathrm{I}, \\ r\cos s\cos v + \mathrm{R}\cos\odot &= \Sigma\mathrm{II}, \\ r\ \sin s + \mathrm{R}\ \sin\lambda_{\odot} &= \Sigma\mathrm{III}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tang}\mathrm{L} = \frac{\Sigma(\mathrm{I})}{\Sigma(\mathrm{II})}, \quad \operatorname{tang}\lambda = \frac{\Sigma(\mathrm{III})}{\Sigma(\mathrm{II})}\cos\mathrm{L}, \quad \Delta\cos\lambda = \frac{\Sigma(\mathrm{I})}{\cos\mathrm{L}}.$$

A l'aide de ces formules et des données que voici,

longitude vraie $\odot$....	280°45′33″,19	$\log\sin v$....	8,7010451
v.....	2°52′47″,00	$\log\cos s$....	9,9996366
s.....	—2°20′37″,65	$\log r$.......	0,9779996
r.....	9,5060390	$\log\cos v$.. .	9,9994512
$\log\mathrm{R}$.	9,9926583	$\log\sin s$....	8,6116752—

on trouve

$\log r\cos s\sin v$...	9,6786813	$\log\Sigma(\mathrm{I})$........	9,6891073—
$\log r\cos s\cos v$ ..	0,9770874	$\log\cos\mathrm{L}$........	9,9994459
$\log r\sin s$.......	9,5896748—	$\log\Sigma(\mathrm{II})$.......	0,9854105
$r\cos s\sin v$......	+0,4771789	$\log\operatorname{tang}\mathrm{L}$......	8,7036968
$\mathrm{R}\sin\odot$.........	—0,9659520	L	357°6′22″,77
$\Sigma(\mathrm{I})$...........	—0,4887731		
$r\cos s\cos v$	+9,4860913	$\log\Sigma(\mathrm{III})$......	9,5896733—
$\mathrm{R}\cos\odot$........	+0,1835528	$\log\cos\lambda$........	9,9996502
$\Sigma(\mathrm{II})$..........	+9,6696441	$\log\Delta\cos\lambda$......	0,9859646
$r\sin s$..........	—0,3887539	$\log\operatorname{tang}\lambda$	8,6037088—
$\mathrm{R}\sin\lambda$	+ 13	λ.........	—2°17′57″,53
$\Sigma(\mathrm{III})$.........	—0,3887526	$\log\Delta$	0,9863144

Vérification.

$\odot - v$.........	277°52′46″,19	$\mathrm{L} - v$............	354°13′35″,77
$\log\sin(\odot - v)$..	9,9958802—	$\log\Delta\cos\lambda$........	0,9859646
$\log\mathrm{R}$...........	9,9926583	$\log\sin(\mathrm{L} - v)$....	9,0025736—
Σ..............	9,9885385—	Σ...............	9,9885382—

III. — Ascension droite et déclinaison.

Connaissant la longitude géocentrique L et la latitude λ, on en conclut l'ascension droite $\mathcal{A}$ et la déclinaison $\mathcal{D}$ par les formules que nous avons fait connaître au § II du Chapitre I (I$^{\text{re}}$ Partie). Ainsi l'on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin L}{\operatorname{tang}\lambda},$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\mathcal{A} &= \frac{\sin F}{\sin\varphi}\operatorname{tang} L \\ \operatorname{tang}\mathcal{D} &= \frac{\sin\mathcal{A}}{\operatorname{tang} F} \end{aligned}\right\} F = \varphi - \omega.$$

ω est l'obliquité apparente qui convient à la date pour laquelle on calcule. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ doivent ensuite être corrigés de l'effet de l'aberration pour devenir les coordonnées *apparentes,* telles que les donne la *Connaissance des Temps*. Voici un exemple de calcul pour Uranus, au 18 juin 1878, date pour laquelle

$$L = 146^\circ 16' 6'',21,\quad \lambda = +0^\circ 43' 42'',67,\quad \log\Delta = 1,2747260,\quad \omega = 23^\circ 27' 24'',34.$$

Calcul des angles φ et F.

$\log\sin L$	9,7445303
$C^t \log\operatorname{tang}\lambda$	1,8956591
$\log\operatorname{tang}\varphi$	1,6401894
φ	88°41′17″,63
ω	23°27′24″,34
F	65°13′53″,29

A l'aide de ces données, on obtient ensuite

$\log\operatorname{tang} L$	9,8245908—
$\log\sin F$	9,9580895
$C^t \log\sin\varphi$	1138
$\log\operatorname{tang}\mathcal{A}$	9,7827941—
$\mathcal{A}$ en arc	148°45′55″,20
$\mathcal{A}$ vraie en temps	$9^h 55^m 3^s,68$

$\log\sin\mathcal{A}$	9,7147859
$\log\operatorname{tang} F$	0,3359237
$\log\operatorname{tang}\mathcal{D}$	9,3788622
$\mathcal{D}$ vraie	+13°27′19″,45

Calcul de l'aberration en ascension droite et en déclinaison.— Il nous reste à calculer l'aberration planétaire en ascension droite et en déclinaison. Or on a (§ IV, chap. IV, Ire Partie),

$$A_b = -0'',0057613\,M\Delta,$$

expression dans laquelle M désigne le mouvement de la planète en 24^h et Δ sa distance à la Terre. Ces valeurs de A_b se déterminent toujours pour les dates auxquelles l'ascension droite et la déclinaison ont été calculées. Pour Uranus, ce calcul se fait de quatre en quatre jours, en sorte que M, dans l'exemple qui précède, doit être moyen entre sa valeur au 14 juin et celle qui se rapporte au 22 juin.

Soient

$\mathcal{A}_{-1}$ l'ascension droite qui répond à la première date;
$\mathcal{A}_0$ celle qui se rapporte à la seconde;
$\mathcal{A}$ l'ascension droite qui convient au 18 juin.

Comme ici

$$\mathcal{A} - \mathcal{A}_{-1} = 34^s,44, \quad \mathcal{D}_{-1} - \mathcal{D} = 3'\,9'',77,$$
$$\mathcal{A}_0 - \mathcal{A} = 36^s,98, \quad \mathcal{D} - \mathcal{D}_0 = 3'23'',20,$$

on en conclut

$$\tfrac{1}{2}(\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_{-1}) = 35^s,71, \quad \tfrac{1}{2}(\mathcal{D}_{-1} - \mathcal{D}_0) = 3'16'',49;$$

partant, on a

log nombre const..	7,15847	log nombre const..	7,15847
log M	1.55279	log M	2,29334
log Δ............	1,27473	log Δ............	1,27473
Σ...............	9,98599	Σ...............	0,72654
A_b en ascens. droite	$-0^s,97$	A_b en déclinaison..	$+5'',33$

Ainsi donc

$$\mathcal{A}\text{ app.}\ldots\ldots\quad 9^h55^m3^s,68 - 0^s,97 = 9^h55^m2^s,71$$
$$\mathcal{D}\text{ app.}\ldots\ldots\quad +13°27'19'',45 + 5'',33 = +13°27'24'',78$$

IV. — Parallaxe horizontale. — Demi-diamètre. — Durée du passage du demi-diamètre par le méridien.

Ces éléments sont donnés dans la *Connaissance des Temps* pour chacune des planètes principales et pour tous les jours de l'année. On les détermine à l'aide des formules que nous avons données dans les §§ X, XI et XII du Chapitre qui précède. On a ainsi

$$\Pi = \frac{8'',86}{\Delta}, \quad \mathrm{D} = \frac{\mathrm{D}_m}{\Delta}, \quad t = \frac{\textcircled{D}}{15\cos\textcircled{D}},$$

Δ étant la distance de la planète à la Terre, D_m son demi-diamètre à la distance moyenne de la Terre au Soleil, et $\textcircled{D}$ sa déclinaison. Remarquons que, la parallaxe Π étant déterminée, D s'en déduit immédiatement en multipliant Π par le rapport $\frac{\mathrm{D}_m}{8'',86}$. Il suffit donc d'ajouter au logarithme de la parallaxe le logarithme de ce rapport, constant pour chaque planète, pour avoir celui du demi-diamètre D. Voici les valeurs de D_m adoptées par les rédacteurs de la *Connaissance des Temps* et celles de $\frac{\mathrm{D}_m}{8'',86}$ qui leur correspondent :

Valeurs de D_m.

Mercure.	3″,34	(Tables de Le Verrier).
Vénus...	8,305	(Tables de Le Verrier).
Mars....	5,55	(Tables de Le Verrier).
Jupiter..	99,703	(*Memoirs of the astronomical Society*, t. III).
Saturne.	81,105	(*Astronomische Nachrichten*, n° 189).
Uranus..	37,40	(*Annuaire de Schumacher*, 1837).

Valeurs de $\frac{\mathrm{D}_m}{8'',86}$.

	Nombre constant.	Logarithmes.
Mercure...........	0,379	$\bar{1}$,57864
Vénus..............	0,937	$\bar{1}$,97174
Mars...............	0,626	$\bar{1}$,79657
Jupiter............	11,253	1,05127
Saturne...........	9,154	0,96161
Uranus............	4,221	0,62542

Dans la construction des *Éphémérides*, Π, D et t se calculent en même temps; dès lors, voici la disposition qu'il convient de donner au calcul pour le réduire à sa forme la plus simple :

Janvier 1, 1878. *Uranus.*

$\log 8'',86$	0,94743
$\log \Delta$	1,24714
$\log \Pi$	9,70029
log nombre constant	0,62542
$\log D$	0,32571
$\log \frac{D}{15}$	9,14961
$\log \cos \mathcal{D}$	9,98957
$\log t$	9,16004

$\Pi = 0,50$, $D = 2,12$, $t = 0,145$.

V. — Passage du centre de la planète au méridien de Paris.

Soient $\mathcal{A}_p$ et $\mathcal{A}_\odot$ les ascensions droites de la planète et du Soleil à midi moyen à Paris, μ et μ' les mouvements diurnes respectifs de ces corps. On sait que pour le Soleil $\mu' = 3^m 56^s,56$. Cela posé, lorsque le Soleil est revenu au méridien après 24^h, la planète y a passé au bout d'un temps exprimé par $24^h - (\mu - \mu')$; t désignant l'heure du passage cherché, on a donc

$$\frac{24^h - (\mu - \mu')}{24} = \frac{\mathcal{A}_p - \mathcal{A}_\odot}{t},$$

d'où

$$t = \frac{24^h(\mathcal{A}_p - \mathcal{A}_\odot)}{24^h + \mu' - \mu},$$

sur quoi il faut observer que μ est négatif lorsque la planète est rétrograde et nul lorsqu'elle est stationnaire. Dans ce dernier cas, $t = \mathcal{A}_p - \mathcal{A}_\odot$: c'est ce qui a lieu pour les étoiles.

Cherchons, par exemple, l'heure du passage de Mars au méridien de Paris le 26 juin 1875. On tire de la *Connaissance des Temps,* pour ce calcul, les données suivantes :

	h m s	
$\mathcal{A}_♂$ à midi moyen	17.44.52,53	
$\mathcal{A}_\odot$ moyen à midi moyen ou temps sidéral	6.16.47,41	
Variation diurne μ	— 0. 1.23,42	planète rétrogr.
Variation diurne μ'	0. 3.56,56	

On en conclut

	h m s
$\mathcal{A}_{♂} - \mathcal{A}_{\odot}$	11.28. 5,12
$24^h + \mu' - \mu$	24. 5.19,98

Par suite, on a

$\log 24^h$	4,9365137
$\log(\mathcal{A}_{♂} - \mathcal{A}_{\odot})$ ..	4,6157923
$-\log 24^h + \mu' - \mu$.	$-4,9381193$
$\log t$	4,6141867

$$t = 41132,7 = 11^h 25^m 32^s,7 \quad (^1).$$

Dans ce qui précède, nous avons supposé que le Soleil passait au méridien avant la planète, ce qui rend la valeur de t positive, car alors $\mathcal{A}_p > \mathcal{A}_{\odot}$. Lorsque le contraire a lieu, c'est-à-dire lorsque c'est la planète qui passe au méridien avant le Soleil, on a $\mathcal{A}_p < \mathcal{A}_{\odot}$, et la valeur de t est négative. Dans le premier cas, le passage de la planète au méridien s'effectue avant minuit; dans le second, il a lieu après minuit et est donné par le complément de t à 12^h.

VI. — Conjonction, opposition, quadrature, élongation.

Ces divers phénomènes sont indiqués dans la *Connaissance des Temps*, à la dernière page de chaque éphéméride, et sont donnés en temps moyen civil de Paris. On les distingue les uns des autres au moyen de la différence en longitude du Soleil et de la planète. Cette différence est de 0° ou de 180° dans les oppositions ou conjonctions, et de 90° ou 270° dans les quadratures. On trouve aux mêmes pages les élongations de Vénus et de Mercure, c'est-à-dire les époques où ces planètes sont à leur plus grande distance du Soleil. Une simple inspection des Tables permet d'assigner l'époque où ces phénomènes ont lieu. Voici un exemple de ce calcul pour

---

(1) La valeur de t donnée par ce calcul n'est qu'approchée, car elle suppose le mouvement en ascension droite de la planète uniforme. On pourrait en obtenir une plus exacte en déterminant l'ascension droite qui répond à la valeur de t ainsi trouvée, et avec cette ascension droite recommencer tout le calcul, comme nous l'avons vu pour un cas analogue, celui du lever et du coucher des astres. Cette première approximation est cependant bien suffisante lorsqu'on s'en tient aux dixièmes ronds de seconde, comme le font la *Co ssance des Temps* et le *Nautical Almanac*.

Uranus en 1878 :

	Février 15.	Février 16.
Longit. géocentrique de la planète.	147°.27′	147°.25′
Longitude ⊙	326.43	327.44
Différence	180.44	179,41

Opposition ☍ : février 15.

	Mai 15.	Mai 16.
Longit. géocentrique de la planète.	145°.24′	145°.25′
Longitude ⊙	54.29	55.26
Différence	90.55	89.59

Quadrature □ : mai 15.

	Août 22.	Août 23.
Longit. géocentrique de la planète.	149°.48′	149°.52′
Longitude ⊙	149.12	150.10
Différence	0.36	359.42

Conjonction ☌ : août 22.

	Novembre 26.	Novembre 27.
Longit. géocentrique de la planète.	154°.10′	154°.10′
Longitude ⊙	244. 8	245. 9
Différence	270. 2	269. 1

Quadrature □ : novembre 26.

NOTES ADDITIONNELLES AU CHAPITRE III.

I.

Du problème des perturbations planétaires. — Équations qui définissent le mouvement des planètes autour du Soleil, abstraction faite de leur figure.

La recherche du mouvement héliocentrique des planètes en ayant égard à toutes les causes de perturbation constitue un problème qui, par sa complication, présenterait des difficultés insurmontables, s'il fallait le résoudre dans toute sa généralité. L'analyse la plus profonde a été impuissante jusqu'ici à en donner une solution directe, et ce n'est qu'en se fondant sur certaines simplifications que les géomètres sont parvenus à le résoudre par approximation. La constitution de notre système planétaire offre pour cela des avantages dont il était aisé de profiter. En effet, eu égard à la petitesse des dimensions des corps célestes par rapport à leurs distances mutuelles et à la presque sphéricité de leur forme, on a pu d'abord faire abstraction de leur figure et les considérer comme de simples points matériels placés à leurs centres de gravité respectifs. Cette circonstance, qui ramène la recherche du mouvement des corps célestes à celle du mouvement de leurs centres de gravité, a une grande importance dans la question qui nous occupe, car elle permet d'écrire presque immédiatement et sous leur forme la plus simple les équations différentielles du mouvement. Ce que nous disons des planètes relativement au Soleil a également lieu pour les satellites à l'égard de leur planète principale, c'est-à-dire que, la distance de ces astres à leur planète centrale étant très petite relativement aux distances qui séparent la planète du Soleil et des autres planètes, l'on peut, sans erreur sensible, regarder l'action exercée par l'ensemble d'une planète et de ses satellites sur les autres corps du système solaire comme étant la même que si toute la masse de la planète et de ses satellites était réunie à leur centre commun de gravité. Et comme l'action exercée par les autres corps du système solaire est la même sur la planète et sur ses satellites, on voit encore que ces derniers corps se mouvront autour de la planète à très peu près de la même manière que s'ils n'étaient soumis qu'à l'action seule de cet astre.

Une autre simplification importante et que la disposition particulière de notre système introduit dans la solution du problème résulte de la petitesse des masses planétaires, comparativement à celle du Soleil. On sait, en effet, que la masse de la plus grosse planète est au moins mille fois plus petite que celle du Soleil, et qu'un rapport plus petit encore existe entre les masses des satellites et celles de leurs planètes principales. Il en résulte que l'on peut, dans une première approximation, faire abstraction des actions provenant des diverses masses perturbatrices, actions qui sont proportionnellement fort petites, et n'avoir égard dans le mouvement du corps que l'on considère qu'à l'action seule du Soleil, action qui est en effet de beaucoup la plus considérable et la plus prépondérante du mouvement. La forme de l'orbite décrite est alors celle d'une ellipse que l'on peut corriger par des approximations successives, en appliquant aux éléments de cette courbe les termes perturbateurs qui naissent des actions réciproques, développées par les autres planètes. Cette méthode, qui permet d'arriver ainsi par essais successifs et d'une exactitude toujours croissante à la connaissance du mouvement troublé, s'applique aisément aux planètes; mais elle devient très pénible dans le cas de la Lune, à cause de la grandeur de la force perturbatrice, qui augmente considérablement le nombre des inégalités et rend beaucoup moins convergentes les séries à mesure que l'on s'élève dans l'ordre des approximations.

Nous allons, dans cette Note, nous proposer d'établir les équations différentielles qui déterminent le mouvement troublé des corps célestes autour du Soleil, abstraction faite de leur figure, c'est-à-dire en les considérant comme de simples points matériels placés à leurs centres de gravité respectifs.

Soient donc, dans cette hypothèse,

$m, m', m'', \ldots$ les masses ou points matériels des différents corps qui composent notre système;
$x, y, z, x', y', z', \ldots$ les coordonnées respectives de ces corps, rapportées au centre M du Soleil pris pour origine;
$r, r', r'', \ldots$ les distances $\mathrm{M}m$, $\mathrm{M}m'$, $\mathrm{M}m''$, ... de ces corps à celui M;
$\rho, \rho', \rho'', \ldots$ leurs distances mutuelles ou mm', mm'', ...

On aura

$$(a)\left\{\begin{array}{l} r^2 = \overline{\mathrm{M}m}^2 = x^2+y^2+z^2,\quad \rho = \overline{mm'}^2 = (x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2,\\ r'^2 = \overline{\mathrm{M}m'}^2 = x'^2+y'^2+z'^2,\quad \rho' = \overline{mm''}^2 = (x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2,\\ r''^2 = \overline{\mathrm{M}m''} = x''^2+y''^2+z''^2.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Posons, dans le cas de trois corps M, m, m',

$$\mu = \mathrm{M} + m.$$

Dans son mouvement relatif autour de M, le corps m sera soumis aux trois forces $\frac{\mu}{r^2}$, $\frac{m'}{\rho^2}$, $\frac{m'}{r'^2}$ respectivement dirigées suivant les lignes $m\mathrm{M}$, mm', $m'\mathrm{M}$; et, comme les cosinus des angles que font les directions de chacune de ces forces avec l'axe des x ont respectivement pour expressions $\frac{x}{r}$, $\frac{x'-x}{\rho}$, $\frac{x'}{r'}$, on aura, pour les composantes de ces forces dirigées suivant le même axe,

$$(\alpha)\qquad \frac{\mu x}{r^3},\quad \frac{m'(x'-x)}{\rho^3},\quad \frac{m'x'}{r'^3};$$

pour les composantes des mêmes forces dirigées suivant l'axe des y, on aurait pareillement

$$(\beta)\qquad \frac{\mu y}{r^3},\quad \frac{m'(y'-y)}{\rho^3},\quad \frac{m'y'}{r'^3},$$

et pour celles parallèles à l'axe des z,

$$(\gamma)\qquad \frac{\mu z}{r^3},\quad \frac{m'(z'-z)}{\rho^3},\quad \frac{m'z'}{r'^3}.$$

La somme des trois composantes (α), (β), (γ) pour chaque direction est évidemment la composante totale, suivant cette direction, de la force qui agit sur le corps m, force qui est égale et de signe contraire à l'accélération $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ ou $\frac{d^2z}{dt^2}$. D'après cela, et en étendant ces considérations à un nombre quelconque de corps m'', m''', ..., on aura donc, pour les équations du mouvement relatif de m autour de M,

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}&=\sum m'\left(\frac{x'-x}{\rho^3}-\frac{x'}{r'^3}\right),\\
\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}&=\sum m'\left(\frac{y'-y}{\rho^3}-\frac{y'}{r'^3}\right),\\
\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}&=\sum m'\left(\frac{z'-z}{\rho^3}-\frac{z'}{r'^3}\right).
\end{aligned}\right.$$

Le signe Σ indique que chaque masse m'', m''' introduit dans les équations (A) un terme semblable à celui qui résulte de l'action de m' sur m, terme que l'on obtiendrait en changeant dans les seconds membres de ces équations m', ρ, x' et r' en m'', ρ', x'', r''; m''', ρ'', x''', r''', ...

Maintenant, on déduit des équations (a) qui précèdent

$$\frac{d}{dx}\,\frac{1}{\rho}=\frac{x'-x}{\rho^3},\quad \frac{d}{dy}\,\frac{1}{\rho}=\frac{y'-y}{\rho^3},\quad \frac{d}{dz}\,\frac{1}{\rho}=\frac{z'-z}{\rho^3},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{xx'}{r'^3}\right)=\frac{x'}{r'^3},\quad \frac{d}{dy}\left(\frac{xx'+yy'}{r'^3}\right)=\frac{y'}{r'^3},\quad \ldots.$$

Si donc l'on pose

$$(\mathrm{B})\qquad \mathrm{R}=\sum m'\left(\frac{1}{\rho}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right)=\sum m'\left(\frac{1}{\rho}-\frac{r^2+r'^2-\rho^2}{2r'^3}\right),$$

on aura

$$(\mathfrak{A})\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}&=\frac{d\mathrm{R}}{dx},\\
\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}&=\frac{d\mathrm{R}}{dy},\\
\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}&=\frac{d\mathrm{R}}{dz}.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations déterminent le mouvement du corps m autour de M. Et l'on obtiendrait des équations semblables pour chacun des autres corps m', m'', ... du système, en accentuant convenablement les lettres m, x, y, z, r. On serait ainsi conduit à autant d'équations différentielles du second ordre qu'il y a de coordonnées x, y, z, x', y', z', ... à déterminer en fonction de la variable t prise pour le temps.

II.

DE LA FONCTION PERTURBATRICE ET DE SA NATURE. — DISTINCTION DES TERMES PÉRIODIQUES ET SÉCULAIRES. — DIVERS ORDRES D'APPROXIMATION PAR RAPPORT AUX MASSES.

La fonction R des masses et des distances qui figure aux seconds membres des équations $(\mathfrak{A})$ a la propriété, par ses dérivées partielles, de représenter les actions qu'exercent les planètes m', m'', ... sur celle m; on la nomme *fonction perturbatrice*. Cette fonction dépend encore des rayons vecteurs et des longitudes de chaque planète, c'est-à-dire que l'on a, dans le cas d'une planète m troublée par l'action d'une autre planète m',

$$\mathrm{R} = \text{fonct.}\, m'(rr', vv') \quad (^1).$$

---

[1] Pour le faire voir et en même temps pour donner une idée de la manière dont s'effectue le développement de R dans le cas des perturbations planétaires, reprenons l'expression de cette fonction sous la forme que nous lui avons donnée dans le texte, savoir

$$\mathrm{R} = m'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{r^2 + r'^2 - \rho^2}{2r'^3}\right);$$

en désignant par s l'angle formé au centre de gravité du Soleil par les deux rayons vecteurs r et r', il est facile de voir qu'on aura

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos s.$$

Soient v et v' les longitudes des planètes m et m' comptées dans les plans de leurs orbites respectives à partir d'un axe fixe, γ l'inclinaison mutuelle des orbites, et τ, τ' les longitudes du nœud commun aux orbites de m et de m'. Par la considération du triangle sphérique ayant deux côtés $v - \tau$, $v' - \tau'$ et l'angle compris γ, on aura, pour calculer le côté s opposé à l'angle γ,

$$\cos s = \cos(v - \tau)\cos(v' - \tau') + \sin(v - \tau)\sin(v' - \tau')\cos\gamma,$$

ou bien, en remplaçant les produits de sinus ou de cosinus par des sommes et mettant $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\gamma$ à la place de $\cos\gamma$,

$$\cos s = \cos(v' - v - \tau - \tau') + [\cos(v' + v - \tau - \tau') - \cos(v' - v - \tau - \tau')]\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma,$$

Comme nous le verrons plus loin, les dérivées de cette fonction, prises par rapport aux éléments de l'orbite elliptique a, e, ε, ω, φ, θ, sont les facteurs qui multiplient l'élément dt dans les formules qui expriment les variations différentielles de ces éléments. Pour obtenir les variations finies de a, e, ε, ..., il faudrait donc pouvoir substituer dans R, à la place de r, r' et de v, v', leurs valeurs respectives en fonction des mêmes éléments ou leurs valeurs corrigées de toutes les *perturbations*. Admettons pour un moment la possibilité de cette substitution. Il est clair que ces valeurs de r, r', v, v', quelles qu'elles puissent être, seront nécessairement des fonctions de la masse perturbatrice m' du temps t et des éléments elliptiques, tels qu'ils ont lieu à l'origine du temps. En les supposant développées par rapport à cette

---

à cause de la petitesse du facteur $\sin\frac{1}{2}\gamma$, on peut faire $\tau' = \tau$, ce qui donne, en posant, pour simplifier, $\sin\frac{1}{2}\gamma = \eta_1^2$, et substituant dans ρ,

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v' - v) - 2rr'\eta_1^2[\cos(v' + v - 2\tau) - \cos(v' - v)].$$

Portant cette valeur de ρ dans l'expression ci-dessus de R, on a donc

$$\begin{aligned}R = m'\Bigg\{&\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v' - v) - 2rr'\eta_1^2[\cos(v' + v - 2\tau) - \cos(v' - v)]}}\\ &- \frac{r}{r'^2}\{\cos(v' - v) + \eta_1^2[\cos(v' + v - 2\tau) - \cos(v' - v)]\}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Quant à l'angle γ, qui entre implicitement dans η_1, il est aisé d'en déterminer la valeur en fonction des inclinaisons φ, φ' des deux orbites au plan des xy et des longitudes θ, θ' des nœuds de ces orbites. Si l'on considère, en effet, le triangle sphérique dans lequel le côté $\theta' - \theta$ et les deux angles adjacents à ce côté, φ' et $180° - \varphi$, sont connus, on a, pour calculer l'angle γ opposé à ce côté,

$$\cos\gamma = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos(\theta' - \theta).$$

L'inclinaison mutuelle des orbites de m et m' étant toujours très faible, on peut développer R suivant les puissances ascendantes de η en une série très convergente, et en posant, pour abréger,

$$\chi = \tfrac{1}{2}[\cos(v' + v) - 2\tau) - \cos(v' - v)],$$

on obtient

$$\begin{aligned}R = m'&\left\{[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v' - v)]^{-\frac{1}{2}} - \frac{rr'}{r'^3}\cos(v' - v)\right\}\\ &+ m'\left\{2\eta_1^2\chi rr'[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v' - v)]^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{r'^3}\right\}\\ &+ m'\frac{3}{2}\eta_1^4\chi^2 rr'[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v' - v)]^{-\frac{5}{2}} + \ldots;\end{aligned}$$

sous cette forme, et en négligeant les termes en η_1, on voit donc que R ne dépend que de r, r', v et v'.

masse, on aura donc

$$r = \Theta + \Theta_1 m' + \Theta_2 m'^2 + \Theta_3 m'^3 + \ldots,$$
$$v = \Phi + \Phi_1 m' + \Phi_2 m'^2 + \Phi_3 m'^3 + \ldots.$$

Les premiers termes Θ et Φ de ces séries sont les valeurs de r et de v relatives à la supposition de $m' = 0$ ou au mouvement non troublé de m; et, comme la fonction R est du premier ordre par rapport à m', on voit que si, dans une *première approximation*, on néglige les puissances des masses perturbatrices supérieures à la première, il suffira de substituer dans cette fonction, à la place de r et de v, leurs valeurs relatives au mouvement elliptique, c'est-à-dire $\Theta(a, \zeta, e, \varepsilon, \omega)$ pour r et $\Phi(\zeta, e, \varepsilon, \omega)$ pour v. Dans ce cas, la fonction R peut toujours se réduire en une suite infinie de termes de la forme

$$m' \mathrm{H} \cos(i' n' t - int + \mathrm{A}),$$

termes dans lesquels nt et $n't$ représentent les moyens mouvements de la planète troublée et de la planète troublante, et i, i' des nombres entiers qui peuvent prendre toutes les valeurs possibles, positives et négatives, y compris zéro; H, A sont des coefficients fonctions des éléments des orbites de m et m', mais indépendants du temps t (¹). Si l'on voulait ensuite former une *seconde approximation* ou avoir égard à la première puissance des forces perturbatrices, il faudrait substituer dans R, à la place de r et de v, les valeurs obtenues dans la première approximation. On formerait une *troisième approximation* en ayant égard aux secondes dimensions des masses, c'est-à-dire en substituant dans R, à la place des variables r et v, leurs valeurs données par la

---

(¹) La détermination des coefficients A^i, B^i, ... qui entrent dans le développement de la fonction perturbatrice (*voir* la *Mécanique céleste*, liv. II) se ramène, dans le cas ordinaire, à celle des coefficients de la fonction $(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos\theta)^{-s}$ développée suivant les cosinus des multiples de l'angle θ. Mais on peut aussi exprimer ces coefficients à l'aide des intégrales définies doubles. En effet, soit

$$\mathrm{R} = \mathrm{H}_j \cos[i(l' - l) + jl - \mathrm{A}_j]$$

un terme quelconque d'ordre j de ce développement. En multipliant les deux nombres de cette équation par $\cos[(j - i)l - l]\,dl$, puis intégrant entre les limites $l = 0$ et $l = \pi$, on aura

$$\int_0^\pi \mathrm{R} \cos[(j - i)l - l]\,dl = -\mathrm{H}_j \frac{2(j - i)}{2(j - i) - 1} \sin(il' - \mathrm{A}_j).$$

Maintenant, si l'on multiplie les deux membres de cette dernière équation par $\sin(il' - \mathrm{A}_j)\,dl'$, puis qu'on l'intègre entre les mêmes limites que ci-dessus, on seconde approximation, et ainsi de suite. Généralement, les deux premières approximations suffisent dans la théorie des planètes; mais il n'en est pas de même dans la théorie de la Lune, où la grandeur des inégalités et le peu de convergence des séries obligent à pousser beaucoup plus loin le développement de R par rapport aux puissances des forces perturbatrices. Laplace, dans la *Mécanique céleste,* s'est arrêté aux termes du quatrième ordre inclusivement, mais il a conservé ceux du cinquième, qui se sont présentés d'eux-mêmes. Plana, dans sa *Théorie de la Lune,* est allé jusqu'aux termes du cinquième ordre et même jusqu'à ceux du huitième, lorsque la chose lui a paru nécessaire. Hansen, dans ses *Fundamenta nova investigationis orbitæ veræ quam Luna perlustrat,* n'a pas dépassé le quatrième ordre; enfin Delaunay, dans sa *Théorie du mouvement de la Lune,* a poussé les approximations jusqu'aux termes du septième ordre inclusivement et même jusqu'à ceux du huitième et du neuvième, pour certaines inégalités dépendantes de la longitude.

Quel que soit le degré d'approximation auquel on s'arrête dans le

---

obtiendra, pour l'expression analytique du coefficient H_j,

$$H_j = \frac{1-2(j-i)}{(j-i)\pi}\int_0^{\pi}\sin(il'-\Lambda_j)\,dl'\int_0^{\pi}R\cos[(j-i)l-l]\,dl.$$

Dans le cas particulier de $j=0$, on a

$$H_0 = -\frac{(2i+1)}{i\pi}\int_0^{\pi}\sin(il'-\Lambda_0)\,dl'\int_0^{\pi}R\cos(i+1)l\,dl.$$

On peut encore poser

$$R = \Sigma M_{ii'}\cos(il-i'l') + \Sigma N_{ii'}\sin(il-i'l'),$$

ce qui donne, après avoir multiplié successivement les deux membres de cette équation par $\cos(il-i'l')\,dl\,dl'$ et $\sin(il-i'l')\,dl\,dl'$, puis l'avoir intégrée entre les limites 0 et 2π,

$$M_{ii'} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}R\cos(il-i'l')\,dl\,dl',$$

$$N_{ii'} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}R\sin(il-i'l')\,dl\,dl'.$$

Quant au terme du développement de R qui répond au cas où l'on a à la fois $i=0$, $i'=0$, terme que nous représenterons par R_0, il est évidemment égal à

$$R_0 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}R\,dl\,dl'.$$

développement de la fonction R, on a toujours à considérer deux espèces différentes de termes, les uns tels que

$$\mathfrak{P}\,{}^{\sin}_{\cos}(i'l' - il + \ldots + \mathfrak{A}),$$

où le temps t n'entre qu'introduit par les valeurs des longitudes moyennes $l = nt + \varepsilon$, $l' = n't + \varepsilon'$ sous les signes sinus ou cosinus, et les autres tels que

$$\mathfrak{S}\,t\,{}^{\sin}_{\cos}\mathfrak{A},$$

où le temps t y est contenu explicitement. Les premiers reprennent les mêmes valeurs après de courts intervalles de temps et donnent naissance aux *inégalités périodiques;* les seconds croissent lentement avec t et produisent les *inégalités séculaires*. Ces deux sortes d'inégalités sont bien périodiques l'une et l'autre, mais les périodes des premières sont incomparablement plus courtes que celles des secondes. Au reste, il existe une distinction bien marquée entre ces deux genres d'inégalités : les inégalités de la première espèce dépendent de la position relative des planètes dans leurs orbites, et se rétablissent toutes les fois que ces positions redeviennent les mêmes; celles de la seconde espèce, au contraire, sont indépendantes de ces positions et croissent avec une extrême lenteur (¹). Ces dernières affectent particulièrement les éléments du

---

(¹) Il est aisé de démontrer que la partie $m'\frac{1}{\rho}$ de l'expression de R est la seule qui puisse donner naissance aux termes de la seconde espèce, lorsqu'on borne les approximations à la première puissance des forces perturbatrices. En effet, si, ne considérant que les actions mutuelles de deux planètes m et m', on pose

$$R = m'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right),$$

et qu'à la place des coordonnées x', y', z' de la planète troublée on substitue les valeurs de ces variables, déduites des équations du mouvement elliptique [ou des équations (A) accentuées et dans lesquelles on a fait $R = 0$], on aura

$$R = m'\left(\frac{1}{\rho} + \frac{x\,d^2x' + y\,d^2y' + z\,d^2z'}{dt^2}\right),$$

et sous cette forme on voit immédiatement que la seconde partie de R ne peut contenir aucun terme non périodique ou séculaire. En effet, les coordonnées x, y, z ne contenant que des termes périodiques dépendant de nt et de ses multiples, et x', y', z' ne renfermant que des termes semblables dépendant de $n't$, il est impossible que les moyens mouvements nt et $n't$ disparaissent dans les produits, tels que $x\frac{d^2x'}{dt^2}$, $y\frac{d^2y'}{dt^2}$, $z\frac{d^2z'}{dt^2}$, et, par suite, que leur somme renferme des termes autres que ceux périodiques. Les termes de la seconde espèce ne pourront donc mouvement elliptique ; mais elles laissent invariables les grands axes, et par suite aussi les moyens mouvements qui s'en déduisent par la troisième loi de Kepler. Laplace, qui le premier a reconnu cette importante propriété de l'invariabilité des grands axes, l'a démontrée en portant l'approximation jusqu'aux troisièmes puissances des excentricités et des inclinaisons. Depuis, les géomètres l'ont étendue au carré et aux produits des forces perturbatrices, ainsi qu'à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons.

Les autres éléments de l'orbite elliptique varient, mais si lentement qu'on peut, pendant une longue suite de siècles, regarder leurs variations comme proportionnelles au temps. Les plus considérables sont celles qu'éprouvent les longitudes des nœuds et des périhélies, variations qui sont telles, en effet, que les points déterminés par ces deux éléments peuvent tourner indéfiniment dans le même sens et croître de 0° à 360° ; cependant ce n'est qu'au bout de plusieurs milliers d'années que cette révolution entière peut s'accomplir. Quant aux excentricités et aux inclinaisons, elles augmentent et diminuent successivement, c'est-à-dire que les orbites s'approchent et s'éloignent par degrés insensibles de la forme circulaire, tout en demeurant comprises dans d'étroites limites que leur assignent les théorèmes suivants :

$$\Sigma m\sqrt{a}\,e^2 = \text{const.}\qquad \Sigma m\sqrt{a}\,\text{tang}^2\varphi = \text{const.}$$

Ces théorèmes, joints à la propriété qu'ont les grands axes de demeurer invariables, assurent la stabilité du système du monde.

Dans toute inégalité de la forme

$$(a)\qquad \mathfrak{P}\,{}^{\sin}_{\cos}(i'n't - int + \mathfrak{A}),$$

il y a lieu de distinguer trois éléments qui sont : le *coefficient*, l'*argument* et la *période*. Les deux premières quantités déterminent la grandeur de l'inégalité, la troisième fixe sa durée. Le coefficient $\mathfrak{P}$ est la quantité à laquelle se réduit l'inégalité lorsque le sinus ou le cosinus qui entre dans son expression devient égal à l'unité ; c'est par conséquent le *maximum* des valeurs par lesquelles peut passer cette inégalité lorsque l'angle $i'nt - int$ ou son *argument* varie de 0° à 360°. La grandeur de l'inégalité dépend ainsi de son coefficient et doit changer

---

provenir que de la première partie $m'\frac{1}{\rho}$ de l'expression de R, partie qui est la même pour la planète attirée et pour la planète attirante.

de signe comme le sinus ou le cosinus; elle est nulle toutes les fois que ce sinus ou ce cosinus est égal à o. L'intervalle de temps qui sépare deux retours consécutifs de l'inégalité à la même valeur se nomme sa *période;* cet élément a donc pour expression $\frac{2\pi}{i'n' - in}$.

Considérons particulièrement les inégalités qui dépendent de la position relative des orbites et auxquelles donnent naissance, comme nous venons de le dire, les termes de la forme (a). La variation différentielle d'un élément quelconque α de l'orbite elliptique sera représentée par l'expression

$$d\alpha = m'\mathfrak{P}'in\sin\left(i'n't - int + \mathfrak{A}\right)dt$$

($\mathfrak{P}'$ étant un coefficient de même nature que $\mathfrak{P}$), et l'on aura pour la variation finie de cet élément

$$\int d\alpha = \frac{m'\mathfrak{P}'in}{i'n' - in}\cos\left(i'n't - int + \mathfrak{A}\right).$$

Comme l'intégration fait passer en diviseur la quantité $i'n' - in$, on voit que les termes de la forme (a), quoique généralement fort petits, presque insensibles lorsqu'on s'élève aux carrés et aux puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons, pourront cependant, après leur substitution dans les expressions différentielles des éléments elliptiques et leur intégration, acquérir des valeurs considérables et prendre des périodes dont l'amplitude dépendra, en général, du rapport de commensurabilité qui existe entre les moyens mouvements $n't$ et nt. Si ces moyens mouvements s'éloignent beaucoup d'être commensurables entre eux, ou si la différence $i'n' - in$ est très grande, l'argument prendra des accroissements rapides, la période de l'inégalité sera de peu de durée et sa grandeur dépendra uniquement de l'ordre auquel elle appartient relativement aux excentricités et aux inclinaisons. Si au contraire $i'n' - in$ est une très petite quantité, ce qui arrivera toutes les fois qu'un rapport de commensurabilité existera entre les moyens mouvements $n't$ et nt, l'argument du terme dont il s'agit sera très petit, son accroissement fort lent et l'inégalité correspondante aura une durée très longue. On a donné à ces inégalités le nom d'*inégalités à longues périodes;* et l'on peut voir (Note III), toutes choses égales d'ailleurs, que les plus considérables seront d'abord celles du moyen mouvement ζ, à raison du très petit diviseur $(i'n' - in)^2$ que la double intégration introduit dans la variation finie de cet élément, et ensuite celles qui proviennent de l'excentricité et de la longitude du périhélie, à cause des termes $\frac{d\mathrm{R}}{e\,d\varpi}\,dt$ et $\frac{d\mathrm{R}}{e\,de}\,dt$ que leurs expressions renferment, termes qui, ayant l'excentricité e en diviseur, abaissent respectivement d'une unité et de deux unités l'ordre de chaque terme de R. C'est aux inégalités de cette espèce qu'on doit attribuer les grandes irrégularités observées dans les mouvements des planètes Jupiter et Saturne, irrégularités dont on avait vainement cherché la cause avant Laplace. On reconnaît en effet, en comparant les moyens mouvements $n't$ et nt de ces deux planètes, que l'excès de cinq fois le moyen mouvement de Jupiter sur deux fois le moyen mouvement de Saturne est à très peu près le $\frac{1}{74}$ de n, circonstance qui rend très petite la quantité $5n' - 2n$ et qui peut par suite rendre considérables les inégalités dépendantes de cet angle, bien que ces inégalités soient au moins du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. C'est ce que Laplace a reconnu le premier. Ce grand géomètre a prouvé en effet que le moyen mouvement de Saturne était soumis à une *grande inégalité* de $8896''$ centésimales, dépendante de l'angle $5n' - 2n$ et dont la période est de neuf cent vingt-neuf ans; qu'une inégalité correspondante et de même durée existait dans la théorie de Jupiter, et qu'enfin les coefficients de ces inégalités étaient de signes contraires, en sorte que le moyen mouvement de Jupiter s'accélère lorsque celui de Saturne se ralentit, et réciproquement. En 1790 ces moyens mouvements étaient égaux, mais depuis cette époque c'est le mouvement de Jupiter qui se ralentit et celui de Saturne qui s'accélère.

III.

DU MOUVEMENT VARIÉ ET ELLIPTIQUE DES PLANÈTES.

La détermination du mouvement des planètes autour du Soleil dépend, d'après ce que nous venons de dire, de l'intégration des équations différentielles ($\mathfrak{A}$) et des équations semblables relatives aux corps m', m'', ... Mais dans l'état actuel de l'analyse, cette intégration en termes finis est impossible et l'on est obligé d'avoir recours à des approximations. La constitution de notre système planétaire, nous l'avons dit, offre pour cela cet avantage précieux que, les masses planétaires étant très petites par rapport à celle du Soleil, la fonction R dépendant de l'ordre des masses se trouve être une très petite quantité par rapport à celle $\frac{\mu}{r^3}$ et peut dans une *première approximation* être négligée. Les formules qui en résultent sont alors celles du *mouvement elliptique,* et l'on peut, en partant de ces formules, parvenir à celles qui expriment le *mouvement troublé,* soit en cherchant à déterminer les corrections que doivent subir ces premières valeurs des coordonnées pour représenter le mouvement varié, méthode qui est celle employée généralement par Laplace dans la *Mécanique céleste,* soit en regardant l'orbite de la planète troublée comme une ellipse dont les éléments varient à chaque instant par l'effet des forces perturbatrices, et cherchant à déterminer ces variations par l'emploi de la méthode de la variation des constantes arbitraires que l'on doit à Lagrange. Lorsqu'on suit cette marche, qui est à la fois la plus simple et la plus naturelle, on est aisément conduit, par l'intégration, aux valeurs finies des variations da, de, $d\varepsilon$, ... des éléments elliptiques (¹), et ajoutant ces valeurs finies à ces mêmes éléments ou *constantes ar-*

(¹) Voici les expressions générales de ces variations différentielles, telles qu'elles ont été employées par Poisson dans ses premiers Mémoires :

$$da = \frac{2}{an}\frac{dR}{d\varepsilon}dt, \quad d\omega = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne}\frac{dR}{de}dt,$$

$$de = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne}\left[1-\sqrt{1-e^2}\left(\frac{dR}{d\varepsilon}+\frac{dR}{d\omega}\right)\right]dt,$$

$$d\varepsilon = -\frac{2}{an}\frac{dR}{da}dt + \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{dR}{de}dt,$$

$$d\theta = \frac{1}{a^2n\sqrt{1-e^2\sin\varphi}}\frac{dR}{d\varphi}dt, \quad d\varphi = -\frac{1}{a^2n\sqrt{1-e^2\sin\varphi}}\frac{dR}{d\theta}dt.$$

On leur donne la forme indiquée par Laplace dans le *Supplément* au troisième Volume de la *Mécanique céleste,* en remplaçant $\frac{1}{an}$ et $\frac{1}{a^2n}$ par les expressions équivalentes $\frac{a^2n}{\mu}$ et $\frac{an}{\mu}$, et faisant $\mu = 1$. Il faut remarquer en outre que Laplace prend $-R$ au lieu de R, ce qui change le signe des équations ci-dessus.

On joint encore à ces équations celle relative à la variation du moyen mouvement, savoir :

$$\zeta = \int n\,dt = -3\iint \frac{1}{a^2}\frac{dR}{d\varepsilon}dt^2.$$

En posant

$$p = \sin\varphi\sin\theta, \quad q = \sin\varphi\cos\theta,$$

on change les deux dernières équations en celles-ci :

$$dp = \frac{\cos\varphi}{a^2n\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{dq}dt, \quad dq = -\frac{\cos\varphi}{a^2n\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{dp}dt.$$

bitraires, on en conclut celles qui conviennent au mouvement troublé ou $a + \delta a$, $c + \delta c$, ... En général les quadratures d'où dépendent les variations δa, δc, ... ne peuvent pas s'effectuer exactement; mais on peut toujours les obtenir par des approximations successives. Pour cela on commence par n'avoir égard qu'à la première puissance des masses perturbatrices et l'on est ainsi conduit à une première valeur approchée de ces éléments devenus variables. A l'aide des valeurs résultant de cette seconde approximation, on en obtient une troisième dans laquelle il est tenu compte des carrés et des produits des forces perturbatrices, et continuant de la sorte on parvient à des valeurs de δa, δe, $\delta \varepsilon$, ... aussi approchées qu'on le désire, et l'on arrive par suite à connaître, pour chaque instant donné, le lieu de l'astre dans son orbite avec toute la précision que les observations comportent.

Les altérations que subissent les éléments de l'orbite elliptique par l'effet des forces perturbatrices étant toujours très faibles, on peut, sans crainte d'erreur, considérer chaque effet isolément et prendre pour l'effet total résultant des diverses actions réunies la somme des effets que produirait chaque force considérée séparément. De cette manière, et quel que soit le nombre des corps qui composent le système, le problème des perturbations est toujours ramené à la considération de trois masses m, m', M qui sont un corps central prédominant M, un corps troublé m et un corps troublant m'. Les équations qui déterminent les lois du mouvement troublé sont alors les suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= \frac{dR}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= \frac{dR}{dy}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} &= \frac{dR}{dz}, \end{aligned}\right.$$

R ayant pour valeur

$$R = m'\left[\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} - \frac{xx'+yy'+zz'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Lorsqu'on néglige l'action perturbatrice de m', la fonction R s'évanouit et les équations (1) se trouvent réduites aux seuls termes qui définissent le *mouvement elliptique* ou non troublé de m autour de M. Nous allons étudier en particulier les lois qui se déduisent de ce mouvement, lois purement hypothétiques, mais que les géomètres et les astronomes ont dû considérer pour établir le principe des approximations successives.

Multiplions la deuxième des équations (1) par x et la première par y; la première par z et la troisième par x; la troisième par y et la deuxième par z; puis retranchons dans chaque combinaison la première équation de la seconde. En désignant par x', y', z' les dérivées des coordonnées prises par rapport au temps, on aura

$$(3)\quad \begin{cases} xy' - yx' = \displaystyle\int\left(x\frac{d\mathrm{R}}{dy} - y\frac{d\mathrm{R}}{dx}\right)dt = \mathcal{H}, \\ zx' - xz' = \displaystyle\int\left(z\frac{d\mathrm{R}}{dx} - x\frac{d\mathrm{R}}{dz}\right)dt = \mathcal{H}', \\ yz' - zy' = \displaystyle\int\left(y\frac{d\mathrm{R}}{dz} - z\frac{d\mathrm{R}}{dy}\right)dt = \mathcal{H}'', \end{cases}$$

expressions qui, étant multipliées respectivement par z, y, x, donnent

$$(4)\quad \mathcal{H}z + \mathcal{H}'y + \mathcal{H}''x = 0.$$

Dans le mouvement elliptique où $\mathrm{R} = 0$, les quantités $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$ sont des constantes et l'équation (4) représente un plan de position invariable qui passe par l'origine des coordonnées ou par le centre du Soleil. Dans le cas du mouvement troublé, ces quantités varient avec t et l'équation (4) ne peut être regardée comme représentant un plan que pendant un intervalle de temps infiniment petit. La planète se meut alors en passant successivement d'un arc d'ellipse à un autre à chaque instant dt, et décrit ainsi une courbe à laquelle toutes les ellipses variables deviennent des courbes osculatrices.

Soit dv l'angle décrit par le rayon vecteur r dans l'instant dt; l'aire décrite par ce rayon sur le plan de l'orbite aura pour expression

$$\tfrac{1}{2}r^2\,dv,$$

et, en appelant φ, φ_1, φ_2 les angles compris entre le plan des deux rayons vecteurs ou de la courbe et les plans coordonnés xy, xz, yz, on aura

$$(5)\quad r^2\,dv\cos\varphi = \mathcal{H}\,dt,\quad r^2\,dv\cos\varphi_1 = \mathcal{H}'\,dt,\quad r^2\,dv\cos\varphi_2 = \mathcal{H}''\,dt;$$

car les premiers membres des équations (3) ne sont autre chose que les projections du double de l'aire décrite par la planète pendant l'instant dt sur les plans des xy, des xz et des zy.

De là résulte

$$(6)\quad r^4\,dv^2 = \mathrm{K}^2\,dt^2 \quad \text{ou} \quad r^2\,dv = \mathrm{K}\,dt,$$

en faisant, pour abréger, $\mathrm{K}^2 = \mathcal{H}^2 + \mathcal{H}^{2\prime} + \mathcal{H}^{2\prime\prime}$.

φ désignant toujours l'angle que le plan de la courbe fait avec le plan fixe des xy ou de l'écliptique, appelons θ l'angle que forme la commune intersection de ces plans avec l'axe des x ou la *longitude du nœud;* on aura, par les principes de la Trigonométrie sphérique,

$$\cos\varphi_1 = -\sin\varphi\cos\theta, \quad \cos\varphi_2 = \sin\varphi\sin\theta;$$

on aura par suite

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{K} &= \mathrm{K}\cos\varphi, \\ \mathcal{K}' &= -\mathrm{K}\sin\varphi\cos\theta, \\ \mathcal{K}'' &= \mathrm{K}\sin\varphi\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (4), donnent

$$z\cos\varphi - y\sin\varphi\cos\theta + x\sin\varphi\sin\theta = 0,$$

d'où

$$(8)\qquad z = y\,\mathrm{tang}\,\varphi\cos\theta - x\,\mathrm{tang}\,\varphi\sin\theta.$$

C'est l'*équation du plan* de l'orbite fixe ou variable.

Quant aux valeurs de φ et de θ qui fixent la position de ce plan, elles seront déterminées par les équations (7) lorsque les constantes arbitraires $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}''$ seront connues. On a en effet, en fonction de ces arbitraires,

$$(9)\qquad \cos\varphi = \frac{\mathcal{K}}{\mathrm{K}}, \quad \mathrm{tang}\,\theta = -\frac{\mathcal{K}''}{\mathcal{K}'}.$$

L'équation (6) fournie par le principe des aires représente une intégrale première des équations (1) privées de leurs seconds membres. On en obtient une seconde par l'emploi du principe des forces vives. On trouve en effet, par l'application de ce principe,

$$(10)\qquad \frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{dv^2}{dt^2} = \frac{2\mu}{r} + \mathrm{H},$$

H désignant une constante arbitraire.

En éliminant dt entre cette équation et celle (6), on obtient

$$\frac{\mathrm{K}^2(dr^2 + r^2\,dv^2)}{r^4\,dv^2} = \frac{2\mu}{r} + \mathrm{H},$$

d'où

$$(11)\qquad dv = \frac{\mathrm{K}\,dr}{r\sqrt{\mathrm{H}r^2 + 2\mu r - \mathrm{K}^2}},$$

équation différentielle de la trajectoire.

Pour en trouver l'intégrale considérons le trinôme

$$Hr^2 + 2\mu r - K^2 = 0,$$

par lequel se trouvent déterminées les valeurs maxima et minima de r, valeurs que nous désignerons respectivement par $a(1+e)$ et $a(1-e)$. La somme de ces deux racines étant égale à $-\frac{2\mu}{H}$ et leur produit à $\frac{K^2}{H}$, on aura

$$-\frac{2\mu}{H} = 2a, \quad \frac{K^2}{H} = a^2(1-e^2),$$

d'où

$$H = -\frac{\mu}{a}, \quad K = \sqrt{a\mu(1-e^2)}. \tag{12}$$

D'après cela, l'expression ci-dessus de dv deviendra

$$\begin{aligned}
dv &= \frac{dr\sqrt{a\mu(1-e^2)}}{r\sqrt{-\frac{\mu}{a}[r-a(1-e)][r-a(1+e)]}} \\
&= \frac{a\,dr}{r\sqrt{\frac{-[r-a(1-e)][r-a(1+e)]}{1-e^2}}} \\
&= \frac{-d\frac{1}{r}}{\sqrt{-\frac{1}{r^2}+\frac{2}{ar(1-e^2)}-\frac{1}{a^2(1-e^2)}}} \\
&= \frac{-d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{(1-e^2)^2}-\frac{1}{1-e^2}\right]-\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{a(1-e^2)}\right]}} \\
&= \frac{-d\frac{1}{r}\,\frac{a(1-e^2)}{e}}{\sqrt{1-\left[\frac{\frac{1}{r}a(1-e^2)-1}{e}\right]^2}},
\end{aligned}$$

expression dont l'intégrale est

$$v = \omega + \text{arc}\left[\cos = \frac{\frac{a}{r}(1-e)-1}{e}\right], \tag{13}$$

ω étant une constante arbitraire. On en déduit

$$\frac{a}{r}(1-e^2)-1=e\cos(v-\omega).$$

Ainsi

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\omega)}. \tag{14}$$

Cette équation est celle d'une section conique rapportée à son foyer. Dans le cas des planètes, a est toujours positif et $e<1$; cette équation représente alors une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers; l'ellipse se change en une parabole lorsque a est infini et $e=1$, et en une hyperbole lorsque a est négatif et $e>1$. La discussion de cette équation (14) montre encore que v et ω sont les angles formés par le rayon vecteur r et la ligne des absides ou le grand axe avec un axe fixe situé dans le plan de l'orbite, c'est-à-dire la *longitude vraie de la planète* et la *longitude du périhélie*. Quant à la différence $v-\omega$ de ces angles, qui fixe la distance de l'astre au périhélie, c'est ce qu'on nomme l'*anomalie vraie* de la planète [1].

Si, au lieu d'éliminer dt entre les équations (6) et (10), on élimine dv, on aura

$$\frac{dr^2}{dt}+\frac{K^2}{r^2}=\frac{2\mu}{r}+H,$$

équation d'où l'on tire

$$dt=\frac{r\,dr}{\sqrt{H+\frac{2\mu}{r}-\frac{K^2}{r^2}}},$$

c'est-à-dire, en remplaçant H et K par leurs valeurs (12),

$$dt=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,\frac{r\,dr}{\sqrt{2ar-r^2-a^2(1-e^2)}}=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}.$$

On rend cette équation intégrable en introduisant une variable auxiliaire u liée à r par la relation

$$r=a(1-e\cos u),\quad \text{d'où}\quad dr=ae\sin u\,du; \tag{15}$$

---

[1] Si, comme les anciens astronomes avaient coutume de le faire, on voulait compter l'anomalie vraie à partir de l'*aphélie*, il faudrait écrire, dans la formule (14), $180-v-\omega$ au lieu de $v-\omega$, et, par suite, prendre au dénominateur $1-e\cos(v-\omega)$ au lieu de $1+e\cos(v-\omega)$.

car il vient alors

$$dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(1 - e\cos u)\,du, \tag{16}$$

expression dont l'intégrale est

$$nt + c = u - e\sin u, \tag{17}$$

en posant

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \tag{18}$$

c est la constante introduite par l'intégration, u l'angle que l'on appelle *anomalie excentrique* et nt le *moyen mouvement* ou l'*anomalie moyenne* de la planète m. Lorsqu'on prend pour origine du temps l'instant du passage de la planète par le périhélie, t et u sont nuls en même temps, c disparaît donc et l'on a

$$nt = u - e\sin u. \tag{19}$$

Lorsque, au contraire, on convient de compter le temps à partir d'un instant quelconque après le passage au périhélie, l'angle nt se trouve augmenté de la constante $\varepsilon - \omega$, ε désignant la longitude moyenne de la planète à l'origine du temps ou la *longitude de l'époque,* et dans ce cas l'on a

$$nt + \varepsilon - \omega = u - e\sin u$$

ou

$$nt = \omega - \varepsilon + u - e\sin u. \tag{20}$$

La même relation (20) convient encore à l'équation différentielle (16) lorsqu'on a égard à l'action de la planète m', pourvu qu'en regardant ω, ε, e comme variables, et posant

$$\int n\,dt = \zeta = \omega - \varepsilon + u - e\sin u,$$

il en résulte

$$\frac{d\zeta}{de}de + \frac{d\zeta}{d\varepsilon}d\varepsilon + \frac{d\zeta}{d\omega}d\omega = 0.$$

Maintenant, si l'on élimine r entre les équations (14) et (15), on obtient

$$\cos u = \frac{e + \cos(v - \omega)}{1 + e\cos(v - \omega)},$$

d'où

$$\frac{1 - \cos(v - \omega)}{1 + \cos(v + \omega)} = \frac{1 + e}{1 - e}\,\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u},$$

c'est-à-dire

$$\tan\tfrac{1}{2}(v-\omega)=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\tfrac{1}{2}u. \tag{21}$$

Cette formule fait connaître directement l'angle $v-\omega$ en fonction de u, et par suite de t. Lorsqu'on compte les angles v à partir du périhélie. on a $\omega=0$, et par suite

$$\tan\tfrac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\tfrac{1}{2}u. \tag{22}$$

Les coordonnées r et v déterminées par les formules (15) et (22) font connaître la position d'une planète dans son orbite à un instant quelconque t, lorsque pour cet instant u est connu. Il s'agit donc tout d'abord d'obtenir u. Mais l'équation (19) qui l'exprime étant transcendante, il est impossible en général d'avoir son expression sous forme finie, et c'est à un développement en série que l'on est obligé d'avoir recours. Voici le moyen que l'on emploie ordinairement pour y parvenir.

On a

$$u=nt+e\sin u,$$

et comparant cette équation avec celle

$$z=x+e\,f(x),$$

dont le développement dû à Lagrange est

$$z=x+e\,f(x)+\frac{e^2}{1.2}\,\frac{d\,f(x)^2}{dx}+\ldots+\frac{e^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x)^n+\ldots, \tag{a}$$

on en déduit, en faisant $z=u$, $x=nt$, $f(x)=\sin x$ (et laissant x pour plus de simplicité),

$$u=x+e\sin x+\frac{e^2}{1.2}\,\frac{d\sin^2 x}{dx}+\frac{e^3}{1.2.3}\,\frac{d^2\sin^3 x}{dx^2}+\ldots.$$

Mais on a

$$\begin{array}{ll}
2\sin^2 x=-\cos 2x+1, & \dfrac{d\sin^2 x}{dx}=\sin 2x,\\[2ex]
2^2\sin^3 x=-\sin 3x+3\sin x, & \dfrac{d^2\sin^3 x}{dx^2}=\dfrac{3^2\sin 3x-3\sin x}{2^2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

On a donc, par la substitution de ces valeurs dans l'équation précédente et après avoir remplacé x par nt,

$$(23)\qquad u = nt + e\sin nt + \frac{e^2}{2}\sin 2nt + \frac{e^3}{2^3}(3\sin 3nt - \sin nt) + \ldots .$$

L'angle u étant déterminé en fonction de t par cette formule, on aura les valeurs correspondantes de r et v à l'aide des relations (15) et (22) qui précèdent. Mais il est préférable, surtout lorsque les excentricités sont petites, d'exprimer r et v de la même manière que u, c'est-à-dire par des séries procédant suivant les puissances de e et qui soient des fonctions explicites du temps. Voyons donc comment on peut exprimer r et v sans passer par le calcul de u.

On a

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u.$$

Posons

$$\mathrm{F}(x) = 1 - e\cos x,\quad \mathrm{F}'(x) = e\sin x,\quad f(x) = \sin x,\quad x = nt;$$

alors, par la formule connue

$$(b)\quad \mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(x) + e\,\mathrm{F}'(x)\,f(x) + \ldots + \frac{e^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\mathrm{F}'(x)f(x)^n],$$

on en déduira

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos x + e^2\sin^2 x + \frac{e^3}{2}\,\frac{d\sin^3 x}{dx} + \ldots ,$$

mais

$$\sin^2 x = -\frac{\cos 2x + 1}{2},\quad \frac{d\sin^3 x}{dx} = -\frac{3\cos 3x + 3\cos x}{2^2},\quad \ldots .$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente et remplaçant x par sa valeur nt, on aura donc

$$(24)\quad \frac{r}{a} = 1 - e\cos nt - \frac{e^2}{2}(\cos 2nt - 1) - \frac{e^3}{2^3}(3\cos 3nt - 3\cos nt) - \ldots .$$

Il nous reste à exprimer v en fonction de t. Or, si l'on écrit l'équation (22) de cette manière

$$\frac{\sin\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{\sin\frac{1}{2}u}{\cos\frac{1}{2}u},$$

et que, dans cette dernière, on remplace les sinus et cosinus par leurs valeurs en exponentielles imaginaires, on aura, $\mathcal{E}$ désignant la base du système de logarithmes népériens,

$$\frac{\mathcal{E}^{v\sqrt{-1}}-1}{\mathcal{E}^{v\sqrt{-1}}+1}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{\mathcal{E}^{u\sqrt{-1}}-1}{\mathcal{E}^{u\sqrt{-1}}+1}.$$

Posons

$$\lambda=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}},$$

il en résultera

$$\mathcal{E}^{v\sqrt{-1}}=\mathcal{E}^{u\sqrt{-1}}\,\frac{1-\lambda\,\mathcal{E}^{-u\sqrt{-1}}}{1-\lambda\,\mathcal{E}^{u\sqrt{-1}}},$$

et, en prenant les logarithmes des deux membres, on aura

$$v=u+\frac{\log\left(1-\lambda\,\mathcal{E}^{-u\sqrt{-1}}\right)-\log\left(1-\lambda\,\mathcal{E}^{u\sqrt{-1}}\right)}{\sqrt{-1}},$$

expression d'où l'on tire, en développant les logarithmes et remplaçant les exponentielles imaginaires par leurs valeurs en sinus et cosinus,

$$v=u+2\left(\lambda\sin u+\frac{\lambda^2}{2}\sin 2u+\frac{\lambda^3}{3}\sin 3u+\ldots\right).$$

Maintenant on a

$$u=nt+e\sin u,$$

$$\sin u=\frac{u-nt}{e}=\sin nt+\frac{e}{2}\sin 2nt+\frac{e^2}{2^3}(3\sin 3nt-\sin nt)+\ldots;$$

on a ensuite

$$\begin{aligned}\sin 2u=\sin 2nt+e(\sin 3nt-\sin nt)+e^2(\sin 4nt-\sin 2nt)&\\+\frac{e^3}{2^3.3}(4\sin nt-27\sin 3nt+25\sin 5nt)+\ldots,&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 3u=\sin 3nt+\frac{e}{2}(3\sin 4nt-3\sin 2nt)&\\+\frac{e^2}{2^3}(15\sin 5nt-18\sin 3nt+3\sin nt)+\ldots,&\end{aligned}$$

. . . .

D'un autre côté, la formule de Lagrange [formule (b)] donne, en posant $1+\sqrt{1-e^2}=\alpha$, d'où $\alpha=2-\frac{e^2}{\alpha}$ et $z=\alpha$, $x=2$, $e=e^2$, $F(z)=\frac{1}{\alpha^i}=\frac{1}{z^i}$,

$$\frac{1}{z^i}=\frac{1}{2^i}+\frac{ie^2}{2^{i+2}}+\frac{i(i+3)}{1.2}\,\frac{e^4}{2^{i+4}}+\frac{i(i+4)(i+5)}{1.2.3}\,\frac{e^6}{2^{i+6}}+\ldots,$$

c'est-à-dire, en remarquant que $\lambda = \frac{e}{\alpha} = \frac{e}{z}$,

$$\lambda^i = \frac{e^i}{2^i} + \frac{i}{2^{i+2}} e^{i+2} + \frac{i(i+3)}{2.2^{i+4}} e^{i+4} + \frac{i(i+4)(i+5)}{2.3.2^{i+6}} e^{i+6} + \ldots.$$

D'après cela, et en bornant l'approximation aux termes qui sont du troisième ordre par rapport à e, on aura donc

$$(25)\quad v = nt + 2e\sin nt + \tfrac{5}{4}e^2\sin 2nt + \frac{e^3}{1.2^2.3}(13\sin 3nt - 3\sin nt) + \ldots.$$

$v - nt$ ou la suite des termes $+2e\sin nt + \frac{5}{4}e^2\sin 2nt + \ldots$ est ce que les astronomes sont convenus d'appeler l'*équation du centre;* c'est, comme on voit, la quantité qu'il faut ajouter à la longitude moyenne pour avoir la longitude vraie v. Si, au lieu de compter l'angle v du périhélie, on fixe son origine à un point quelconque de l'orbite et si, de plus, on prend pour origine du temps un instant quelconque après le passage de la planète au périhélie, il faudra, d'après les remarques que nous avons faites à la page 149, remplacer dans les expressions (24) et (25) v par $v - \omega$ et nt par $nt + \varepsilon - \omega$, et ces expressions deviendront alors

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{r}{a} = 1 - e\cos nt + \varepsilon - \omega - \dfrac{e^2}{2}[\cos 2(nt + \varepsilon - \omega) - 1] - \ldots, \\ v = nt + \varepsilon + 2e\sin(nt + \varepsilon - \omega) + \tfrac{5}{4}e^2\sin 2(nt + \varepsilon - \omega) + \ldots. \end{cases}$$

Connaissant v, r, φ et θ, on obtiendra la longitude héliocentrique v_1, la latitude héliocentrique s et la projection r_1 du rayon vecteur r sur l'écliptique, au moyen des relations suivantes, démontrées au § I du Chapitre III :

$$\operatorname{tang}(v_1 - \theta) = \cos\varphi \operatorname{tang}(v - \theta),$$
$$\operatorname{tang} s = \operatorname{tang}\varphi \sin(v_1 - \theta),$$
$$r_1 = r\cos s.$$

Lorsque l'inclinaison φ est peu considérable, ce qui est le cas de la plupart des planètes, on peut, au lieu de calculer directement v_1, chercher l'expression de la correction ρ qui, appliquée à v, donne v_1. Cette correction, que l'on nomme *réduction à l'écliptique,* a pour expression, comme nous l'avons vu à l'endroit du Chapitre précité,

$$\rho = -\frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varphi}{\sin 1''}\sin 2(v - \theta) + \frac{\operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\varphi}{\sin 2''}\sin 4(v - \theta) + \ldots,$$

en sorte que

$$v_1 = v + \rho;$$

inversement, on aurait

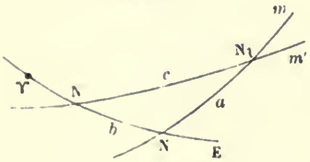
$$v = v_1 + \rho_1,$$

ρ_1 étant la valeur ci-dessus de ρ, dans laquelle v_1 est mis au lieu de v.

Les angles φ et θ, qui fixent la position de l'orbite de m dans l'espace, sont rapportés à l'écliptique; mais il est aisé d'en déduire les valeurs γ et τ des mêmes éléments rapportés au plan de l'orbite de m', comme cela est nécessaire dans le calcul des perturbations.

En effet, soient (*fig.* 20)

Fig. 20.



♈ E l'écliptique,
N m l'orbite de m,
N' m' l'orbite de m',
N, N' les nœuds ascendants de ces orbites,
θ et θ' les longitudes ♈ N et ♈ N' des nœuds N et N',
φ et φ' les inclinaisons respectives des orbites de m et m' sur l'écliptique.

N_1 sera le nœud ascendant de l'orbite de m par rapport à celle de m', et l'on aura

$$\tau = \Upsilon N + NN_1,$$
$$\tau' = \Upsilon N' + N'N_1,$$
$$\gamma = mN_1m'.$$

Posons dans le triangle $N'NN_1$

$$NN_1 = a = \tau - \theta, \quad N'N = b = \theta - \theta', \quad N'N_1 = c = \tau' - \theta'.$$

et

$$A = \varphi, \quad B = \gamma, \quad C = 180^\circ - \varphi;$$

alors, par les formules connues

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}, \quad \sin B \cos a = \sin C \cos A + \sin A \cos C \cos b,$$

on en déduira

$$\sin\gamma \sin(\tau - \theta) = \sin\varphi' \sin(\theta - \theta'),$$
$$\sin\gamma \cos(\tau - \theta) = \sin\varphi \cos\varphi' - \sin\varphi' \cos\varphi \cos(\theta - \theta').$$

Maintenant, si l'on développe dans les premiers membres de ces équations $\sin(\tau - \theta)$, $\cos(\tau - \theta)$, puis qu'on tire les valeurs de $\sin\gamma \sin\tau$ et de $\sin\gamma \cos\tau$, et qu'enfin on pose

$$(27) \qquad \left\{ \begin{aligned} p &= \operatorname{tang}\varphi \sin\theta, \\ q &= \operatorname{tang}\varphi \cos\theta, \\ p' &= \operatorname{tang}\varphi' \sin\theta', \\ q' &= \operatorname{tang}\varphi' \cos\theta', \end{aligned} \right.$$

on obtiendra, après quelques réductions faciles,

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin\gamma}{\cos\varphi \cos\varphi'} \sin\tau &= p - p' + 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\cos\varphi} \sin(\theta - \theta'), \\ \frac{\sin\gamma}{\cos\varphi \cos\varphi'} \cos\tau &= q - q' - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\cos\varphi} \sin(\theta - \theta') \sin\theta. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas où φ et φ' sont de très petits arcs, on peut écrire

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sin\gamma \sin\tau &= p - p', \\ \sin\gamma \cos\tau &= q - q'. \end{aligned} \right.$$

Ces équations déterminent l'inclinaison mutuelle γ des orbites et la longitude τ du nœud ascendant de m sur m'. On obtiendrait celles qui font connaître la longitude τ' du nœud descendant de m' sur m en changeant simplement dans les précédentes τ, p, q, φ, θ en τ', p', q', φ', θ', ou inversement, et remarquant que $\sin\gamma$ prend dans ce cas un signe contraire.

* * *

CHAPITRE IV.

ÉPHÉMÉRIDES DE LA LUNE.

I. — Des principales inégalités du mouvement de la Lune.

Si la Lune n'était soumise qu'à l'action attractive de la Terre, les lois qu'elle suivrait seraient exactement celles du mouvement elliptique : l'orbite décrite serait une ellipse invariable de forme et de position dont la Terre occuperait un des foyers, et les aires tracées par le rayon vecteur lunaire seraient rigoureusement proportionnelles aux temps employés à les décrire. Mais la Lune est attirée à la fois par le Soleil, la Terre et les planètes, et de cette diversité d'action résultent les inégalités que nous observons dans son mouvement. Comme l'action solaire est la seule qui ait une influence marquée sur les mouvements de la Lune, les inégalités qui la troublent ne peuvent résulter que de la différence des actions exercées par le Soleil sur la Lune et la Terre (¹), et leur grandeur doit dépendre uniquement du rapport de la force perturbatrice à la force principale ou de la force qui émane du Soleil à celle qui provient de la Terre. Ces inégalités sont du même genre que celles qui affectent les mouvements planétaires; seulement, comme la force perturbatrice, dans le cas de la Lune, est beaucoup plus considérable que dans le cas des planètes et le mouvement de cet astre autour de la Terre plus rapide, ces inégalités ont, en général, des coefficients plus considérables et des périodes beaucoup plus courtes. Nous allons examiner dans ce paragraphe les prin-

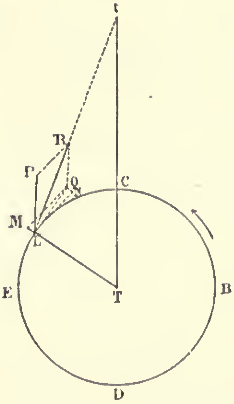
---

(¹) Cette considération, qui ramène toutes les forces perturbatrices à une seule et qui réduit le nombre des corps du système à trois, a fait donner au problème qui consiste à déterminer le mouvement troublé de la Lune autour de la Terre le nom de *problème des trois corps*.

cipales de ces inégalités, qui sont la *variation*, l'*évection* et l'*équation annuelle*. Nous commencerons par celles qui affectent la forme et la grandeur de l'orbite lunaire; ensuite, nous considérerons celles que cette orbite éprouve par l'effet de son inclinaison.

Soient S (*fig.* 21) la position du Soleil, LEDB l'orbite de la Lune

Fig. 21.



actuellement en L. Sous l'influence de l'action solaire, la Lune se trouve attirée vers le Soleil par une force représentée en grandeur et en direction par la droite LR. Pour apprécier les effets de cette force, décomposons-la en deux autres, l'une LP égale et parallèle à celle TS que le Soleil exerce sur la Terre, et l'autre LQ qui s'obtient en achevant le parallélogramme PLQR. La force LP étant commune en grandeur et en direction à la Lune et à la Terre ne change rien au mouvement relatif de ces corps; c'est elle qui engendre le mouvement elliptique. Quant à la seconde force LQ, qui produit dans le mouvement de la Lune les inégalités que nous observons, on peut la décomposer en deux autres forces, l'une LN tangente à l'orbite de la Lune et l'autre ML dirigée suivant le rayon de la Terre. Considérons d'abord la première de ces forces, celle LN dont l'effet est visiblement d'altérer la vitesse de translation de la Lune autour de notre globe. En suivant la Lune dans les diverses positions qu'elle peut occuper sur son orbite, on reconnaît aisément qu'en partant de la syzygie C, par exemple, sa vitesse diminue jusqu'à la quadrature E; que de ce point à la syzygie D elle va en augmentant, pour diminuer de l'opposition D à la quadrature B, et croître ensuite de B en C. C'est à cette série d'inégalités, dont la connaissance est due à Tycho-Brahé, que l'on a donné le nom de *variation*. En désignant par ☾ la longitude de la Lune et par ⊙ celle du Soleil, on a pour l'expression de cette inégalité

$$0°,36' \sin(\odot - ☾).$$

La seconde force LM que nous considérerons maintenant agit pour changer la pesanteur de la Lune vers la Terre, et va nous donner l'explication d'une autre inégalité, dont la découverte est due à Kepler, et que l'on nomme *équation annuelle*.

Comme, dans le cours d'une année, la Terre accompagnée de la Lune se rapproche et s'éloigne successivement du Soleil, on conçoit que, lorsque la Terre atteint le périhélie, l'attraction du Soleil étant alors la plus grande, la pesanteur de la Lune vers la Terre se trouve diminuée et son orbite dilatée. Le contraire a lieu lorsque notre globe est à l'aphélie, car alors, l'attraction solaire étant la moins forte, la pesanteur est augmentée et l'orbite contractée. C'est à ces dilatations et contractions successives de l'orbite lunaire que l'on a donné le nom d'équation annuelle. Cette inégalité dépend, comme on voit, du lieu de la Terre dans l'écliptique et a pour période l'année solaire anomalistique. On peut la représenter par l'expression

$$0°11'16'' \sin \zeta,$$

ζ étant l'anomalie moyenne du Soleil.

Outre l'inégalité dont nous venons de parler, la force LM en produit une autre désignée sous le nom d'*évection*, et dont la découverte est due à Ptolémée. En examinant ce que devient la force LM dans les diverses positions que la Lune occupe sur son orbite, on reconnaît que la pesanteur augmente dans les quadratures et diminue, au contraire, aux syzygies, la diminution étant d'ailleurs double de l'augmentation (¹). Or, sans l'action du Soleil, la Lune

---

(¹) Ceci exige une démonstration que nous allons donner dans cette note. Nous nous appuierons pour le faire sur les considérations que Clairaut a développées dans sa *Théorie de la Lune*.

Soient S la position du Soleil, T celle de la Terre et L la Lune. Appelons M la atteindrait son périgée au moment où la vitesse acquise commencerait à l'emporter sur l'attraction de la Terre. Le Soleil, en diminuant la pesanteur et en favorisant la vitesse de la Lune, change l'instant où cet astre passe au périgée, point qui se trouve alors

---

masse du Soleil et posons

$$LT = r, \quad ST = \rho, \quad SL = \rho', \quad STL = T, \quad LST = S.$$

Les actions exercées par le Soleil sur la Lune et la Terre auront respectivement pour expressions $\frac{M}{\rho'^2}$, $\frac{M}{\rho^2}$, et ces actions seront dirigées, la première suivant LS et la seconde suivant TS.

Décomposons la première de ces forces en deux autres, l'une dirigée suivant LT et l'autre suivant une parallèle LP à TS. D'après la règle du parallélogramme des forces, ces deux composantes seront représentées respectivement par $\frac{M}{\rho'^2}\frac{r}{\rho'}$, $\frac{M}{\rho'^2}\frac{\rho}{\rho'}$, et comme la force qui doit être appliquée à la Lune, lorsqu'on suppose la Terre immobile, est $-\frac{M}{\rho^2}$, on aura pour les expressions des forces perturbatrices qui agissent sur la Lune suivant les directions LT et LP

$$\frac{Mr}{\rho'^3}, \quad M\left(\frac{\rho}{\rho'^3} - \frac{1}{\rho^2}\right).$$

Supposons maintenant que le plan de l'orbite lunaire se confonde avec l'écliptique ou que les trois corps soient dans un même plan, et abaissons du centre L de la Lune la perpendiculaire LL' sur ST, on aura

$$SL' = SL\cos S \quad \text{ou} \quad SL' = SL,$$

car l'angle S n'atteint jamais 9'; on aura par suite

$$SL = \rho' = \rho - r\cos T,$$
$$\frac{1}{\rho'^3} = \frac{1}{\rho^3} + \frac{3r\cos T}{\rho^4} + \dots.$$

On peut négliger le carré du rapport $\frac{r}{\rho}$ qui est très petit, $\frac{1}{400}$ environ; ainsi la force suivant LT se réduit à $\frac{Mr}{\rho^3}$ et celle suivant LP à $\frac{3Mr\cos T}{\rho^3}$.

Mais cette dernière force peut elle-même se décomposer en deux autres forces, l'une dirigée suivant le prolongement LM de LT et l'autre suivant une perpendiculaire à ce rayon. Ne considérons que la première de ces forces, celle qui agit suivant LM; elle a pour expression

$$\frac{3Mr\cos T}{\rho^3}\cos T,$$

et comme elle attire la Lune en sens inverse de la force $\frac{Mr}{\rho^3}$, elle doit en être poussé vers le Soleil. Le contraire a lieu aux époques où le Soleil diminue la pesanteur de la Lune; le périgée se meut alors en sens opposé; et, comme la diminution est double de l'augmentation, l'arc dont l'apogée a tourné vers le Soleil surpasse celui dont il a rétrogradé : ainsi l'axe des absides de l'orbe lunaire se meut dans l'ordre des signes. L'arc parcouru dans l'espace d'un an est de 40°40′, et la circonférence entière se trouve décrite par le périgée en neuf ans environ.

Mais en même temps que ce phénomène se produit, l'excentricité de l'orbite lunaire varie; car l'action de la Terre étant d'autant plus faible que la Lune est près de son apogée, et d'autant plus grande que cet astre est plus rapproché de son périgée, il doit nécessairement en résulter, dans le premier cas, une augmentation de la distance TC à laquelle correspond une dilatation de l'ellipse lunaire, dans le second cas, une diminution de la même distance à laquelle correspond une contraction de cette courbe; et dans les deux cas une variation de l'excentricité. Cette variation se manifeste à nous par une altération de la vitesse de l'astre, qui subit alternativement des avances et des retards, et constitue ce qu'on nomme l'*évection*. Sa période est de 31^{j},8119 et, en appelant ζ

---

retranchée. R désignant la force totale que le Soleil produit sur la Lune dans la direction LT, on a donc

$$R = \frac{Mr}{\rho^3}(1 - 3\cos^2 T)$$

ou

$$R = -\frac{Mr}{2\rho^3}(1 + 3\cos 2T).$$

Dans les syzygies on a

$$T = 0 \quad \text{ou} \quad T = 180^\circ;$$

par conséquent,

$$R = -\frac{2Mr}{\rho^3}.$$

Dans les quadratures on a

$$T = 90^\circ \quad \text{ou} \quad T = 270^\circ;$$

donc, dans ce cas,

$$R = \frac{Mr}{\rho^3}.$$

Ainsi l'attraction que la Terre exerce sur la Lune est augmentée dans les quadratures et diminuée dans les syzygies, la diminution étant d'ailleurs double de l'augmentation.

l'anomalie moyenne de la Lune, on a, pour son expression,

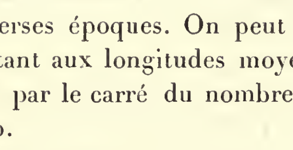
$$1^\circ 20' \sin 2[(☉ - ☾) - \zeta].$$

En comparant les observations anciennes aux observations modernes, Halley reconnut le premier que le mouvement de la Lune s'accélérait. La cause de cette accélération, qui a échappé longtemps aux recherches des plus grands géomètres, est due, comme Laplace l'a montré, à l'action du Soleil sur la Lune combinée avec la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite terrestre ; elle porte le nom d'*équation séculaire*. Cette inégalité est périodique, mais la durée de sa période embrasse plusieurs milliers d'années.

L'extrême lenteur avec laquelle elle croît l'aurait rendue pour longtemps insensible aux observateurs, si sa valeur, en s'élevant jusqu'à 8° ou 9° avant de changer de signe, ne produisait pas des différences considérables entre les mouvements séculaires de la Lune observée à diverses époques. On peut la représenter algébriquement, en ajoutant aux longitudes moyennes de la Lune le nombre 10″ multiplié par le carré du nombre des siècles écoulés depuis l'époque 1800.

Dans ce qui précède, nous avons admis que la Lune se mouvait dans le plan de l'écliptique; mais on sait qu'en réalité le plan de l'orbite lunaire est incliné d'environ 5°9′ sur ce dernier : il en résulte que la force LQ est oblique au plan de l'écliptique et que l'on doit considérer, outre la force tangentielle LN et la force LM, une troisième force perpendiculaire à celle-ci, laquelle agit pour ramener la Lune dans l'écliptique. Pour apprécier les effets de cette force, supposons que EN soit l'écliptique (*fig.* 22), LN l'orbite lunaire et N le nœud de la Lune. Abstraction faite du Soleil, la Lune décrirait, en vertu de son mouvement propre, un certain arc L*b* ; mais l'action solaire, en agissant suivant L*a*,

Fig. 22.



pour ramener la Lune vers l'écliptique, change cette direction, qui devient LL', c'est-à-dire celle suivie par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces L*a* et L*b*. L'orbite lunaire est alors LN' et le nœud se trouve transporté de N en N', c'est-à-dire dans le sens contraire du mouvement de la Lune en longitude; en même temps l'inclinaison LNE s'est accrue de tout l'arc LL'*a*. Or, tant que la Lune demeure au-dessus de l'écliptique, cette inclinaison augmente, mais elle se rétablit peu à peu, en passant par les mêmes degrés, dès que cet astre est au-dessous de ce plan ; seuls les nœuds continuent à rétrograder.

Il résulte de ce qui précède que la Lune subit deux altérations, l'une dans l'inclinaison de son orbite, par suite de laquelle le plan de cette orbite paraît osciller autour d'un état moyen invariable avec la durée des siècles, et l'autre dans la direction de la ligne des nœuds qui, par son mouvement rétrograde, décrit un arc d'environ 19°20' par an ou une circonférence entière en dix-huit ans, sept mois et demi.

Ces deux mouvements en produisent, par leur combinaison, un troisième dans l'axe de rotation de la Lune, qui décrit une petite surface conique autour de la perpendiculaire à l'orbite de cet astre menée par son centre, effet analogue à celui qui a lieu, comme nous l'avons vu, pour la Terre, et que l'on désigne sous le nom de *nutation lunaire*.

Les inégalités que nous venons d'indiquer sous le nom de *variation*, d'*évection* et d'*équation annuelle* sont les plus sensibles qui affectent la longitude de la Lune, mais ce ne sont pas les seules qui altèrent cet élément. L'analyse en a fait découvrir un grand nombre d'autres, beaucoup plus petites, il est vrai, mais auxquelles on ne saurait se dispenser d'avoir égard dans la construction des Tables lunaires. En les réunissant, avec leur signe, aux trois précédentes et à la longitude moyenne, on obtient la *longitude vraie,* telle que la donnent les *Éphémérides*.

II. — Longitude moyenne du nœud ascendant de la Lune.

Nous avons vu que les nœuds de la Lune n'étaient pas fixes; qu'ils rétrogradaient sur l'écliptique de 19°,3286 par an, de manière à faire le tour entier de l'écliptique en dix-huit ans sept mois et demi environ. C'est la longitude de ces nœuds, dont la connaissance est nécessaire pour la solution de certains problèmes concernant la nutation des étoiles et des planètes que la *Connaissance des Temps* fait connaître à la page 40 (¹). Comme le calcul de cette longitude dépend de certains éléments dont la détermination fait plus particulièrement l'objet du Chapitre V, nous renverrons au paragraphe III de ce Chapitre, où cette question se trouve complètement traitée.

III. — Passage du centre de la Lune au méridien de Paris.

L'heure du passage du centre de la Lune au méridien peut se déterminer par un calcul semblable à celui que nous avons fait à la page 129 pour les planètes; c'est-à-dire qu'en désignant par $Æ_{\odot}$ et $Æ_{☾}$ les ascensions droites du Soleil et de la Lune, et par μ' et μ les mouvements diurnes respectifs de ces corps, on a pour l'heure t du passage

$$t = \frac{24^{h}(Æ_{☾} - Æ_{\odot})}{24^{h} + \mu' - \mu}.$$

Comme la marche de la Lune en ascension droite n'est pas uniforme dans l'intervalle que l'on considère, la valeur de t ainsi déterminée n'est qu'approchée. Cette approximation est bien suffisante pour la prédiction des passages de la Lune en temps moyen astronomique, tels que les donne la *Connaissance des Temps*, qui s'en tient aux minutes rondes; si l'on voulait, cependant, une plus grande précision, il faudrait calculer l'ascension droite qui convient à l'heure t ainsi déterminée, en tenant compte des différences secondes, et avec cette ascension droite recommencer le calcul. Soit alors t' le temps du passage obtenu par cette seconde approximation. Si la différence $t - t'$ était assez notable pour faire craindre que, dans cet intervalle de temps, l'ascension droite correspondante à la valeur de t' eût sensiblement varié, on devrait recommencer le calcul, en prenant l'ascension droite qui convient à l'heure t', et continuer de la sorte, jusqu'à ce que la valeur de

---

(¹) Les Éphémérides ne donnent que la longitude du nœud *ascendant* ☊; le nœud *descendant* ☋ se trouve à 180° du premier.

l'heure du passage obtenu par la dernière approximation ne différât pas de la précédente. Nous allons présenter une application de la formule ci-dessus à la détermination de l'heure du passage de la Lune au méridien de Paris, le 10 octobre 1875, en nous en tenant à la première approximation, ce qui est bien suffisant pour l'objet que nous avons en vue.

On a pour cette date

$$\mu = 50^{\text{m}}25^{\text{s}},20,$$
$$\mu' = 3^{\text{m}}56^{\text{s}},56,$$

d'où

$$24^{\text{h}} + \mu' - \mu = 23^{\text{h}}13^{\text{m}}31^{\text{s}},36;$$

puis

	h m s
$\mathcal{A}_{\text{☾}}$ à midi moyen	21.31.54,33
$\mathcal{A}_{\odot}$ moyen ou temps sidéral à midi moyen	13.14.42,32
$\mathcal{A}_{\text{☾}} - \mathcal{A}_{\odot}$	8.17.12,01

et opérant par logarithmes

$\log \mathcal{A}_{\text{☾}} - \mathcal{A}_{\odot}$	4,4746824
$\log 24^{\text{h}}$	4,9365137
$-\log 24^{\text{h}} + \mu' - \mu$	−4,9222652
$\log t$	4,4889309

$$t = 30827^{\text{s}} = 8^{\text{h}}33^{\text{m}}47^{\text{s}} = 8^{\text{h}},34^{\text{m}}.$$

C'est le nombre donné dans la *Connaissance des Temps*.

Nous avons supposé jusqu'ici que le Soleil passait au méridien avant la Lune ou que $\mathcal{A}_{\text{☾}} > \mathcal{A}_{\odot}$. Si $\mathcal{A}_{\text{☾}} < \mathcal{A}_{\odot}$, la valeur de t serait négative et le passage de la Lune aurait lieu après minuit, c'est-à-dire à une heure du lendemain matin marquée par le complément de t à 12^{h}.

IV. — Parallaxe horizontale équatoriale de la Lune.

La parallaxe horizontale équatoriale de la Lune est l'angle sous lequel, du centre de cet astre, on verrait le rayon équatorial de la Terre, la Lune étant à l'horizon. Comme cet arc varie rapidement dans un court intervalle de temps, ce qui résulte de l'inégalité des rayons vecteurs lunaires, et par suite de l'excentricité de l'orbe lunaire, il a été nécessaire de donner cette parallaxe de

12^h en 12^h ou pour les midi et minuit de chaque jour. Ce sont ces arcs que l'on trouve tout calculés dans la *Connaissance des Temps,* aux pages 47 et suivantes. On les tire des Tables astronomiques lunaires, et on les obtient facilement pour les heures intermédiaires à l'aide de l'interpolation.

Quand l'astre est au périgée de son orbite, le rayon vecteur lunaire est le plus court; la parallaxe horizontale est alors égale à 61′30″. A l'apogée, où ce rayon est le plus long, on a trouvé 53′53″; enfin à la distance moyenne, on a 57′3″.

Lorsqu'on a une Table des valeurs de la parallaxe pour tous les jours de l'année, rien n'est plus facile que de déterminer la date des jours où la Lune devient *apogée* ou *périgée;* car tout se réduit à trouver les dates où ces valeurs deviennent maxima et minima. On trouve, par exemple, que la Lune est apogée le 1er janvier 1875, qu'elle est périgée le 16 janvier, et ainsi de suite. Ce sont ces nombres que l'on donne dans la *Connaissance des Temps,* au bas de la page 40.

V. — Demi-diamètre de la Lune.

Le demi-diamètre, tel qu'il est donné dans la *Connaissance des Temps,* est l'angle sous lequel, du centre de la Terre, on verrait le rayon horizontal de la Lune. L'angle ainsi défini dépend de la distance de la Lune à la Terre, et est lié à la parallaxe horizontale de la Lune par une relation bien facile à déterminer. En effet, si l'on désigne par R le rayon de la Lune, par D son demi-diamètre apparent et par δ sa distance à la Terre, on a

$$R = \delta \sin D.$$

Mais, en appelant H la parallaxe horizontale de la Lune et r le rayon terrestre, on a aussi

$$\sin H = \frac{r}{\delta}.$$

Par l'élimination de δ, on a donc

$$\sin D = \frac{R}{r} \sin H,$$

ou, parce que les arcs H et D sont très petits (H atteint à peine

$61'30''$ et D n'excède jamais $17'$),

$$D = \frac{R}{r}H.$$

Le rayon R de la Lune est à peu près les $\frac{3}{11}$ de celui de la Terre, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{R}{r} = 0,27295.$$

On peut donc écrire

$$D = 0,27295H, \quad \log\frac{R}{r} = 3,513351.$$

C'est la relation cherchée entre D et H. On peut voir dans les éléments d'Astronomie comment se calcule l'effet produit par la réfraction sur le demi-diamètre, ainsi que la correction que l'on doit faire subir au demi-diamètre horizontal, pour obtenir celui qui se rapporte à un point quelconque de la surface du globe. Il existe d'ailleurs des Tables qui permettent d'apprécier facilement ces sortes de corrections.

Comme application de la formule qui précède, proposons-nous de calculer le demi-diamètre de la Lune qui se rapporte au 27 juin 1877 à 4^h, temps vrai de Paris, sachant que pour cette date $H = 54'21'',0$. On a

$$\begin{aligned} \log \text{nombre const} &= 9,436083 \\ \log H &= 3,513351 \\ \hline \log D &= 2,949434 \end{aligned}$$

d'où

$$D = 14'50'',0.$$

On trouvera à la fin de l'Ouvrage une Table qui dispense du calcul précédent.

VI. — Lever et coucher du centre de la Lune.

Les instants de ces phénomènes sont donnés dans la *Connaissance des Temps* pour tous les jours de l'année, et sont exprimés en temps moyen civil de Paris. On les obtient par un calcul semblable à celui que nous avons fait, au Chapitre II, pour le Soleil, en tenant compte toutefois de la parallaxe, élément que nous avons pu négliger jusqu'ici à cause de sa petitesse, mais auquel il est absolument nécessaire d'avoir égard dans le cas de la Lune, car sa valeur peut atteindre 61′30″. En désignant par L la latitude de Paris, par $\mathcal{D}$ la déclinaison du Soleil à l'instant du phénomène, on a donc pour calculer l'arc semi-diurne D ou le temps que la Lune met à aller de l'horizon au méridien, et réciproquement,

$$\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{D} = \frac{\sqrt{\sin(\mu - \mathcal{D})\sin(\mu - \mathrm{L})}}{\cos\mathrm{L}\cos\mathcal{D}},$$

en posant

$$\mathrm{Z}a + \mathcal{D} + \mathrm{L} = 2\mu \quad \text{et} \quad \mathrm{Z}a = 90^\circ + (\text{réfract.} - \text{parall.}).$$

Nous prendrons pour la réfraction sa valeur moyenne qui est égale à 33′45″; et quant à la parallaxe, il faudra employer celle qui convient à la latitude L du lieu, ce qui se fera, comme on l'a dit page 43, en retranchant de la parallaxe horizontale équatoriale, calculée pour l'heure vraie du phénomène, la quantité $p - ap\sin^2\mathrm{L}$, que l'on trouve toute calculée pour Paris dans la *Connaissance des Temps,* à la page 512, quantité qui est donnée dans les trois hypothèses de l'aplatissement a, et pour les différentes valeurs de la parallaxe équatoriale. Soit alors D la valeur de l'arc semi-diurne ainsi obtenu, et $\mathcal{A}_{☾}$ l'ascension droite de la Lune, on aura pour l'heure sidérale du coucher de cet astre

$$\mathcal{A}_{☾} + \mathrm{D},$$

et pour l'heure de son lever

$$\mathcal{A}_{☾} - \mathrm{D};$$

de là il sera facile de conclure l'heure moyenne du phénomène, telle que la donne la *Connaissance des Temps,* heure qu'il faudra corriger ensuite, comme nous l'avons expliqué page 95, par des approximations successives, si l'on veut obtenir un plus grand degré de précision.

VII. — Phases de la Lune.

Lorsqu'on a une Table des longitudes du Soleil et de la Lune pour des intervalles de temps assez rapprochés, de douze heures en douze heures par exemple, il est bien facile de déterminer les instants de ces phénomènes, qui sont ceux où la différence des longitudes du Soleil et de la Lune atteint les valeurs 0°, 90°, 180°, 270°.

En effet, soit ζ une quelconque de ces valeurs, désignons par $\mathcal{L}_{\odot}$ et $\mathcal{L}_{☾}$ les longitudes du Soleil et de la Lune à l'époque t qui précède immédiatement, dans les Tables, l'instant τ où la différence des longitudes $\mathcal{L}_{☾}$ et $\mathcal{L}_{\odot}$ devient égale à ζ, et soient d'ailleurs μ et μ' les mouvements horaires en longitude de ces deux astres. Lorsque t sera devenu τ, la différence $\mathcal{L}_{☾} - \mathcal{L}_{\odot}$ aura augmenté de $(\mu - \mu')(\tau - t)$; et comme à l'instant t cette différence devient égale à ζ, on a

$$\mathcal{L}_{☾} - \mathcal{L}_{\odot} + (\mu - \mu')(\tau - t) = \zeta,$$

d'où

$$\tau = \frac{t + \zeta + \mathcal{L}_{☾} - \mathcal{L}_{\odot}}{\mu - \mu'}.$$

On peut prendre pour l'époque t le midi ou le minuit qui précède l'instant cherché τ, instant déterminé par la condition $\mathcal{L}_{☾} - \mathcal{L}_{\odot} < \zeta$, $\mathcal{L}_{☾} - \mathcal{L}_{\odot} > \zeta$. En remplaçant dans cette formule ζ successivement par 0°, 90°, 180° et 270°, on obtiendra les valeurs de τ correspondant respectivement à la néoménie, au premier quartier, à la pleine Lune et au dernier quartier.

La valeur de τ ainsi déterminée n'est qu'approchée, car elle suppose que, dans l'intervalle $t - \tau$, le mouvement lunaire en ascension droite n'a pas varié, ce qui est inexact. Cette approximation est bien suffisante pour la prédiction des phases lunaires telles que les donnent la *Connaissance des Temps* et le *Nautical Almanac,* qui s'en tiennent aux secondes rondes. Cependant, si l'on voulait une plus grande précision, comme cela est nécessaire, par exemple, dans le calcul des éclipses, voici comment on devrait opérer. On calculerait pour l'heure τ, fournie par cette première approximation, les longitudes du Soleil et de la Lune, en tenant compte des différences secondes, troisièmes, quatrièmes et cinquièmes. Soient alors $\mathcal{L}'_{☾}$ et $\mathcal{L}'_{\odot}$ les longitudes du Soleil et de la Lune ainsi calculées. S'il arrivait que la différence $\mathcal{L}'_{☾} - \mathcal{L}'_{\odot}$ fût précisément égale à ζ, on en conclurait que l'heure τ, pour laquelle on a déterminé ces longitudes, est bien celle qui convient à la phase proposée, et le calcul ne serait pas susceptible d'une plus grande rigueur. Mais si $\mathcal{L}'_{☾} - \mathcal{L}'_{\odot}$ différait de ζ d'une quantité que nous représenterons par ε, alors il faudrait déterminer le temps x capable de produire cet excès ε, ce que l'on obtiendrait aisément, en admettant que si, dans une heure de temps, la différence en longitude des deux astres est $\mu - \mu'$, en x temps elle est ε; et il en résulterait la correction $\frac{1^{\text{h}}}{\mu - \mu'}\varepsilon$, que l'on ajouterait à τ. En répétant les mêmes raisonnements et les mêmes calculs, on finirait par tomber sur une valeur de l'heure, qui ne différerait pas de celle précédemment obtenue, laquelle serait alors l'heure exacte du phénomène, car la différence des longitudes serait précisément égale à la valeur de ζ que l'on aurait choisie.

VIII. — Des lieux lunaires.

Le lieu de la Lune, à un instant donné, s'obtient par un procédé analogue à celui que nous avons suivi lorsqu'il s'est agi du Soleil et des planètes. On suppose à la Lune un mouvement circulaire et uniforme, ce qui donne le *mouvement moyen*, et détermine une position approchée de l'astre, que l'on corrige ensuite des inégalités désignées sous le nom d'*équation du centre*, de *variation*, d'*évection*, d'*équation annuelle*, de *variation séculaire* et de celles, beaucoup plus faibles, dont nous avons parlé au § I, et que nous comprendrons ici sous le nom de *perturbations*. On a donc, pour l'expression de la longitude *vraie* de la Lune,

longitude vraie ☾ = longitude moyenne
+ équation séculaire
+ équation du centre
+ variation
+ évection
+ équation annuelle
+ perturbations.

Ces différents termes, ainsi que ceux qui conviennent à la latitude et à la parallaxe, se tirent tous des Tables lunaires de Hansen; mais, comme les calculs qui les donnent sont beaucoup trop étendus pour trouver place dans ce paragraphe, nous renverrons le lecteur désireux de les connaître à l'explication qui accompagne ces Tables.

IX. — Ascension droite et déclinaison de la Lune.

Les ascensions droites et déclinaisons de la Lune sont données actuellement, dans la *Connaissance des Temps,* pour tous les jours de l'année, et pour chaque heure de temps moyen de Paris. Les ascensions droites sont toujours croissantes de 0° à 360° et positives. Quant aux déclinaisons, elles sont boréales ou australes, c'est-à-dire positives ou négatives, selon que la Lune se trouve située au-dessus ou au-dessous de l'équateur. Les ascensions droites sont toujours comptées de l'équinoxe apparent.

Après avoir déduit des longitudes et latitudes, déterminées comme nous venons de le dire dans le précédent paragraphe, l'ascension droite et la déclinaison de la Lune pour midi et minuit moyen ou de douze heures en douze heures, on les a obtenues pour chaque heure moyenne du jour par interpolation, en tenant compte des différences secondes, troisièmes, quatrièmes, cinquièmes et sixièmes. Avec les ascensions droites et les déclinaisons de la Lune ainsi calculées, et à l'aide des variations pour une minute que l'on trouve inscrites en regard de chaque heure, rien n'est plus facile que d'obtenir l'ascension droite et la déclinaison pour une heure intermédiaire.

En effet, supposons, par exemple, qu'on demande l'ascension droite de la Lune, le 7 janvier 1876 à $6^h 35^m 24^s$, temps moyen de Paris.

En consultant la *Connaissance des Temps* de 1876, on trouve que l'ascension droite de la Lune le 7 janvier à 6^h est de $3^h 36^m 11^s,13$ et que sa variation pour une minute à cette même heure est $2^s,5609$. On a donc

	h m s
Ascension droite ☾ à 6^h........................	3.36.11,13
Accroissement en $35^m 24^s = 35,4 \times 2^s,5609$.......	1.30,66
	3.37.41,79

Ce calcul n'est qu'approché; et pour avoir rigoureusement l'ascension droite, il faut chercher la variation par minute qui correspond à l'époque intermédiaire

$$\frac{6^h + 6^h 35^m,4}{2} = 6^h + \frac{35,4}{2}.$$

Or on a

	s
Variation pour une minute en 6^h.........	2,5609
Variation pour une minute en 7^h.........	2,5701
Variation en 1^h..................	+0,0092

La variation pour une minute en $6^h 35^m,4$ est alors

$$2^s,5609 + \left(\frac{0,0092}{60} \times \frac{35,4}{2}\right) = 2,5609 + 0,0027 = 2,5636,$$

d'où

	h m s
Ascension droite ☾ à 6^h........................	3.36.11,13
Variation $= 35,4 \times 2,5636$....................	1.30,75
Ascension droite ☾ à $6^h 35^m,24$...........	3.37.41,88

Soit encore proposé de trouver la déclinaison de la Lune, le 28 mars 1876, à $8^h 25^m 35^s$, temps moyen de Paris.

Le 28 mars à 8^h, on a pour la déclinaison de la Lune

$$+20^\circ 47' 7'',9,$$

et pour sa variation en une minute $+12'',346$; on a donc

	° ′ ″
Déclinaison ☾ à 8^h..........................	+20.47. 7,9
Accroissement en $25^m 31^s = +25^m,502 \times 12'',346$.	+5.14,8
Déclinaison ☾ à $8^h 25^m 31^s$...............	+20.52.22,7

Pour tenir compte des différences secondes, on a ensuite

	s
Variation pour une minute à 8^h..........	12,346
Variation pour une minute à 9^h..........	+ 12,224
	— 0,122

La variation moyenne correspondante à $\frac{8^h + 8^h 25^m 31^s}{2}$ est donc

$$+12'',346 - \left(\frac{0'',122}{60} \times \frac{25^m,502}{2}\right) = 12'',320,$$

en sorte que

	° ′ ″
Déclinaison à 8^h..............................	+20.47. 7,9
Variations $= +25^m,502 \times 12^s,3200$............	+5.14,2
Déclinaison ☾ à $8^h 25^m 31^s$...............	+20.52.22,1

La déclinaison de la Lune est utile pour obtenir la latitude géographique par l'observation de la hauteur méridienne de cet astre. L'ascension droite peut servir à déterminer la différence de longitude entre deux lieux où l'on a observé un grand nombre de passages de la Lune au méridien, ou bien le passage de la Lune et de quelques étoiles voisines.

CHAPITRE V.

CALCUL DES POSITIONS APPARENTES DES ÉTOILES.

I. — Formules de réduction.

Les Catalogues d'étoiles ne font connaître que les ascensions droites et déclinaisons *moyennes,* c'est-à-dire celles qui s'observeraient sans l'aberration et la nutation. Pour passer de ces positions moyennes, rapportées ordinairement au 1^{er} janvier de l'année pour laquelle le Catalogue a été construit, à celles *apparentes* et relatives à une autre époque, il faut d'une part évaluer le mouvement de précession en ascension droite et en déclinaison pour le temps écoulé depuis l'époque du Catalogue jusqu'à celle que l'on considère, et d'autre part tenir compte des effets de la nutation et de l'aberration, comme nous l'avons expliqué aux Chapitres IV et V de la première Partie. Il suit de là qu'en désignant par $\mathcal{A}_m$ et $\mathcal{D}_m$ les ascension droite et déclinaison moyennes d'une étoile, au commencement d'une certaine année; par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ les ascension droite et déclinaison apparentes, rapportées au temps t, compté à partir de la même année, et exprimé en fractions de l'année; enfin par μ et μ' les mouvements propres de l'astre en ascension droite et en déclinaison, on a pour les coordonnées apparentes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$, à l'époque que l'on considère,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A} = \mathcal{A}_m &+ (m + n \sin\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D})\,t + t\mu \\ &+ (\cos\omega + \sin\omega \operatorname{tang}\mathcal{D} \sin\mathcal{A})\,\Delta\mathcal{L} - \operatorname{tang}\mathcal{D} \cos\mathcal{A}\,\Delta\omega \\ &- 20'',445\,(\sin\mathcal{A} \sin\odot + \cos\omega \cos\mathcal{A} \cos\odot) \sec\mathcal{D}; \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{D} = \mathcal{D}_m &+ tn \cos\mathcal{A} + t\mu' \\ &+ \sin\omega \cos\mathcal{A}\,\Delta\mathcal{L} + \sin\mathcal{A}\,\Delta\omega \\ &- 20'',445 \sin\odot \cos\mathcal{A} \sin\mathcal{D} \\ &- (20'',445 \sin\omega \cos\mathcal{D} - \cos\omega \sin\mathcal{D} \sin\mathcal{A}) \cos\odot; \end{aligned}\right.$$

ω, $\Delta\mathcal{L}$, $\Delta\omega$ doivent dans ces formules être remplacés par leurs valeurs à cette époque. On trouve, par exemple, qu'en 1800 (p. 110)

$$\omega = 23^\circ 27' 54'',2,$$

$$\Delta\omega = +9'',2231 \cos \text{☊} - 0'',0897 \cos 2\text{☊} + 0''.0886 \cos 2\text{☾} + 0'',5510 \cos 2\odot,$$

$$\Delta\mathcal{L} = -17'',2405 \sin \text{☊} + 0'',2073 \sin 2\text{☊} - 0'',2041 \sin 2\text{☾} - 1'',2694 \sin 2\odot,$$

et qu'en 1900

$$\omega = 23^\circ 27' 6'',6,$$

$$\Delta\omega = +9'',2240 \cos \text{☊} - 0'',0896 \cos 2\text{☊} + 0'',0885 \cos 2\text{☾} + 0'',5507 \cos 2\odot,$$

$$\Delta\mathcal{L} = -17'',2577 \sin \text{☊} + 0'',2073 \sin 2\text{☊} - 0'',2041 \sin 2\text{☾} - 1'',2695 \sin 2\odot,$$

valeurs très peu différentes, comme on voit, l'une de l'autre.

Maintenant, si l'on fait

$$\sin\omega = kn, \quad \cos\omega = h + km,$$

d'où

$$k = \frac{\sin\omega}{n}, \quad h = \cos\omega - \frac{m}{n}\sin\omega, \tag{3}$$

on aura

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A} = {} & \mathcal{A}_m + h\Delta\mathcal{L} + t\mu + (t + k\Delta\mathcal{L})(m + n \operatorname{tang}\mathcal{D} \sin\mathcal{A}) \\ & - \Delta\omega \operatorname{tang}\mathcal{D} \cos\mathcal{A} \\ & - 20'',445 \sin\odot \operatorname{séc}\mathcal{D} \sin\mathcal{A} \\ & - 20'',445 \cos\omega \cos\odot \operatorname{séc}\mathcal{D} \cos\mathcal{A}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{D} = {} & \mathcal{D}_m + t\mu' + (t + k\Delta\mathcal{L})\, n \cos\mathcal{A} + \Delta\omega \sin\mathcal{A} \\ & - 20'',445 \sin\odot \cos\mathcal{A} \sin\mathcal{D} \\ & - 20'',445 \cos\omega \cos\odot (\operatorname{tang}\omega \cos\mathcal{D} - \sin\mathcal{D} \cos\mathcal{A}), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

et si, de plus, on pose

$$\left\{\begin{aligned} A &= -20'',445 \cos\omega \cos\odot, \\ B &= -20'',445 \sin\odot, \\ C &= t + k\Delta\mathcal{L}, \\ D &= -\Delta\omega, \\ E &= h\Delta\mathcal{L}; \end{aligned}\right. \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned} a &= \cos\mathcal{A} \operatorname{séc}\mathcal{D}, \\ b &= \sin\mathcal{A} \operatorname{séc}\mathcal{D}, \\ c &= m + n \operatorname{tang}\mathcal{D} \sin\mathcal{A}, \\ d &= \cos\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D}, \\ a' &= \operatorname{tang}\omega \cos\mathcal{D} - \sin\mathcal{A} \sin\mathcal{D}, \\ b' &= \cos\mathcal{A} \sin\mathcal{D}, \\ c' &= n \cos\mathcal{A}, \\ d' &= -\sin\mathcal{A}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

on obtiendra, en négligeant le petit terme $h\Delta\mathcal{L}$, qui est insensible,

$$(\mathrm{A})\qquad\left\{\begin{aligned}(\text{en arc})\ \mathcal{A} &= \mathcal{A}_m + \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \mathrm{D}d + t\mu,\\ \mathcal{D} &= \mathcal{D}_m + \mathrm{A}a' + \mathrm{B}b' + \mathrm{C}c' + \mathrm{D}d' + t\mu'.\end{aligned}\right.$$

Ce sont les formules dont se servent les calculateurs de la *Connaissance des Temps* pour passer des positions moyennes aux positions apparentes, telles qu'on les donne dans ces Éphémérides pour les 300 étoiles qui s'y trouvent inscrites. Les quantités a, b, c, d, a', b', c', d' varient d'une étoile à l'autre, mais restent sensiblement les mêmes pour une même étoile ; A, B, C, D, au contraire, sont des facteurs communs à toutes les étoiles et varient rapidement avec le temps. Les logarithmes de ces nombres, calculés pour tous les jours de l'année à *minuit moyen,* sont donnés dans la *Connaissance des Temps,* aux pages 225 et suivantes. On a omis, dans leur calcul, les termes en 2☾ qui, à cause de leurs petitesses et de la brièveté de leurs périodes, ne sauraient en effet rien produire de sensible.

II. — Transformation du Nautical almanac.

On peut mettre les formules (A) sous une forme qui dispense du calcul pénible des constantes a, b, c, d, a', b', c', d'. En effet, si l'on pose

$$(1)\qquad\left\{\begin{aligned}\mathrm{A} &= h\sin\mathrm{H}, & \mathrm{B} &= h\cos\mathrm{H}, & i &= \mathrm{A}\,\mathrm{tang}\,\omega,\\ n\mathrm{C} &= g\cos\mathrm{G}, & \mathrm{D} &= g\sin\mathrm{G}, & f &= m\mathrm{C},\end{aligned}\right.$$

puis qu'on substitue ces valeurs dans les expressions précédentes de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$, il n'est pas difficile de voir qu'on aura, en négligeant toujours le petit terme E,

$$(2)\qquad\left\{\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathcal{A}_m + f + g\,\mathrm{tang}\,\mathcal{D}\sin(\mathrm{G} + \mathcal{A})\\ &\qquad + h\,\mathrm{s\acute{e}c}\,\mathcal{D}\sin(\mathrm{H} + \mathcal{A}) + t\mu),\\ \mathcal{D} &= \mathcal{D}_m + i\cos\mathcal{D} + g\cos(\mathrm{G} + \mathcal{A})\\ &\qquad + h\sin\mathcal{D}\cos(\mathrm{H} + \mathcal{A}) + t\mu'.\end{aligned}\right.$$

Quant aux nombres f, g, h, G, H et i qui figurent dans ces formules, on en trouve les valeurs toutes calculées de jour en jour et pour minuit moyen dans le *Nautical Almanac* et dans la *Connaissance des Temps.*

Voici une application des formules qui précèdent au calcul des corrections $\Delta\mathcal{A}_m = \mathcal{A} - \mathcal{A}_m$ et $\Delta\mathcal{D}_m = \mathcal{D} - \mathcal{D}_m$ qui se rapportent à γ Orion, à minuit moyen de Greenwich et pour le 10 juillet 1879.

On a

	h m s		° ′ ″
$\mathcal{A}_m$, janv. 1, 1850.....	5.17. 5,33	$\mathcal{D}_m$..................	+6.12.34,3
Vingt-neuf années (précession et mouvement propre)............	+1.33,39	Vingt-neuf années (précession et mouvement propre)............	+1.45,9
$\mathcal{A}_m$ janv. 1, 1879...	5.18.38,72	$\mathcal{D}_m$, janv. 1, 1879..	+6.14.20,2

Le *Nautical Almanac* donne pour l'époque proposée

$$f = +38'',96,\quad \log g = 1,2385+,\qquad G = 348^\circ 12',$$
$$\log h = 1,3072+,\qquad H = 163^\circ,8',\qquad \log i = 0,4072+;$$

ainsi

$$G + \mathcal{A}_m(\text{en arc}) = 67^\circ,52',\quad H + \mathcal{A}_m(\text{en arc}) = 242^\circ,48',$$

f...... +38″,96

$\log g$............	1,2385		
$\log\sin(G+\mathcal{A}_m)$...	9,9668	$\log g$.............	1,2385
$\log\text{tang}\,\mathcal{D}_m$.......	9,0387	$\log\cos(G+\mathcal{A}_m)$...	9,5761
	0,2440 + 1″,75		0,8146 + 6″,53
$\log h$.............	1,3072	$\log h$.............	1,3072
$\log\sin(H+\mathcal{A}_m)$...	9,9491 —	$\log\cos(H+\mathcal{A}_m)$...	9,6600 —
$\log\text{séc}\,\mathcal{D}_m$........	0,0026	$\log\sin\mathcal{D}_m$.........	9,0361
	1,2589 — 18″,15		0,0033 — 1″,01
		$\log i$..............	0,4072
$t\mu$......	+ 0,09	$\log\cos\mathcal{D}_m$.........	9,9974
$\Delta\mathcal{A}_m$(en arc)...	+22″,65		0,4046 + 2″,54
$\Delta\mathcal{A}_m$(en temps).	+ 1ˢ,510	$t\mu$..............	—0″,01
		$\Delta\mathcal{D}_m$............	+8″,05

$$\mathcal{A}_m \text{ de } \gamma \text{ Orion} = 5^h 18^m 38^s,72 + 1^s,51 = 5^h 18^m 40^s,23,$$
$$\mathcal{D}_m = +6^\circ 14' 20'',2 + 8'',05 = 6^\circ 14' 28'',3.$$

III. — Détermination numérique des éléments qui entrent dans les formules précédentes.

Ces éléments sont les suivants :

- t, temps écoulé depuis le commencement de l'année;
- $\odot$, longitude vraie du Soleil;
- Ω, longitude du nœud de la Lune;
- $\Delta\mathfrak{L}$, nutation luni-solaire de la longitude;
- $\Delta\omega$, nutation luni-solaire de l'obliquité;
- ω, obliquité moyenne de l'écliptique;
- h et k, deux quantités auxiliaires.

Si, comme il y a avantage à le faire toutes les fois qu'on a à évaluer un intervalle de temps considérable, on prend pour durée de la révolution solaire l'année *tropique,* en fixant, suivant l'usage, son origine au moment où la longitude moyenne du Soleil atteint $280°$ ou, ce qui revient au même, au moment où son ascension droite devient égale à $18^h 40^m$, on voit qu'il s'agira, tout d'abord, de rapporter le temps t au commencement de l'année ainsi définie, année qui se compose, comme on sait, de $365^j,24222$, jours moyens.

Or, en désignant par $\mathfrak{J}$ le nombre de jours écoulés depuis le commencement de l'année ordinaire 1800,0, jusqu'à l'époque que l'on considère, et par T le nombre d'années renfermées dans $\mathfrak{J}$, on a, d'après Bessel, pour l'expression de la longitude moyenne $\mathfrak{L}$ du Soleil,

$$(1) \qquad \mathfrak{L} = 279°54'1'' + (59'8'',3302)\,\mathfrak{J} + 0'',000122\,\mathrm{T}^2.$$

Maintenant, si $\mathfrak{J}_\mathrm{T}$ est le nombre de jours moyens écoulés depuis le commencement de l'année ordinaire 1800,0 jusqu'au commencement de l'année tropique $1800 + \mathrm{T}$, et qu'on pose

$$\mathfrak{L} = 280° + 360°\mathrm{T},$$

puis qu'on remarque que $\mathfrak{J}_\mathrm{T} = \mathfrak{J}$, on aura

$$\mathfrak{J}_\mathrm{T} = \frac{5'59'' + 360°\mathrm{T} - 0'',000112\,\mathrm{T}^2}{59'8'',3302},$$

ou bien, en remplaçant le dénominateur par le quotient $\dfrac{360°}{365,24222}$, et effectuant les divisions,

$$\mathfrak{J}_T = 0^j,101 + 365^j,24222\,T - 0^j,000000032\,T^2.$$

D'ailleurs, $\mathfrak{N}$ étant le nombre d'années bissextiles comprises entre 1800,0 et 1800 + T, on a, pour le nombre de jours $\mathfrak{T}_T$ écoulés depuis le commencement de l'année ordinaire 1800,0 jusqu'au commencement de l'année ordinaire 1800 + T,

$$\mathfrak{T}_T = 365\,T + \mathfrak{N}.$$

Le temps τ_0 écoulé depuis le commencement de l'année tropique 1880 + T jusqu'au commencement de l'année ordinaire 1800 + T est évidemment la différence $\mathfrak{T}_T - \mathfrak{J}_T$ des deux expressions précédentes, en sorte que

$$(2) \qquad \tau_0 = \mathfrak{T}_T - 0^j,101 - 0^j,24222\,T + 0^j,000000032\,T^2.$$

Pour rapporter à l'année tropique, une certaine époque comptée du commencement de l'année ordinaire, et donnée par le nombre j de jours solaires moyens écoulés depuis le commencement de cette année, on aura donc, pour le temps τ écoulé depuis le commencement de l'année tropique,

$$(3) \qquad \tau = \tau_0 + j.$$

Le calcul de cette formule est facilité par les Tables VI et VII que nous donnons à la fin de l'Ouvrage; la Table VI fait connaître la valeur de τ_0 pour les années comprises entre 1870 et 1900; la Table VII donne les valeurs de j.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de déterminer la valeur de τ qui correspond au 18 août 1879.

On trouve

Table VI .... $\tau_0 = -0^j,236$
Table VII .... $j = 230$

par suite, on a

$$\tau = 229^j,764.$$

L'élément τ une fois déterminé, on en conclut la longitude vraie $\odot$ du Soleil à l'aide des Tables de cet astre et pour la longitude moyenne,

$$\mathcal{L} = 280^\circ + (59'8'',3302)\tau.$$

Quant à la longitude du nœud ascendant ☊ de la Lune, elle est fournie par l'expression

$$\text{☊} = 33^\circ 15' 26'',9 - (19^\circ 20' 29'',53)\,t \text{ (}^1\text{)},$$

t étant rapporté à la durée de l'année tropique et compté à partir de 1800,0.

La Table VI fait connaître en outre la valeur de ☊ pour le commencement de chaque année tropique; et on l'obtient pour une autre époque de l'année, au moyen du mouvement diurne de la Lune égal à $-3'10'',6394$, élément que l'on trouve fractionné de dix en dix jours, dans la Table VII.

Si l'on demandait, par exemple, le lieu du nœud ascendant de la Lune pour le 18 août 1879, temps moyen de Paris, on aurait

$$\tau = 229^{\text{j}},764,$$

Table I, ☊ au commencement de 1879.	$305^\circ.16'.33''$
Table II, mouvement en 230^{j}........	$-12.12.42$
Mouvement en $0^{\text{j}},236$.......	$+45$
☊........................	$293.\ 4.36$

Il nous reste encore à obtenir les valeurs numériques des quantités désignées par $\Delta\mathcal{L}$, $\Delta\omega$, ω, h et k. Or on a, pour les deux premières valeurs,

$$\Delta\mathcal{L} = -17'',2526 \sin \text{☊} + 0'',2073 \sin 2\text{☊} - 1'',2692 \sin 2\odot - 0'',2041 \sin 2\text{☾},$$
$$\Delta\omega = \quad 9'',2236 \cos \text{☊} - 0'',0897 \cos 2\text{☊} + 0'',0886 \cos 2\text{☾} + 0'',5509 \cos 2\odot.$$

On a ensuite

$$\omega = 23^\circ 27' 54'',8 - 0'',476\,t,$$

t étant toujours rapporté à l'année tropique et compté à partir de

---

(¹) Dans cette formule, $33^\circ 15' 26'',9$ représente la valeur de la longitude à l'origine de 1800, et $19^\circ 20' 29'',53$ le moyen mouvement du nœud ascendant de la Lune pendant une année tropique; on y a négligé la variation de l'année tropique, qui ne saurait, en effet, rien produire de sensible.

1800,0. Comme, d'ailleurs,

$$\left.\begin{aligned} m &= 46'',02824 + 0'',0003086450\,t \\ n &= 20'',06442 - 0'',0000970204\,t \end{aligned}\right\} \text{en } 1750,$$

$$\left.\begin{aligned} m &= 46'',06010 + 0'',00028373\,t \\ n &= 20'',05240 - 0'',00008663\,t \end{aligned}\right\} \text{en } 1850,$$

on en conclut

Pour 1750 . .. $\log k = 8,29785$, $\log h = 7,5241$

Pour 1850 . .. $\log k = 8,29782$, $\log h = 7,4692$

CHAPITRE VI.

CALCUL DES DISTANCES LUNAIRES.

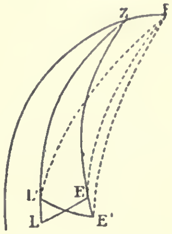
I. — Équation fondamentale.

La méthode des distances lunaires étant celle qui est généralement adoptée par les navigateurs pour la détermination des longitudes en mer, la *Connaissance des Temps* donne ces éléments pour tous les jours de l'année, et de trois heures en trois heures temps moyen de Paris. On les obtient facilement pour les heures intermédiaires au moyen de l'interpolation, comme il est dit aux pages 709 et 710 de nos *Éphémérides*. Ces distances représentent les arcs qui vont du centre de la Lune au centre du Soleil, des planètes et des étoiles, et sont telles qu'on les verrait du centre de la Lune, s'il n'y avait pas d'atmosphère, c'est-à-dire exemptes de la réfraction et de la parallaxe. Les étoiles qu'on est convenu de faire servir à cette détermination sont : 1° Aldébaran ; 2° α Bélier ; 3° α Pégase ; 4° Antarès ; 5° Pollux ; 6° Régulus ; 7° α Vierge ; 8° Altaïr et 9° Fomalhaut. On a eu soin de les choisir parmi les plus brillántes et les plus près de l'écliptique, afin que l'observation en fût plus facile. Mars, Vénus, Jupiter et Saturne sont les seules planètes employées. Les lettres E (Est), O (Ouest), que l'on voit placées en regard du nom de ces astres, servent à indiquer la position qu'ils occupent dans le ciel par rapport à la Lune. Voici comment s'obtiennent les arcs de distances vraies dont nous parlons.

Soient L′ (*fig.* 23) le centre de la Lune ou son lieu vrai, E′ celui d'un autre astre (Soleil, planète ou étoile), et P le pôle de l'équateur ou de l'écliptique, suivant que l'on convient de rapporter la position des astres à l'équateur ou à l'écliptique. Dans le triangle ainsi formé PL′E′, on connaît, outre l'angle P, différence des ascensions droites ou des longitudes, les deux côtés adjacents

$PL' = \mathfrak{D}$, $PE' = \mathfrak{D}'$, qui sont les compléments des déclinaisons ou des latitudes et que les Tables déterminent. Il est donc bien facile d'en conclure le côté $L'E' = \Delta$, ou la *distance vraie* cherchée. En effet, l'équation fondamentale de la Trigonométrie sphérique appliquée au triangle $PL'E'$ donne

Fig. 23.



$$\cos\Delta = \cos\mathfrak{D}\cos\mathfrak{D}' + \sin\mathfrak{D}\sin\mathfrak{D}'\cos P,$$

c'est-à-dire

$$\cos\Delta = \cos\mathfrak{D}\cos\mathfrak{D}'(1 + \operatorname{tang}\mathfrak{D}\operatorname{tang}\mathfrak{D}'\cos P);$$

et si, pour mettre cette équation sous une forme plus commode, on pose

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\mathfrak{D}\cos P, \tag{1}$$

on obtient

$$\cos\Delta = \cos\mathfrak{D}\cos\mathfrak{D}'(1 + \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\mathfrak{D}') = \frac{\cos\mathfrak{D}\cos(\mathfrak{D}' - \varphi)}{\cos\varphi}: \tag{2}$$

c'est la formule cherchée.

On peut avec son aide calculer les arcs de distances lunaires que l'on voit inscrits aux pages 485 et suivantes de la *Connaissance des Temps* (¹). Relativement aux arcs qui se rapportent au Soleil et à la Lune, nous ferons remarquer qu'on ne les trouve dans les *Éphémérides* que pour des valeurs de l'angle P plus grandes que 34° environ et plus petites que 125° : cela tient à ce que, pen-

---

(¹) Ces calculs se trouvent un peu abrégés par l'emploi des Tables numériques construites par Farley en 1831 pour l'usage du *Nautical almanac*. Ces Tables, imprimées en 1856 sous ce titre : *Natural versed sines from* 0° *to* 125°, *etc.*, ont été offertes par l'administration du *Nautical* aux diverses *Éphémérides*.

dant les trois jours qui précèdent ou qui suivent la néoménie, la Lune n'est pas visible, et que, pendant les trois jours qui précèdent ou qui suivent la pleine Lune, le Soleil se trouve à une trop grande distance de notre satellite pour qu'il soit possible d'en mesurer la distance.

Voici une application des formules (1) et (2) à la détermination de la distance vraie des centres du Soleil et de la Lune, le 2 juin 1878, à minuit moyen de Paris. La *Connaissance des Temps* donne pour cette époque

$$\mathcal{R}_{☾} = 6^{h}25^{m}46^{s},68,\quad \mathcal{D}_{☾} = +26^{\circ}32'39'',0,$$
$$\mathcal{R}_{\odot} = 4^{h}43^{m}\ 0^{s},95,\quad \mathcal{D}_{\odot} = +22^{\circ}16'35'',5\,;$$

d'où

$$P = \mathcal{R}_{☾} - \mathcal{R}_{\odot} = 1^{h}42^{m}45^{s},73 = 25^{\circ}41'26''\,(\text{en arc}),$$
$$\mathcal{D} = 63^{\circ}27'21'',0,\quad \mathcal{D}' = 67^{\circ}43'24'',5.$$

Par suite, on a

$$\begin{array}{ll@{\qquad}ll}
\text{tang}\,\mathcal{D}\ldots\ldots & 0,3014259 & \cos\mathcal{D}\ldots\ldots & 9,6501983 \\
\cos P\ldots\ldots & \underline{9,9547963} & \cos(\mathcal{D}'-\varphi)\ldots & \underline{9,9970017} \\
\text{tang}\,\varphi\ldots\ldots & 0,2562222 & & 9,6472000 \\
\\
\mathcal{D}'\ldots\ldots & 67^{\circ}.43'.24'',50 & \cos\varphi\ldots\ldots & \underline{9,6855910} \\
\varphi\ldots\ldots & \underline{60.59.54,79} & \cos\Delta\ldots\ldots & 9,9616090 \\
\mathcal{D}'-\varphi\ldots\ldots & 6.43.29,71 & \Delta\ldots\ldots & 23^{\circ}44'17''
\end{array}$$

C'est le nombre donné dans la *Connaissance des Temps,* à la page 530.

II. — Réduction des distances apparentes en distances vraies.

Les distances lunaires, telles qu'on les observe, sont affectées de la parallaxe et de la réfraction; il faut donc les en dépouiller, pour pouvoir les comparer aux *distances vraies* que donnent nos *Éphémérides* et en conclure la longitude. La méthode que l'on emploie de préférence pour cet objet est celle de Borda. Comme ce calcul emprunte ses principales données aux *Éphémérides,* nous croyons devoir rappeler ici, en peu de mots, en quoi il consiste.

Soient δ, h, h' la distance et les hauteurs apparentes du centre des deux astres et Δ, H, H′ la distance et les hauteurs vraies de ces astres, c'est-à-dire corrigées de la réfraction et de la parallaxe. Il s'agit d'obtenir la distance vraie Δ, d'après la connaissance de la distance observée δ. Or, en considérant le triangle sphérique formé par le zénith z et les centres apparents des deux astres, on a

$$\cos z = \frac{\cos\delta - \sin h \sin h'}{\cos h \cos h'};$$

on a semblablement, en considérant les centres vrais de ces astres,

$$\cos z = \frac{\cos\Delta - \sin \mathrm{H} \sin \mathrm{H}'}{\cos \mathrm{H} \cos \mathrm{H}'}.$$

D'ailleurs,

$$\sin h \sin h' = \cos h \cos h' - \cos(h + h'),$$
$$\sin \mathrm{H} \sin \mathrm{H}' = \cos \mathrm{H} \cos \mathrm{H}' - \cos(\mathrm{H} + \mathrm{H}'),$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{\cos\delta + \cos(h + h')}{\cos h \cos h'} = \frac{\cos\Delta + \cos(\mathrm{H} + \mathrm{H}')}{\cos \mathrm{H} \cos \mathrm{H}'};$$

ainsi

$$\cos\Delta = \frac{\cos \mathrm{H} \cos \mathrm{H}'}{\cos h \cos h'}[\cos\delta + \cos(h + h') - \cos(\mathrm{H} + \mathrm{H}')].$$

Maintenant, on a

$$\cos\delta + \cos(h + h') = 2\cos\tfrac{1}{2}(h + h' + \delta)\cos\tfrac{1}{2}(h + h' - \delta),$$
$$\cos(\mathrm{H} + \mathrm{H}') = 2\cos^2\tfrac{1}{2}(\mathrm{H} + \mathrm{H}') - 1,$$
$$\cos\Delta = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta,$$

en sorte que

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = \cos^2\tfrac{1}{2}(\mathrm{H} + \mathrm{H}') - \frac{\cos\frac{1}{2}(h + h' + \delta)\cos\frac{1}{2}(h + h' - \delta)\cos \mathrm{H} \cos \mathrm{H}'}{\cos h \cos h'};$$

et si, pour abréger, l'on pose

$$(1) \qquad 2m = h + h' + \delta,$$

on obtient

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta = \cos^2\tfrac{1}{2}(\mathrm{H} + \mathrm{H}') - \frac{\cos \mathrm{H} \cos \mathrm{H}'}{\cos h \cos h'}\cos m \cos(m - \delta).$$

On rend cette équation calculable par logarithmes, en prenant un angle φ tel que

$$(2)\qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{\dfrac{\cos H \cos H'}{\cos h \cos h'}\cos m \cos(m-\delta)}}{\cos\frac{1}{2}(H+H')},$$

car il vient alors

$$(3)\qquad \sin\tfrac{1}{2}\Delta = \cos\tfrac{1}{2}(H+H')\cos\varphi.$$

C'est sur ces formules que les calculs de l'exemple rapporté dans la *Connaissance des Temps* ont été établis. Les équations (1) et (2) déterminent les arcs auxiliaires m et φ; l'équation (3) fait connaître Δ.

TROISIÈME PARTIE.

PRÉDICTION DES PHÉNOMÈNES ASTRONOMIQUES.

CHAPITRE I.

PRÉDICTION DES ÉCLIPSES ET DES CONFIGURATIONS DES SATELLITES DE JUPITER.

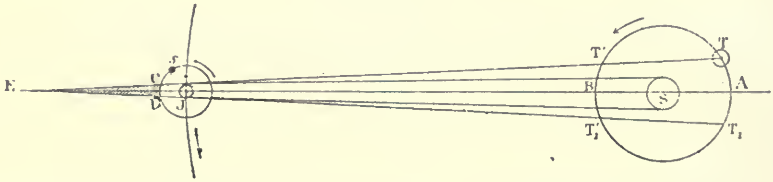
I. — Des particularités que présente le phénomène des éclipses des satellites de Jupiter.

Le cône d'ombre projeté par Jupiter du côté opposé au Soleil s'étend fort au delà de l'orbe du quatrième satellite. Il en résulte que les quatre satellites peuvent y pénétrer et par suite être éclipsés. Le premier y pénètre, en effet, à chaque révolution, à cause du peu d'inclinaison de son orbite sur celle de la planète, et il en est de même du second et du troisième. Quant au quatrième, dont l'inclinaison est beaucoup plus sensible, il passe quelquefois au-dessus ou au-dessous du cône d'ombre et, dans ce cas, n'est point éclipsé.

Les éclipses des satellites de Jupiter, à cause de la promptitude de leurs révolutions sidérales, sont des phénomènes extrêmement fréquents, mais dont il n'est pas toujours possible d'observer les phases. Vers l'époque de la conjonction, par exemple, Jupiter est presque entièrement effacé par l'éclat du Soleil, et il se passe plusieurs mois avant qu'on puisse observer les éclipses de ses satellites.

Soient S (*fig.* 24) le Soleil, $TT'T'_1T_1$ l'orbite de la Terre, J Jupiter et SCD l'orbite d'un de ses satellites. (Les flèches indiquent dans quel sens s'effectue le mouvement.) Quand la Terre est vers A, Jupiter est près d'entrer en conjonction ; cette planète passe alors au méridien presque en même temps que le Soleil, et les éclipses des satellites ne sont pas observables, à cause de la proximité de cet astre. Lorsque la Terre est en B, Jupiter est en opposition, passe au méridien à minuit et nous cache son cône d'ombre. Donc, dans ce cas encore, il n'y a point d'éclipse. De T en T′, c'est-à-dire depuis la conjonction jusqu'à l'opposition, Jupiter passant au méridien après minuit, le cône d'ombre se trouve situé pour nous du côté droit ou à l'*occident* de la planète et, dans ce cas, on ne peut observer les *émersions* du premier et du deuxième satellite, ni même celles du troisième, si ce n'est à la quadrature, c'est-à-dire quand Jupiter est à 90° du Soleil; les *immersions* sont seules visibles. Enfin de T'_1 en T_1, c'est-à-dire de l'opposition jusqu'à la conjonction, Jupiter passant au méridien avant minuit, l'ombre projetée par cette planète se trouve située pour nous à l'*orient* ou du côté gauche de l'astre, et l'on ne peut voir que l'*émersion* du premier et du deuxième satellite. Quant au quatrième satellite, si les circonstances atmosphériques de nuit sont favorables, on peut voir son immersion et son émersion.

Fig. 24.



Ainsi, pour reconnaître aisément la place qu'occupent, par rapport à Jupiter, les satellites dont on se propose d'observer l'immersion ou l'émersion, il faut suivre les règles suivantes, que prescrit la *Connaissance des Temps :*

1° Avant l'opposition, c'est-à-dire pendant tout le temps que Jupiter passe au méridien le matin, l'ombre est située à l'*occident* de cette planète, et les immersions ou les émersions se font de ce côté.

2° Après l'opposition, lorsque Jupiter passe au méridien avant minuit, c'est toujours à l'*orient* de la planète que sont les satellites qui doivent entrer dans l'ombre ou qui doivent en sortir.

3° Avant l'opposition, on ne peut voir que les immersions du premier satellite, et après l'opposition il n'y a que les émersions qui puissent être observées; c'est, en général, la même chose pour le second satellite. Il arrive cependant quelquefois qu'on peut observer l'immersion et l'émersion, lorsque Jupiter est en quadrature.

Il est superflu de faire remarquer ici que les apparences seraient contraires, si l'on se servait d'une lunette qui renverse les objets.

II. — Disposition et usage des Tables écliptiques des satellites de Jupiter. — Tables du premier satellite.

Les éclipses des satellites de Jupiter données dans la *Connaissance des Temps* sont calculées à l'aide des Tables de Damoiseau, publiées par le *Bureau des Longitudes* en 1836.

Les instants de ces phénomènes y sont indiqués en temps moyen astronomique compté à midi; on a marqué d'un astérisque les éclipses qui sont visibles à Paris (1), c'est-à-dire qui arrivent à une heure de la nuit où Jupiter est sur l'horizon (2). Pour faire usage de ces Tables, et d'abord de celles du premier satellite, on commencera par chercher dans la Table I la *conjonction moyenne* de l'année proposée, ainsi que les arguments des diverses inégalités qui se trouvent sur la même ligne et qui portent les désignations suivantes : *fraction de l'année*, 1, 2, 3, . . . , 9, I, II, III. On prendra ensuite dans la Table II (*révolution pour les jours de l'année*) la ligne du jour donné, que l'on écrira immédiatement au-dessous de la ligne des époques de conjonctions moyennes et des inégalités (en ayant soin, dans les années bissextiles, de diminuer d'une unité le nombre de jours après février).

---

(1) Relativement à un autre méridien, il suffirait, pour avoir le temps qui convient au lieu où l'éclipse doit s'observer, d'ajouter aux temps marqués des éclipses la différence des longitudes réduites en temps, si l'on était à l'orient de Paris, ou d'en retrancher cette différence, si l'on était à l'occident. Si ce temps tombait dans la nuit, on verrait ensuite si Jupiter doit être sur l'horizon, au moyen de son lever et de son coucher.

(2) Pour qu'une éclipse de satellite soit visible, il faut que Jupiter soit élevé sur l'horizon d'au moins 8°; et il faut de plus que le Soleil soit à plus de 8° au-dessous de ce cercle.

La somme des deux *fractions de l'année* fournies par les Tables I et II sera la fraction de l'année correspondante au moment de l'éclipse et, réunie à l'année donnée, formera l'argument à l'aide duquel on trouvera, par la Table suivante III (*perturbation de Jupiter et autres inégalités*), les termes de perturbations pour le temps de l'éclipse. On réunira ensuite ces termes à ceux de la conjonction moyenne, et on fera l'addition des arguments : *fraction de l'année*, 1, 2, 8, 9. Quant aux autres arguments, ils devront subir des corrections déterminées :

Pour l'arg. 3, avec l'arg. 1, dans la Table IV et l'arg. 2 dans la Table VIII ;
Pour l'argument 4, avec l'argument 1 dans la Table V;
Pour l'argument 5, avec l'argument 1 dans la Table VI;
Pour les arguments 6, 7, I, II, III, avec l'argument 1 dans la Table VII.

La somme de ces différents termes étant faite, on prendra dans les Tables IX-XVIII toutes les équations de la conjonction, qui seront alors données :

Dans la Table IX, avec l'argument 1;
Dans la Table X, avec l'argument 3;
Dans la Table XI, avec les arguments 1 et 3;
Dans la Table XII, avec les arguments 2 et 3;
Dans la Table XIII, avec l'argument 4;
Dans les Tables XIV-XVIII, avec les arg. 5, 6, 7, 8, 9 respectivement.

On y joindra le terme de la *réduction au milieu de l'éclipse*, donné par la Table XIX, avec le nombre I pour argument, et la somme de tous ces termes, auxquels on joindra ceux déjà inscrits dans la colonne des conjonctions moyennes, exprimera l'instant du milieu de l'éclipse en temps civil moyen.

Relativement à la demi-durée de l'éclipse, on cherchera dans les Tables XX, XXI et XXII, avec les arguments I, II et III, les nombres qui leur correspondent. La somme M de ces trois nombres sera l'argument de la demi-durée que l'on obtiendra alors, ainsi que les nombres N et P qui servent à la corriger à l'aide de la Table XXIII. Pour effectuer la correction de la demi-durée, on prendra dans les Tables XXIV et XXV, avec les arguments 4 et 1, les nombres correspondants; on multipliera le premier par N, le second par P; et la somme de ces deux produits, pris avec un signe convenable, sera la quantité qu'il faudra appliquer à la demi-durée pour avoir celle corrigée. En retranchant ensuite ou en ajoutant cette demi-durée au temps du milieu de l'éclipse, on aura le moment de l'immersion ou de l'émersion exprimé en temps civil moyen, temps que l'on pourra transformer aisément en temps moyen astronomique. Voici un exemple du calcul de l'éclipse du premier satellite qui arrive le 13 février 1877 :

TABLEAU DES ARGUMENTS.

1877.	Fraction de l'année.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9
		s o	s o	s o	s o	s o	s o	s o	s o	s o
1^er^ janv...	0,001	8 .7,738	0. 0,14	0.13,47	7.23,51	2.20,4	10.27,2	11.13,6	4.20,0	4.3,3
13 fév....	0,121	0. 3,676	1.13,61	1. 9,93	6.18,20	9.27,3	0. 3,4	0. 3,6	1. 3,0	1.2,8
				10,63	0.20	0.3	0,4	0,4		
				3,27						
	0,122	8.11,414	1.13,75	2. 7,30	2.11,91	0.18,0	11. 1,0	11.17,6	5.23,0	5.6,1

	I.	II.	III.
	s o	s o	s o
1877, 1^er^ janvier......	9.29,42	8. 4,7	1.13,6
13 Février, ...	0. 3,68	0. 5,1	0. 4,0
	0. 0,39	0,4	0.4
	10. 3,49	8.10,2	1.18,0

Époques des conjonctions moyennes.

	h m s
1877, 1^er^ janvier........................	5. 5.24,8
13 février................................	5.54.58,6
Argument, 122..........................	1.39,2
Arg. 1....................................	3.36,2
3..	12. 0,8
1 et 3......................................	1,1
2 et 3......................................	5,1
4..	1.21,6
5..	1,1
6..	2,3
7..	0,8
8..	7,2
9..	4,0
I..	44,5
Temps du milieu de l'éclipse février, 13...	11.20. 7,3
Demi-durée corrigée....................	1. 5.12,0
Immersion en temps civil moyen.........	10.14.55,3
En temps moyen astronomique...........	22.14.55,3

Calcul de la demi-durée.

Table XX, arg. I		0,0573	
Table XXI, arg. II		0,0021	
Table XXII, arg. III		0,0033	
M		0,0627	$1^h 5^m\ 0^s,3$
Termes correctifs	N	0,87... + 11,40	+ 11,7
	P	0,96... + 0,29	
Demi-durée corrigée de l'éclipse			$1^h 5^m 12^s,0$

Les limites entre lesquelles doit se faire le calcul de l'immersion ou de l'émersion dépendent de l'argument 3 et sont données par le Tableau suivant :

Lorsque argument 3 $< 6^s$ ou 180°, on calcule l'immersion.
Lorsque argument 3 $> 6^s$ ou 180°, on calcule l'émersion.
Depuis argument $3 = 11^s 1°,2$ jusqu'à arg. $3 = 0^s 8°,8$, les éclipses ne sont pas visibles et le calcul de l'immersion et de l'émersion ne se fait pas

III. — Tables du deuxième satellite.

Pour se servir de ces Tables, on prendra d'abord, dans la Table I, la conjonction moyenne de l'année proposée, ainsi que les arguments des inégalités qui sont sur la même ligne et qui portent les désignations suivantes :

Fraction de l'année, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, I, II, III, IV.

Au-dessous de cette ligne, on écrira celle du jour qui est immédiatement placé au-dessous du jour donné, en ayant soin de diminuer d'une unité, dans les années bissextiles, le nombre de jours après février, puis on fera l'addition des colonnes 1, 2, 7 et 8. Quant aux autres colonnes, elles devront subir des corrections qui seront déterminées :

Pour l'argument 3, avec l'argument 1, dans la Table IV;
Pour l'argument 4, avec l'argument 1, dans la Table V;
Pour les arg. 5, 6, I, II, III, IV avec l'arg. 1, dans la Table VI;
Pour la 2^e correction de l'arg. 3 avec l'arg. 2, dans la Table VII.

Il restera encore à former deux arguments pour la réduction au milieu de l'éclipse, savoir, l'argument I + II et celui I + III. On écrira donc l'argument I sous les arguments II et III, et l'on fera les sommes.

A l'aide des arguments ainsi obtenus, on procédera à la recherche des équations de la conjonction que l'on écrira au-dessous des époques de conjonctions moyennes, déjà déterminées par les Tables I et II, ainsi que du terme des *perturbations* donné par la Table III, comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe qui précède. Ces équations seront données :

Dans la Table VIII, avec l'argument 1;
Dans la Table IX, avec l'argument 3;
Dans la Table X, avec les arguments 1 et 3;
Dans la Table XI, avec les arguments 2 et 3;
Dans la Table XII, avec l'argument 4;
Dans la Table XIII, avec l'argument 5;
Dans la Table XIV, avec l'argument 6;
Dans la Table XV, avec l'argument 7;
Dans la Table XVI, avec l'argument 8.

On y joindra les termes de la *réduction au milieu de l'éclipse*, donnés :

Dans la Table XVII, avec l'argument I;
Dans la Table XVIII, avec l'argument II;
Dans la Table XIX, avec l'argument I + II;
Dans la Table XX, avec l'argument I + III.

On additionnera ces différents termes, et la somme exprimera, en temps civil moyen, l'instant du milieu de l'éclipse.

Pour avoir la demi-durée de l'éclipse, on cherchera dans les Tables XXI-XXIV, avec les arguments I, II, III, IV, les nombres correspondants; la somme M de ces quatre nombres sera l'argument de la demi-durée que l'on obtiendra alors à l'aide de la Table XXV, en même temps que les nombres N et P qui servent à la corriger. Pour effectuer cette correction, on prendra dans les Tables XXVI, XXVII, XXVIII, avec les nombres 4, 5 et 1 pour arguments, les nombres correspondants; on multipliera la somme des deux premiers par N, le dernier par P, et les produits, étant appliqués avec leurs signes à la demi-durée, donneront la demi-durée corrigée, telle qu'elle s'ajoute ou se retranche du temps du milieu de l'éclipse dans le cas de l'émersion ou de l'immersion. Voici d'ailleurs une application des Tables au calcul de l'éclipse du second satellite, le 6 juillet 1877 :

TABLEAU DES ARGUMENTS.

	Fraction de l'année.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
		s o	s o	s o	s o	s o	s o	s o	s o
1877, 3 janv.	0,007	8. 7,932	0.2,44	0.15,57	10.24,45	10.27,2	11.13,9	4.21,6	4. 4,9
3 juillet	0,506	0.15,355	6.2,15	5.16,80	2.16,01	0.14,0	0.15,0	4.18,0	4.17,0
				10,93	0,05	0,1	0,1		
				1,78					
	0,513	8.23,287	6.4,59	6.15,08	1.10,51	11.11,3	11.29,0	9. 9,6	8.21,9

I.	II.	III.	IV.
s o	s o	s o	s o
9.29,62	8. 5,00	1.13,9	2. 2,5
0.15,36	0.21,47	0.16,6	0.15,7
0,09	0,09	0,1	0,1
10.15,07	8.26,56	2. 0,6	2.18,3
	10.15,07	10.15,1	
(I + II)...	7.11,63	0.15,7...	(I+III)

	h m s
1877, 3 janv.	12. 9.10,6
3 juillet	19.30.34,2
Argument 513	3. 1,7
Arg. 1	1.36,3
3	20,9
1 et 3	1,3
2 et 3	0,5
4	22,5
5	35,9
6	12,2
7	1.24,4
8	38,0
I	1.32,2
II	0,9
I + II	4,8
I + III	1,2
Temps du milieu de l'éclipse, juillet 6	31.49.37,6
Demi-durée	1.21.35,2
Émersion en temps moyen astronomique (1).	21.11.12,8

---

(1) Il s'agit ici d'une émersion, car arg. $3 > 6^{s}$ ou 180°.

Calcul de la demi-durée.

Arg. I............	0,1603	
Arg. II...........	0,1678	
Arg. III..........	0,0007	
Arg. IV..........	0,0056	
M..............	0,3344	$1^{h}.21^{m}.42,6$
N...............	0,855	— 7,6
P...............	0,95	+ 0,2
Demi-durée corrigée.........		1.21.35,2

$$\text{Correction de la demi-durée}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{arg. }4=-7^{s},5\\ \text{arg. }5=-1,4\end{array}\right\}-8^{s},9\times 0,85. \qquad -7^{s},565\\ \text{arg. }1=+0,2\times 0,95\ldots\ldots\ldots \qquad +0,19\end{array}\right.$$

IV. — Tables du troisième et du quatrième satellite.

Tout ce que nous venons de dire de l'emploi des Tables du premier et du deuxième satellite s'applique à celles du troisième, à cela près que, pour faire usage de ces Tables, il faut procéder à la formation de trois nouveaux arguments, savoir : I + IV, 6 + I et 6 — I. L'argument M qui sert au calcul de la demi-durée est alors la somme des six nombres correspondant aux arguments

I, II, III, IV, 6 + I, 6 — I;

et l'on obtient la correction de la demi-durée en multipliant par N la somme des nombres correspondant aux arguments 4, 6, 7, fournis par les Tables XXIX, XXX, XXXI, et par P celui donné dans la Table XXXII, avec l'argument I.

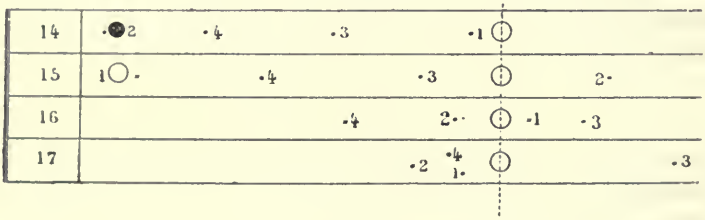
Quant aux Tables du quatrième satellite, leur emploi exige la formation de trois nouveaux arguments, savoir : 6 + II, 6 — II, et 2I + 6. Les deux premiers se rapportent aux nombres dont la somme donne M; le troisième doit être écrit à la suite des arguments I, II, I + II, I + III, qui fournissent les termes de la réduction au milieu de l'éclipse. Avec le nombre M pour argument, on prend dans la Table XXIX le nombre Q. On prend ensuite dans les Tables XXX et XXXI, avec les arguments 6 et 7, les nombres correspondants, dont la somme est le nombre Z, et la demi-durée est alors donnée par la Table XXXII, avec la somme Q + Z pour argument. Pour obtenir sa correction, on prend dans la Table XXXIII, avec l'argument 1, le nombre Y, et, réunissant ce nombre à celui Z, on multiplie par Z + Y la demi-durée réduite en secondes; le produit, étant alors appliqué avec un signe convenable à la demi-durée, donne la demi-durée corrigée, telle qu'elle se retranche ou s'ajoute au temps du milieu de l'éclipse.

V. — Configuration des satellites de Jupiter. — Usage des Tables de configurations.

Afin de pouvoir distinguer les satellites les uns des autres et reconnaître aisément la place de celui dont on veut observer l'éclipse, la *Connaissance des Temps* donne, pour chaque jour de l'année où Jupiter est observable et pour l'heure la plus favorable aux observations, un Tableau où les positions relatives de la planète et de ses satellites se trouvent figurées.

La position de Jupiter y est désignée par un petit cercle, tracé au milieu de la ligne ponctuée (*fig.* 25), et celle des satellites par des points accompagnés de chiffres placés du côté vers lequel le satellite se dirige. Ces configurations sont renversées, comme on les voit dans des lunettes à deux verres convexes, c'est-à-dire telles que celles dont les astronomes se servent. Les satellites sont dans la partie supérieure de leurs orbites ou la plus éloignée de la Terre, lorsqu'ils sont à gauche ou à l'occident, et qu'ils s'approchent de Jupiter; et ils sont dans la partie inférieure ou la plus proche de la Terre, lorsqu'ils sont du même côté et qu'ils s'éloignent de Jupiter; le contraire a lieu lorsqu'ils sont à droite ou à l'orient.

Fig. 25.



Sur le bord du Tableau qui donne la configuration d'un jour, on voit quelquefois un petit cercle [○], accompagné d'un chiffre.

Cette notation sert à marquer qu'un satellite est sur le disque de la planète ; au contraire, un gros point noir [●], accompagné aussi d'un chiffre, indique qu'un satellite est dans l'ombre projetée par Jupiter, ou bien caché derrière le disque de cette planète.

Pour déterminer les configurations des satellites de Jupiter, on se sert des Tables de Damoiseau, publiées par le *Bureau des Longitudes* en 1836, et que l'on trouve à la suite des Tables écliptiques des satellites. Pour cela, on prend dans les Tables I, II, III la longitude moyenne du satellite pour l'heure donnée ; on retranche de cette longitude moyenne la longitude géocentrique de Jupiter, correspondant à la même heure, et avec le reste, qui est la distance angulaire du satellite à la planète ou son *élongation,* on prend dans la Table VI le nombre correspondant, qui est l'abscisse ou la distance du satellite au centre de Jupiter, exprimée en rayons de son équateur et comptée sur une ligne qui représente le plan de l'orbite de cette planète. Cette abscisse se porte à droite de Jupiter, si elle est positive, et à gauche de cet astre si elle est négative. Pour donner ensuite aux satellites les désignations qui leur conviennent, d'après le sens de leur marche, il suffit d'avoir égard aux remarques suivantes :

1° Les satellites étant dans la partie supérieure de leurs orbites, ils s'approchent de Jupiter si l'élongation est comprise entre 90° et 0°, et s'en éloignent, au contraire, lorsque cette élongation est entre 0° et 90°.

2° Les satellites se trouvant dans la partie inférieure de leurs orbites, ils s'approchent de Jupiter lorsque l'élongation est comprise entre 90° et 180°, et s'en éloignent lorsque cette élongation est entre 180° et 270°.

3° Enfin, lorsque l'élongation est voisine de 180°, la Table VI donne un résultat plus petit qu'un rayon de Jupiter, et le satellite paraît sur le disque de la planète.

L'élongation étant près de 0°, l'abscisse que donne la Table VI est moindre que l'unité, et le satellite se trouve caché derrière le disque de Jupiter. Quant au cas où le satellite est dans l'ombre de la planète, comme ce temps est connu par le calcul des éclipses, il suffit de comparer l'heure des éclipses à celles des configurations pour être instruit de cette circonstance. Voici du reste une application de ces préceptes à la détermination des configurations des satellites pour les 14, 15, 16, 17 octobre 1877 à 6^h30^m, temps moyen astronomique (*fig.* 25).

Les époques des Tables de Damoiseau étant exprimées en temps civil moyen, c'est pour 18^h30^m que nous devons faire le calcul. Cela posé, on a :

	Premier satellite.	*Deuxième satellite.*
	Longitudes moyennes.	Longitudes moyennes.
	s o	s o
Table I, 1877........	6.29,35	11.28,51
Table II, octobre.....	3.22,50	10.15,31
Table III, 18^h........	5. 2,62	2.16,03
30^m.................	4,24	2,11
	3.28, 7	13. 2, 0
Longit. géocentr. de ♃.	8.28, 4	8.28, 4
	7. 0, 3	4. 3, 6

	Troisième satellite.	*Quatrième satellite.*
	Longitudes moyennes.	Longitudes moyennes.
	s o	s o
Table I, 1877........	5.13,30	4. 7,09
Table II, octobre.....	1.26,72	4. 8,91
Table III, 18^h........	1. 7,74	16,18
30^m.................	1,05	0,45
	8.18, 6	9. 2, 6
Longit. géocentr. de ♃.	8.28, 4	8.28, 4
	11.20, 2	0. 4, 2

A l'aide de ces différences et en tenant compte de la correction des jours, on obtient ensuite :

Premier satellite [1].

	14 octobre.	15 octobre.	16 octobre.	17 octobre.
	s o	s o	s o	s o
	7. 0,3	7. 0,3	7. 0,3	7. 0,3
Table III, jours.....	4. 5,4	10.28,9	5.22,3	0.15,8
Élongation..........	11. 5,7	5.29,2	0.22,6	7.16,1
Abscisses (Table VI).	$-2^r,5$	$+0^r,1$[1○.]	$+2^r,3$	$-4^r,4$

Deuxième satellite [2].

	14 octobre.	15 octobre.	16 octobre.	17 octobre.
	s o	s o	s o	s o
	4. 3,6	4. 3,6	4. 3,6	4. 3,7
Table III, jours.....	7.27,9	11. 9,3	2.20,6	6. 2,0
Élongation..........	0. 1,5	3.12,9	6.24,2	10. 5,6
Abscisses...........	$+0^{r},1$ [.●2]	$+9^{r},4$	$-3^{r},9$	$-7^{r},8$

Troisième satellite [3].

	14 octobre.	15 octobre.	16 octobre.	17 octobre.
	s o	s o	s o	s o
	11.20,2	11.20,2	11.20,2	11.20,2
Table III, jours.....	9.24,1	11.14,5	1. 4,8	2.25,1
Élongation..........	9.14,3	11. 4,7	0.25,0	2.15,3
Abscisses...........	$-14^{r},9$	$-6^{r},6$	$+6^{r},5$	$+14^{r},8$

Quatrième satellite [4].

	14 octobre.	15 octobre.	16 octobre.	17 octobre.
	s o	s o	s o	s o
	0. 4,2	0. 4,2	0. 4,2	0. 4,2
Table III, jours.....	9.10,4	10. 2,0	10.23,6	11.15,1
Élongation..........	9.14,6	10. 6,2	10.27,8	11.19,3
Abscisses...........	$-26^{r},1$	$-21^{r},8$	$-14^{r},4$	$-5^{r},0$

A l'aide d'une échelle de proportion, il est maintenant bien facile de tracer le tableau des configurations, tel qu'on le voit représenté par la *fig.* 25. On peut se dispenser, en général, dans ce tracé, d'avoir égard aux latitudes des satellites, vu les très petites dimensions du Tableau qui contient les configurations. Il est cependant un cas où il convient d'y avoir égard : c'est lorsque deux satellites se trouvent assez voisins l'un de l'autre pour faire craindre qu'il en résulte quelque confusion dans le placement des chiffres. On cherche alors, par le calcul des latitudes, lequel des deux satellites est le plus au nord ou au sud, et on place l'un au-dessus de l'autre, comme l'indique, dans notre exemple, la configuration du 17 octobre à l'égard des satellites 4 et 1.

CHAPITRE II.

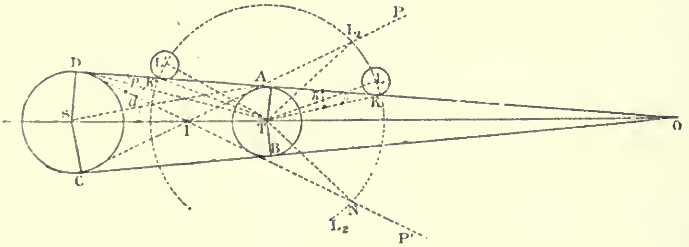
PRÉDICTION DES ÉCLIPSES DE LUNE ET DE SOLEIL.

I. — Éclipses de Lune. — Limites entre lesquelles doit se trouver comprise la latitude lunaire pour qu'il y ait éclipse.

Si la Lune se mouvait dans le plan de l'écliptique, il y aurait éclipse de Lune à chaque opposition et éclipse de Soleil à chaque conjonction. Mais, comme l'orbe lunaire est incliné d'environ 5°9′ sur l'écliptique, il peut arriver que, au moment de l'opposition, la Lune se trouve, soit au-dessus, soit au-dessous du cône d'ombre projeté par la Terre, et qu'ainsi il n'y ait point d'éclipse. Pour que ce phénomène des éclipses puisse avoir lieu, il faut que, au moment de l'opposition, la Lune soit dans ses nœuds ou très près de ses nœuds, et, par conséquent, que la ligne des nœuds soit sensiblement dans la direction du Soleil. Il faut, en outre, que la latitude lunaire soit renfermée dans certaines limites que nous allons déterminer.

Soient S (*fig.* 26) le Soleil, T la position que la Terre occupe sur l'écliptique, et L la position de la Lune aux environs de ses nœuds ou lorsqu'elle est pleine. Le cône d'ombre projeté par la Terre derrière elle est AOB; et il y a éclipse de Lune lorsque

Fig. 26.



cet astre, dans l'opposition, vient toucher en K la génératrice DO du cône d'ombre; il y a éclipse de Soleil lorsque la Lune, dans la conjonction, vient toucher en K′ la génératrice du cône lumineux qui produit l'ombre terrestre.

Cela posé, désignons par d le demi-diamètre du Soleil, par δ celui de la Lune, par p la parallaxe horizontale du Soleil, par Π celle de la Lune, et soit de plus λ la latitude de la Lune au point K ou l'angle KTO. On a, d'une manière très approchée,

$$\lambda = \mathrm{AKT} - \mathrm{KOT},$$

ou parce que $\mathrm{KOT} = \mathrm{DOS} = \mathrm{DAS} - \mathrm{AST}$,

$$\lambda = \mathrm{AKT} + \mathrm{AST} - \mathrm{DAS}.$$

On a d'ailleurs

$$\mathrm{AKT} = \Pi, \quad \mathrm{AST} = p, \quad \mathrm{DAS} = d;$$

par conséquent,

$$\lambda = \Pi + p - d.$$

Maintenant, il est évident que la latitude du point L, centre de la Lune, est égale à celle du point K diminuée de δ, ou à $\lambda - \delta$; ainsi

$$\lambda - \delta = \Pi + p - d.$$

Pour qu'il y ait éclipse de Lune, il faut donc que l'on ait, en général,

$$\lambda < \delta + \Pi + p - d.$$

Si, dans cette inégalité, on met, à la place de δ, Π, p et d, leurs valeurs maxima et minima, savoir :

Pour le maximum...... $\delta = 16'45''$, $d = 16'18''$, $\Pi = 61'24''$, $p = 9''$
Pour le minimum...... $\delta = 14'41''$, $d = 15'45''$, $\Pi = 53'38''$, $p = 8'',8$

on trouve

Maximum........ $\delta + \Pi + p - d = 63'$
Minimum......... $\delta + \Pi + p - d = 52'$

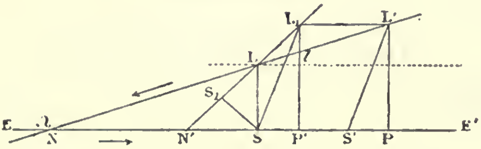
Ainsi, suivant que, dans l'opposition, on aura

$\lambda < 52'$, l'éclipse sera certaine;
$\lambda > 52'$ et $< 63'$, l'éclipse sera douteuse;
$\lambda > 63'$, il n'y aura pas d'éclipse.

II. — Calcul des phases d'une éclipse de Lune et de l'instant du milieu de l'éclipse.

Supposons maintenant que, une éclipse de Lune ayant été reconnue certaine, on veuille en calculer les différentes phases en commençant par l'instant du milieu de l'éclipse, qui est à l'époque à laquelle on rattache, comme nous le verrons bientôt, toutes les autres particularités du phénomène.

Fig. 27.



Soient EE′ (*fig.* 27) l'écliptique, NL′ l'orbite de la Lune, S la position du centre du disque d'ombre pure au moment de l'opposition et L la position de la Lune au même instant. La latitude de la Lune, à ce moment, sera LS, et une heure après le centre du disque d'ombre aura parcouru l'arc $SS' = M$, égal au mouvement horaire en longitude du Soleil, tandis que la Lune sera venue en L′ (son mouvement horaire en longitude ou sur l'écliptique étant $SP = m$). $SP' = m - M$ représentera donc le mouvement horaire relatif de la Lune en longitude, et, en menant SL_1 parallèle à $S'L'$ et $L'L_1$ parallèle à NP, on voit qu'on pourra considérer le disque d'ombre pure comme étant fixe en S, pourvu qu'on attribue à la Lune la position L_1. La ligne $N'LL_1$ que l'on peut ainsi substituer à l'*orbite vraie* NLL′ de la Lune porte le nom d'*orbite relative*, et, en désignant par θ son inclinaison sur l'écliptique, on a, par le triangle $L_1 L l$,

$$\tang\theta = \frac{lL_1}{Ll},$$

ou bien, en appelant n le mouvement horaire de la Lune en latitude,

$$\tang\theta = \frac{n}{m - M},$$

Quant au mouvement horaire $h = LL_1$ de la Lune sur son orbite relative $N'LL_1$, il est déterminé par la relation

$$h = \frac{Ll}{\cos\theta} = \frac{m - M}{\cos\theta},$$

qui se déduit du même triangle $L_1 L l$.

Il est maintenant bien facile de déterminer l'instant du milieu de l'éclipse. En effet, si l'on remarque que cet instant arrive lorsque la Lune est en S_1 (*fig.* 27), sur la perpendiculaire SS_1 à l'orbite relative, on aura, pour calculer le temps T écoulé entre cet instant et celui de l'opposition,

$$\frac{T}{1^h} = \frac{S_1 L}{LL_1},$$

ou bien, en observant que $S_1 L = LS \sin S_1 SL = \lambda \sin\theta$,

$$T = \frac{\lambda \sin\theta \cos\theta}{m - M}.$$

III. — Calcul du commencement et de la fin de l'éclipse.

Soient L (*fig.* 28) la position de la Lune sur l'orbite relative au moment où l'éclipse commence, c'est-à-dire lorsque le disque de la Lune est tangent au disque de l'ombre, et L' la position de cet astre au moment du milieu de l'éclipse. SL' étant alors perpendiculaire à l'orbite relative, on a, par le triangle LSL' rectangle en L',

$$LL' = \sqrt{(LS)^2 - (L'S)^2} = (LS - L'S)(LS + L'S).$$

Mais, au moment où l'éclipse commence

$$SL = SC + CL = \frac{61}{60}(H + p - d) + \delta \quad (^1),$$

et de plus $L'S = \lambda \cos\theta$. $\mathcal{R}$ représentant le rayon du disque d'ombre

---

(¹) $H + p - d = KTO$ (*fig.* 26) est l'angle sous lequel le rayon du disque d'ombre pure est vu; et, d'après une remarque empirique de Tobie Mayer, on doit l'augmenter de son 60ᵉ pour que le calcul s'accorde avec les observations.

pure, on a donc

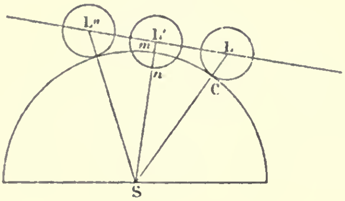
$$LL' = \sqrt{(\mathcal{R} + \delta - \lambda\cos\theta)(\mathcal{R} + \delta + \lambda\cos\theta)}.$$

Connaissant ainsi la valeur de LL', on aura le temps t pendant lequel cette portion d'orbite a été parcourue, en posant

$$t : 1^{h} :: LL' : \frac{m - M}{\cos\theta},$$

proportion d'où l'on tire, après avoir mis pour LL' sa valeur ci-dessus et multiplié par 3600'', pour réduire t en secondes,

Fig. 28.



$$t = \frac{3600''\cos\theta}{m - M}\sqrt{(\mathcal{R} + \delta - \lambda\cos\theta)(\mathcal{R} + \delta + \lambda\cos\theta)}.$$

T étant le temps qui répond au milieu de l'éclipse, on a donc

Commencement de l'éclipse........ $t_e = T - t$
Fin de l'éclipse.................... $t_s = T + t$

Si l'éclipse devait être totale, il faudrait, en outre, déterminer les instants de l'*entrée* et de la *sortie* dans l'ombre, instants qui sont ceux de l'immersion et de l'émersion complète. Or comme, dans ce cas, $SL = \mathcal{R} - \delta$, il suffirait évidemment pour cela de remplacer, dans l'équation précédente, $\mathcal{R} + \delta$ par $\mathcal{R} - \delta$, et comme la ligne L'S est égale à $\lambda\cos\theta$, on voit sans peine que, si

$\mathcal{R} - \delta < \lambda\cos\theta$, l'éclipse est partielle;
$\mathcal{R} - \delta > \lambda\cos\theta$, l'éclipse est totale;
$\mathcal{R} + \delta > \lambda\cos\theta$, il n'y a pas d'éclipse.

IV. — De la pénombre. — Calcul de l'entrée dans la pénombre et de la sortie.

Avant d'entrer dans le cône d'ombre pure AOB (*fig.* 26), la Lune pénètre dans la partie obscure qui s'étend tout autour de ce cône et qui remplit à peu près les espaces PAO, OBP′ de la figure : c'est la *pénombre*. On détermine l'instant où la Lune entre dans la pénombre et celui où elle en sort en remplaçant, dans les valeurs ci-dessus de t_e et de t_s, le rayon $\mathcal{R}$ du disque d'ombre pure par celui $\mathcal{R}'$ de la pénombre, égal, comme il est aisé de s'en convaincre, à

$$\frac{61}{60}(\Pi + p + d) \quad (^1).$$

On a donc ici :

Entrée dans la pénombre.. $t_e = T - \dfrac{3600'' \cos\theta}{m - M}\sqrt{(\mathcal{R}' + \delta - \lambda\cos\theta)(\mathcal{R}' + \delta + \lambda\cos\theta)},$

Sortie de la pénombre.... $t_s = T + \dfrac{3600'' \cos\theta}{m - M}\sqrt{(\mathcal{R}' + \delta - \lambda\cos\theta)(\mathcal{R}' + \delta + \lambda\cos\theta)}.$

V. — Grandeur de l'éclipse.

Il nous reste à déterminer, dans le cas d'une éclipse partielle, la grandeur de l'éclipse ou, si l'on veut, la plus grande quantité du diamètre lunaire éclipsé. Cette quantité est représentée, dans la

---

[1] En effet, $L'L_1LL_2$ (*fig.* 26) étant l'orbite lunaire, le rayon $\mathcal{R}'$ du disque de la pénombre est vu sous l'angle L_1TO ; et comme cet angle est extérieur au triangle ITN, on a

$$L_1TO = \mathcal{R}' = \text{TNI} + \text{TIN};$$

on a d'ailleurs

$$\text{TIN} = \text{IDT} + \text{ITD},$$

ainsi

$$\mathcal{R}' = \text{TNI} + \text{IDT} + \text{ITD}.$$

Mais

$$\text{TNI} = \Pi, \quad \text{IDT} = p, \quad \text{ITD} = d;$$

par conséquent

$$\mathcal{R}' = \Pi + p + d,$$

ou plus exactement

$$\mathcal{R}' = \frac{61}{60}(\Pi + p + d).$$

fig. 28, par l'espace mn, et l'on a

$$mn = nL' - mL' = \delta - mL'.$$

Mais

$$mL' = L'S - mS = \lambda \cos\theta - \mathcal{R}.$$

Donc

$$mn = \mathcal{R} + \delta - \lambda \cos\theta;$$

ou bien, en exprimant cette quantité en fraction du diamètre 2δ de la Lune,

$$mn = \frac{1}{2\delta}(\mathcal{R} + \delta - \lambda \cos\theta).$$

VI. — Éclipse de Soleil [méthode de Woolhouse (¹)]. — Conditions de possibilité des éclipses de Soleil.

Si l'orbite de la Lune coïncidait avec l'écliptique, il y aurait, comme nous l'avons déjà fait remarquer, éclipse de Soleil à chaque conjonction ou toutes les fois que la Lune est nouvelle. L'inclinaison de l'orbite lunaire rend ces phénomènes beaucoup moins fréquents, et ce n'est que lorsque la Lune, au moment de la conjonction, est dans ses nœuds ou très près de ses nœuds, que l'on peut espérer de les voir se produire. Par des considérations analogues à celles que nous avons développées en parlant des éclipses de Lune, il faut en outre, pour qu'il y ait éclipse de Soleil, que, au moment de la conjonction, la latitude lunaire λ satisfasse à l'inégalité

$$\lambda < d + \delta + \mathrm{H} - p,$$

d, δ, H et p ayant la même signification que ci-dessus. Or, en mettant à la place de ces quantités leurs valeurs maxima et minima, on trouve :

Pour le maximum de λ...... 1°34′18″
Pour le minimum de λ...... 1°24′

(¹) La méthode de Woolhouse, dont on se sert en Angleterre pour la prédiction des éclipses de Lune et de Soleil, a été exposée dans les *Additions* au *Nautical almanac* pour 1836. C'est le plus admirable travail sur l'astronomie géométrique qu'il nous ait été donné d'analyser. Depuis quelques années, l'administration de la *Connaissance des Temps* lui préfère la méthode de Hansen, méthode un peu plus exacte, mais qui entraîne dans des calculs plus longs et plus difficultueux. On trouve la méthode de Hansen exposée avec détails dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saxe.*

Ainsi, suivant que, au moment de la conjonction, on aura

$\lambda < 1°24'$, l'éclipse sera certaine;
$\lambda > 1°24'$ et $< 1°34'18''$, l'éclipse sera douteuse;
$\lambda > 1°34'18''$, il n'y aura pas d'éclipse.

VII. — Détermination des lieux pour lesquels s'accomplissent les principales phases du phénomène.

Lorsque la Lune passe au devant du disque du Soleil, elle emporte avec elle, d'*occident* en *orient,* ses deux cônes d'ombre et de pénombre dont les extrémités parcourent alors successivement différentes régions de la surface terrestre, et y laissent la trace de certaines lignes dont nous aurons bientôt à nous occuper. Bornons-nous pour le moment à déterminer la longitude et la latitude des lieux qui voient commencer ou finir l'éclipse totale, l'éclipse générale ou l'éclipse centrale, c'est-à-dire la position des lieux pour lesquels ont lieu les premiers et derniers contacts tangentiels des cônes d'ombre et de pénombre avec la Terre, ainsi que ceux de l'axe commun des deux cônes.

Désignons par Π la parallaxe horizontale de la Lune et par p celle du Soleil. Les positions apparentes de ces astres au moment d'une éclipse de Soleil sont très rapprochées et la parallaxe solaire a une très petite valeur; on peut donc considérer le Soleil dans sa position vraie et attribuer à la Lune tout l'effet de la différence $\Pi - p$ des parallaxes. Soit ρ le rayon de la Terre correspondant à un point quelconque de sa surface, en sorte que $\rho(\Pi - p)$ représente la parallaxe qui convient à ce point. Comme, dans ce qui va suivre, nous aurons à considérer cette parallaxe relative pour un lieu inconnu, nous pourrons prendre d'abord pour ρ la valeur qu'a ce rayon à la latitude moyenne de 45°, sauf à recommencer les calculs avec le rayon correspondant au lieu ainsi déterminé, si les latitudes obtenues diffèrent beaucoup de celle de 45°, pour laquelle nous prenons ρ (1). Ainsi nous écrirons généralement

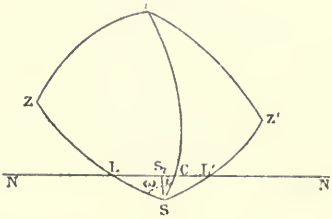
$$P' = 9,99929(\Pi - p),$$

---

(1) La Table IX, que nous donnons à la fin de ce Volume, facilite ce calcul en fournissant pour chaque degré de latitude géocentrique l la valeur de ρ correspondante.

Cela posé, soient P (*fig.* 29) le pôle nord de la sphère céleste, NN′ l'orbite relative de la Lune, S la position du Soleil supposée fixe, $SS_1 = n$ la perpendiculaire menée du centre S à l'orbite relative ou la plus courte distance des centres des deux astres, C le point où se trouve la Lune au moment de la conjonction en ascension droite, et CS la différence des déclinaisons à ce moment, différence que nous désignerons par ∂. Supposons que L et L′ représentent les positions de la Lune lorsque la distance des centres, au moment du premier et du dernier contact, est égale à une certaine valeur que nous représenterons par Δ', et soit à ce moment $LS = L'S = \Delta$ la distance vraie correspondante. Appelons de plus Z et Z′ les zéniths des deux lieux de la Terre qui, au moment des contacts, voient les centres des deux astres à la distance Δ', zéniths qui doivent être respectivement dans le prolongement des arcs SL et SL′ pour que le plus grand effet de la parallaxe Π puisse se produire.

Fig. 29.



En désignant toujours par p la parallaxe horizontale du Soleil et par d son demi-diamètre, on aura pour le contact de l'un ou de l'autre bord du disque de la Lune avec le bord le plus rapproché du Soleil

$$ZS = (90^\circ - p) + d,$$

et, pour le contact de l'un ou de l'autre bord du disque de la Lune avec le bord le plus éloigné du Soleil,

$$ZS = (90^\circ - p) - d.$$

Au moment du contact des deux centres, on aura

$$ZS = 90^\circ - p.$$

Maintenant, comme au moment des différents contacts ZS diffère très peu de 90°, on voit que la phase commencera avec le lever du Soleil et finira avec le coucher de cet astre. Et il est évident que pour ces instants le demi-diamètre apparent de la Lune ne différera pas sensiblement de son demi-diamètre horizontal et qu'ainsi il sera toujours permis de confondre le premier de ces éléments avec le second.

La distance vraie SL des centres étant représentée par Δ, et celle apparente par Δ', on a, entre ces quantités et la parallaxe horizontale relative de la Lune, que nous avons désignée par P', la relation

$$\Delta = P' + \Delta',$$

en estimant comme positives les distances comptées de S vers L.

Examinons plus particulièrement les valeurs que prend cette relation aux différentes phases du phénomène :

1° Lorsqu'un simple contact *extérieur* a d'abord lieu, on a

$$\Delta' = \delta + d,$$

δ étant le demi-diamètre horizontal de la Lune ; par conséquent,

$$\Delta = P' + \delta + d.$$

2° Lorsque c'est un contact *intérieur* qui a d'abord lieu, $\Delta' = \delta - d$; et suivant que $\delta > d$ ou $\delta < d$, une éclipse *totale* ou *annulaire* commence sur la Terre avec $\Delta' = \delta - d$ ou $\Delta' = d - \delta$.

Soit $\delta > d$, une *éclipse totale* commence sur la Terre quand

$$\Delta = P' + \delta - d.$$

Si $\delta < d$, une *éclipse annulaire* commence sur la Terre quand

$$\Delta = P' - \delta + d.$$

3° Enfin, lorsque le contact des *centres* a d'abord lieu,

$$\Delta' = 0;$$

donc, dans ce cas, une *éclipse centrale* commence sur la Terre quand on a

$$\Delta = P'.$$

Soient actuellement, pour l'époque de la conjonction en ascension droite,

D la déclinaison vraie de la Lune ;

α la différence des ascensions droites vraies du Soleil et de la Lune, ou l'ascension droite de la Lune moins celle du Soleil;

D_1 le mouvement relatif en déclinaison de la Lune, ou le mouvement en déclinaison de la Lune moins le mouvement en déclinaison du Soleil;

α_1 le mouvement relatif en ascension droite de la Lune;

ι l'inclinaison de l'orbite relative NN′ sur un parallèle passant par le point C ou l'angle CSS_1;

ω l'angle compris entre la distance des centres SL et la perpendiculaire SS_1 à l'orbite relative ou l'angle LSS_1. Cet angle est toujours compté du côté nord de l'arc SS_1, en sorte que, quand NN′ tombe au-dessous du point S ou quand la différence des déclinaisons CS est négative, ω excède 90°.

En se reportant à la *fig.* 27, où, d'après les notations qui précèdent,

$$L_1 l = D_1, \quad L l = \alpha_1 \cos D, \quad L_1 L l = \iota,$$

on a d'abord, par le triangle $L_1 L l$,

$$\operatorname{tang} i = \frac{D_1}{\alpha_1 \cos D}, \quad \text{mouv. horaire dans l'orbite } LL_1 = \frac{D_1}{\sin i}.$$

On a ensuite, par le triangle LSS_1 rectangle en S_1,

$$S_1 S = n = \partial \cos i, \quad LS_1 = n \operatorname{tang} i.$$

Connaissant ainsi la valeur de LS_1, on aura le temps t pendant lequel cette portion d'orbite a été parcourue, ou celui écoulé entre le milieu de l'éclipse générale et le temps de la conjonction en ascension droite, en posant

$$t = \frac{n \operatorname{tang} i}{\text{mouv. horaire dans l'orbite}} = \frac{n \sin i}{D_1} \operatorname{tang} \iota.$$

Soit

$$c = 3600'' \times \frac{n \sin i}{D_1},$$

alors, pour la valeur de t exprimée en secondes, il viendra

$$t = c \operatorname{tang} i.$$

Maintenant, si l'on désigne par T_m le temps du milieu de l'éclipse, il est clair qu'on aura

$$T_m = \text{temps de la conjonction} - t.$$

On a encore, par le triangle LSS_1 (*fig.* 29), considéré comme rectiligne,

$$\cos\omega = \frac{n}{\Delta}, \quad LS_1 = n \tang\omega;$$

d'où l'on déduit, pour le temps τ exprimé en secondes, temps pendant lequel la portion d'orbite LS_1 a été parcourue,

$$\tau = c \tang\omega;$$

on a ensuite :

Époque du commencement de l'éclipse.. $T_m - \tau$
Époque de la fin de l'éclipse........... $T_m + \tau$

Posons $PSZ = a$ pour le commencement de la phase et $PSZ' = b$ pour la fin, ces angles étant comptés du Nord vers l'Est. Nous aurons

$$a = (-i) - \omega,$$
$$b = (-i) + \omega,$$

et comme, dans ces deux cas, le Soleil est à l'horizon (ce qui rend les arcs ZS et Z'S très peu différents de 90°), on en conclut, par les triangles PZS et PZ'S,

$$\cos PZ = \cos PSZ \sin PS,$$
$$\cos PZ' = \cos PSZ' \sin PS,$$
$$\tang ZPS = -\frac{\tang PSZ}{\cos PS},$$
$$\tang Z'PS = -\frac{\tang PSZ'}{\cos PS},$$

c'est-à-dire que l'on a, en désignant par l et l' les latitudes des zéniths, par h et h' les angles horaires du Soleil au commencement et à la fin de la phase, et par $\textcircled{D}$ la déclinaison au moment de la conjonction,

$$\sin l = \cos a \cos\textcircled{D},$$
$$\tang h = -\frac{\tang a}{\sin\textcircled{D}},$$
$$\sin l' = \cos b \cos\textcircled{D},$$
$$\tang h' = -\frac{\tang b}{\sin\textcircled{D}}.$$

Dans ces formules, les angles horaires h et h' sont comptés à partir du Soleil, dans la direction de l'Est, en sorte que les longitudes des lieux qui voient commencer ou finir l'éclipse seront déterminées en retranchant respectivement de ces angles le temps moyen de Paris (réduit en degré et minutes) qui convient au commencement et à la fin de la phase, et en observant que les différences positives indiquent des longitudes *Est* et les différences négatives des longitudes *Ouest*.

Nous allons présenter une application des formules qui précèdent à la détermination des lieux qui voient commencer et finir les diverses phases de l'éclipse totale de Soleil du 16 avril 1874.

On déduit de la *Connaissance des Temps* les éléments suivants, exprimés en temps moyen de Paris :

1874.	16 avril.
	h m s
Temps de la conjonction en ascension droite.........	1.26.24,5
Ascension droite de la ☾ et du ⊙....................	1.37.47,94
	° ′ ″
Déclinaison de la ☾ au moment de la conjonction....	9.13.40,2 B
Déclinaison du ⊙ au moment de la conjonction......	10.10.54,5 B
Mouvement horaire en ascension droite de la ☾......	34.26,9
Mouvement horaire en ascension droite du ⊙........	2.18,9
Mouvement horaire en déclinaison de la ☾..........	16.55,4 B
Mouvement horaire en déclinaison du ⊙	53,1 B
Parallaxe horizontale équatoriale de la ☾...........	61.12,8
Parallaxe horizontale équatoriale du ⊙.............	8,9
Demi-diamètre vrai de la ☾.........................	16.42,4
Demi-diamètre vrai du ⊙............................	15.57,8

On a ensuite

Calcul de ∂, α_1, D_1 et P′.

	° ′ ″
Déclinaison de ☾....	+ 9.13.40,2
Déclinaison du ⊙....	+10.10.54,5
∂	—57.14.3

	′ ″
Mouvement horaire en ascension droite de la ☾...............	34.26,9
Mouvement horaire en ascension droite du ⊙.	2.18,9
α_1	32. 8,0

	′ ″
Mouvement horaire en déclinaison de la ☾.	+16.55,4
Mouvement horaire en déclinaison du ⊙...	+ 53,1
D_1............	+16. 2,3

	′ ″
Parallaxe horizontale éq.. de la ☾...............	61.12,8
Parallaxe horizontale éq.. du ⊙.................	8,9
Parall. équat. relat. de la ☾.	61. 3,9

log 61′3″	3,56394
log nombre constant	9,99929
log P′	3,56323
P′	60′58″

Calcul de T_m *(temps du milieu de l'éclipse).*

D_1	+ 16°. 2′. 2″,3	log D_1	2,98331
α_1	32. 8,0	log α_1	3,28511
D	9.13.40		9,69820
		log cos D	9,99435
		log tang i	9,70384

$$i = 26°49'24'',$$

log cos i	9,95056
log ∂	3,53584
log n	3,48640—

$$n = -51'4'',7.$$

log n	3,48640—
log sin i	9,65441
log nombre constant	3,55630
	6,69711—
— log D_1	2,98331
log c	3,71380
log tang i	9,70385
log t	3,41765
	h m s
t	—0.43.36
♂	1.26.24
Temps du milieu de l'éclipse T_m.	2.10.00

Position des lieux qui voient commencer et finir l'éclipse centrale et heures de ces instants.

On doit prendre ici $P' = 60'58'' = \Delta$; dès lors on a

		log n	3,48640—		
		log Δ	3,56324+		
ω	146°,55′	log cos ω	9,92316—		
		log tang ω	9,81390	$-i$	— 26°.49′.24″
		log c	3,71380	ω	146.55.00
		log τ	3,52770	a	—173.44.24
				b	+120. 5.36

	h m s	
τ	0.56.11	
T_m	2.10.00	
H_c	1.13.49	pour le commencement
H_f	3. 6.11	pour la fin

Commencement de l'éclipse.

Latitude				Longitude.	
a....	$-173^\circ.44'.24''$	log cos a...	9,99740—	log tang a..	9,04017+
$\mathfrak{D}$....	10.10.55	log cos $\mathfrak{D}$...	9,99310+	log sin $\mathfrak{D}$...	9,24740+
		log sin l....	9,99050—	log tang h..	—9,79277

	° ′		h m s
Latitude géocentrique l.	78.4	H_c	1.13.49
Réduction, Table XII...	5	Équation du temps.	14
Latitude géographique..	78.9 Sud	H_c	1.14. 3
		H_c en arc........	+18°.31′

	° ′
h	—31.49
H_c	+18.31
Longitude	50.20 Ouest

Fin de l'éclipse.

Latitude.				Longitude.	
b....	$+120^\circ.\ 5'.36''$	log cos b...	9,70019—	log tang b..	0,23690—
$\mathfrak{D}$...	10.10.55	log cos $\mathfrak{D}$..	9,99310+	log sin $\mathfrak{D}$...	9,24740+
		log sin l'....	9,69329—	log tang h'..	+0,98950

	° ′		h m s
Latitude géocentrique l'.	29.34	H_f	3. 6.11
Réduction, Table XII...	10	Équation du temps.	14
Latitude géographique..	29.44 Sud	H_f en temps.....	3. 6.25
		H_f en arc........	46°36′

	° ′
h'	+84. 9
H_f	+46.36
Longitude	37.33 Est

La position des autres lieux, qui se rapportent au commencement et à la fin de l'éclipse partielle, s'obtiendrait par un calcul semblable à celui que nous venons de faire pour l'éclipse centrale. Il faudrait seulement prendre ici

$$\Delta = P' + \delta + d = 93'38'',$$

et l'on trouverait

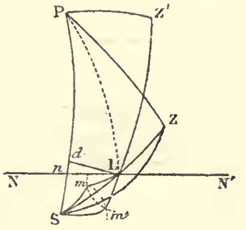
Commencement de l'éclipse générale le 15 avril à $23^h 57^m,5$ dans le lieu dont la position est : longitude 73°33′O.; latitude 58°31′ S.

Fin de l'éclipse générale à $4^h 22^m,5$ dans le lieu dont la position est : longitude 23°9′E.; latitude 6°10′S.

VIII. — Courbes-limites des points où l'éclipse générale commence ou finit au lever ou au coucher du Soleil.

Soient L (*fig.* 30) la position vraie de la Lune sur son orbite relative à un instant t compris entre le commencement et la fin de l'éclipse partielle, et S la position vraie du Soleil. Prenons $Sm = Sm' = \Delta'$, $Lm = Lm' = P'$ et soit $mZ = m'Z' = 90°$. En Z ou Z′, la Lune apparaît aux points m ou m' et l'on a un simple contact extérieur avec le Soleil à l'horizon. A d'autres instants t_1, t_2, t_3, ..., compris entre les mêmes limites et pour les mêmes valeurs de Δ' et de P', répondent d'autres points intermédiaires (Z_1, Z'_1), (Z_2, Z'_2), (Z_3, Z'_3), ...; et l'ensemble de tous ces points constitue la *courbe-limite des lieux voyant la phase au lever ou au coucher du Soleil.* Maintenant, si l'on remarque que les arcs Lm et Lm' sont dans le prolongement de ceux LZ et LZ′, on voit qu'il faut, pour que les points Z et Z′ puissent exister, qu'il soit possible de construire les deux triangles SmL et $Sm'L$, ce qui exige évidemment que l'on ait pour le point Z′, par exemple,

Fig. 30.



$$SL < Sm + mL \quad \text{et} \quad SL > mL - Sm,$$

ou

$$\Delta < P' + \Delta' \quad \text{et} \quad \Delta > P' - \Delta'.$$

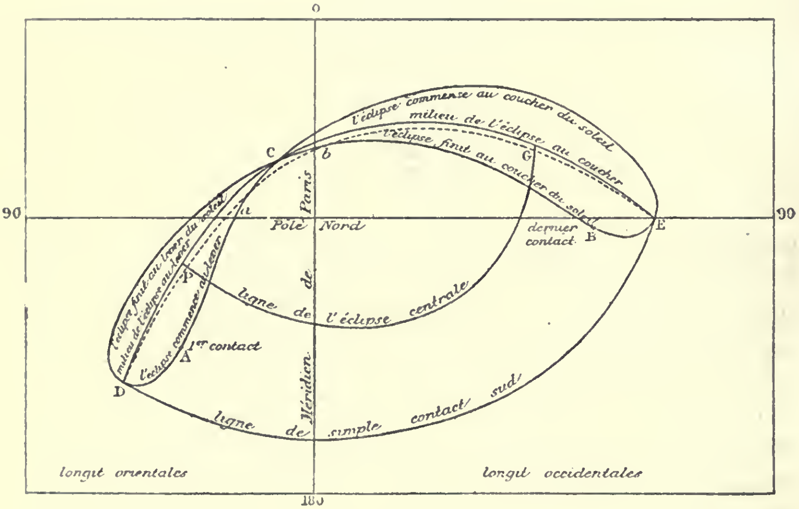
De là deux espèces de courbes, suivant qu'on a

$$P' - \Delta' < n \quad \text{ou} \quad P' - \Delta' > n,$$

n désignant la perpendiculaire Sn menée à l'orbite relative par le point S.

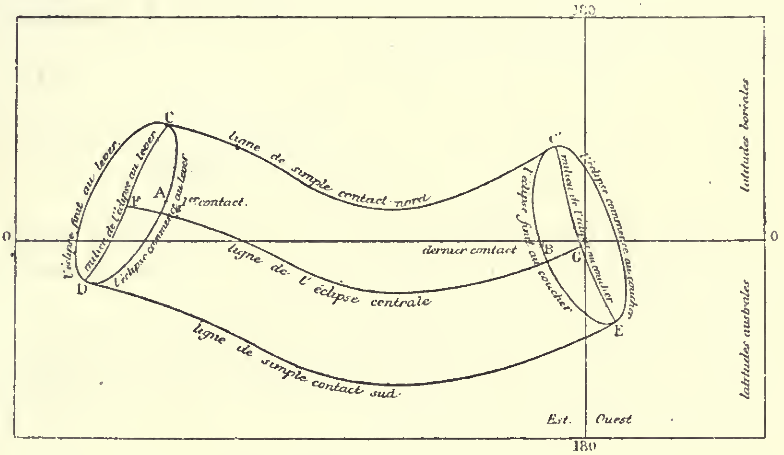
1° Soit d'abord $P' - \Delta' < n$. Dans ce cas, la formation des triangles SmL, $Sm'L$ est toujours possible pendant l'apparition de la phase sur la Terre, et l'instant du commencement ou de la fin est marqué par la condition $\Delta = P' + \Delta'$. Le triangle LmS se réduit à une simple ligne SL, et il n'y a qu'un seul zénith voyant commencer la phase et qu'un seul zénith la voyant finir. Quant aux positions de la Lune sur son orbite relative, chacune d'elles donnera lieu à deux positions Z et Z′ voyant la phase. Les deux points Z et Z′ partant d'un même point A (*fig.* 31) décriront donc, dans le sens opposé au mouvement de la Terre, deux courbes qui, après s'être coupées en C, puis divisées de nouveau, viendront se réunir en un même point B, de manière à donner à l'ensemble de la ligne décrite la figure d'un 8 déformé. Le lieu C, intersection des deux branches, est celui où la phase commence au lever du Soleil et finit au coucher de cet astre, ou commence au coucher du Soleil et se termine à son lever.

Fig. 31.


0
90
90
180
C
b
G
a
P
A
D
E
B
Paris
Pole Nord
l'éclipse commense au coucher du soleil
milieu de l'éclipse au coucher
l'éclipse finit au coucher du soleil
dernier contact
l'éclipse finit au lever du soleil
milieu de l'éclipse au lever
l'éclipse commence au lever
1er contact
ligne de l'éclipse centrale
Méridien de
ligne de simple contact sud
longit orientales
longit occidentales

2° Soit $P' - \Delta' > n$. Ici les deux triangles SmL et $Sm'L$ se réduisent à une seule ligne SL, quand $\Delta = P' + \Delta'$ et aussi quand $\Delta = P' - \Delta'$, et chacune de ces positions ne donne qu'un seul zénith Z. Dans ce cas, le point Z décrit deux ovales *distincts* et *séparés* (*fig.* 32), formés, le premier par les valeurs décroissantes de $P' + \Delta'$ à $P' - \Delta'$ et le second par les valeurs croissantes de $P' - \Delta'$ à $P' + \Delta'$. Le premier point du premier ovale et le dernier point du second ovale sont les positions où la phase commence et finit sur la Terre. Le dernier point du premier ovale et le premier point du second ovale sont simplement déterminés par la relation $\Delta = P' - \Delta'$ et calculés de la même manière que pour le commencement et la fin d'une phase sur la Terre.

Fig. 32.


180
latitudes boréales
C
C'
l'éclipse finit au lever
milieu de l'éclipse au lever
l'éclipse commence au lever
F
A
1er contact.
ligne de simple contact nord
l'éclipse finit au coucher
milieu de l'éclipse au coucher
l'éclipse commence au coucher
0
0
dernier contact
B
G
D
E
ligne de l'éclipse centrale
ligne de simple contact sud
latitudes australes
Est.
Ouest
180

Proposons-nous actuellement de déterminer les positions des deux lieux Z et Z', qui répondent à une époque quelconque comprise dans l'intervalle de temps relatif à chaque ovale.

Supposons qu'ayant tiré l'arc ZS (*fig.* 30), et mené Ld perpendiculairement à PS, on fasse $Sd = (x)$, $Ld = (y)$ et $d\text{SL} = \text{S}$, cet angle S étant compté à partir de SP vers l'Est.

Représentons, de plus, par (D) la déclinaison du point d, laquelle excède un peu celle du point L. Nous donnons, à la fin de ce Volume, une Table (la Table X) des valeurs de $[(D) - D]$, dénotées par α *correct.* et à l'aide de laquelle on peut déterminer (D) quand D est connu. On y entre avec les angles α et D comme arguments.

On a d'abord, par le triangle sphérique PdL rectangle en d,

$$\operatorname{tang}(D) = \frac{\operatorname{tang} D}{\cos \alpha},$$

D étant la déclinaison de la Lune et α la différence des ascensions droites du Soleil et de la Lune. On a ensuite

$$(x) = (D) - (\odot), \quad (y) = \alpha \cos(D) \quad (^1),$$

$$\operatorname{tang} S = \frac{(y)}{(x)}, \quad \Delta = \frac{(y)}{\sin S} = \frac{(x)}{\cos S};$$

le quadrant auquel S appartient est déterminé par les signes de (x) et (y).

t désignant le temps écoulé depuis le milieu de l'éclipse générale jusqu'au moment considéré, on a encore, pour déterminer Δ, S, (x) et (y), les relations suivantes, qui se déduisent de celles établies dans le paragraphe précédent,

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{t}{c}, \quad \Delta = \frac{n}{\cos \omega},$$

$$S = (-i) \mp \omega, \quad (x) = \Delta \cos S, \quad (y) = \Delta \sin S.$$

Le signe supérieur dans la valeur de S se rapporte au temps qui précède le milieu de l'éclipse, et le signe inférieur au temps qui suit ce milieu.

Considérons maintenant le triangle mLS, qui, à cause de la petitesse des côtés Lm = P′, Sm = Δ′ et SL = Δ, peut être considéré comme rectiligne et posons

$$p = \frac{1}{2}(P' - \Delta'), \quad q = \frac{1}{2}(P' + \Delta').$$

En désignant par φ l'angle mLS, on aura

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\Delta - p\right)\left(q - \frac{1}{2}\Delta\right)}{P'\Delta}}.$$

---

[1] Cette expression de (y) résulte de la considération du triangle sphérique rectangle Pdl, lequel donne

$$\operatorname{tang}(y) = \operatorname{tang}\alpha \cos(D),$$

ou bien, en remarquant que (y) et α sont de très petits arcs,

$$(y) = \alpha \cos(D).$$

Comme les arcs ZS et Zm sont sensiblement égaux à 90°, on peut les supposer parallèles à leurs extrémités, et faire

$$\mathrm{ZSL} = m\mathrm{LS} = \varphi.$$

Dès lors

$$\mathrm{NSZ} = \mathrm{S} \pm \varphi,$$

et les deux triangles PSZ et PSZ′ donnent, pour déterminer la position des lieux Z et Z′,

$$[\mathrm{Z}] \qquad \sin l = \cos\omega \cos(\mathrm{S} - \varphi), \quad \operatorname{tang} h = -\frac{\operatorname{tang}(\mathrm{S} - \varphi)}{\sin\omega},$$

$$[\mathrm{Z}'] \qquad \sin l = \cos\omega \cos(\mathrm{S} + \varphi), \quad \operatorname{tang} h = -\frac{\operatorname{tang}(\mathrm{S} + \varphi)}{\sin\omega}.$$

Soit H l'heure vraie de Paris, on aura

$$\text{longitude Est} = h - \mathrm{H},$$

h étant toujours dans le même demi-cercle que S — φ pour le premier lieu, et dans le même demi-cercle que S + φ pour le second.

Faisons une application des formules qui précèdent à l'éclipse de Soleil du 16 avril 1874.

Nous avons vu que le commencement de l'éclipse générale avait lieu à $23^{\mathrm{h}}57^{\mathrm{m}},5$ et à la fin à $4^{\mathrm{h}}22^{\mathrm{m}},5$. C'est donc pour un temps compris entre ces deux époques que nous pouvons nous proposer de déterminer la position des lieux correspondants Z et Z′. Prenons, comme exemple, l'époque $1^{\mathrm{h}}0^{\mathrm{m}}0^{\mathrm{s}}$: on a

P'	60′.58″	
$\delta + d = \Delta'$	32.40	
$\mathrm{P}' - \Delta'$	28.18	$p = 14'\ 9''$
$\mathrm{P}' + \Delta'$	93.38	$q = 46'49''$

Nous avons trouvé $n = -51'4'',7$: ainsi $n > \mathrm{P}' - \Delta'$,

	h m
Temps considéré	1.00
Temps du milieu	2.10
t	1.10

− i....	− 26°.49′
− ω...	−140.56
S......	−167.45
φ......	29.33
S − φ..	197.18
S + φ..	−138.12

		log t...........	3,62325	
		log c	3,71380	
		log tang ω.......	9,90945	ω.. 140°56′
		log cos ω........	9,89009−	
		log n	3,48640−	
Δ.....	1°. 5′.47″	log Δ.....	3,59631+	
½Δ.....	32.54	compl. de log Δ...	6,40369	
½Δ − p.	18.45	log.............	3,05115	
q − ½Δ.	13.55	log.............	2,92169	
		compl. de log P′.	6,43676	
			18,81329	
½φ.....	14.46.40	sin ½φ	9,40665	

φ = 29°33′20″.

Position du lieu Z.

	Longitude.				Latitude.
log tang(S − φ).	9,49341−	Temps de Paris.	1h. 0m	log cos(S − φ).	9,97989−
log sin Ⓓ.......	9,24740+	Équ. de temps .	14	log cos Ⓓ......	9,99310+
log tang h.......	8,74081	H en temps. ..	1.14	log sin l.......	9,97299−
		en arc.......	18°30′		

h............	− 3°. 9′	l............	70°.0′ Sud
H	18.30	Réduction ...	7
Longitude....	21.39 Ouest	Latitude.....	70.7 Sud

Position du lieu Z′.

	Longitude.		Latitude.
log tang(S + φ).	9,95139+	log cos(S + φ).	9,87243−
log sin Ⓓ	9,24740+	log cos Ⓓ......	9,99310+
log tang h.......	−9,19879	log sin l.......	9,86553−

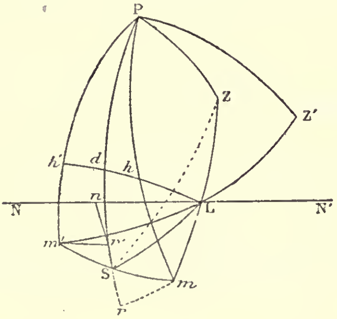
h.............	− 8°.59′	l	47°.12′ Sud
H.............	18.30	Réduction.....	11
Longitude	27.29 Ouest	Latitude	47.23 Sud

IX. — Lignes de simple contact nord et sud

Les intersections du cône de pénombre avec la Terre, considérées à différents instants successifs, déterminent, sur la surface du globe, une série d'ovales embrassant une zone, dont les courbes, dites de *simple contact* au *nord* et au *sud,* forment l'enveloppe. Ceci a particulièrement lieu quand $n < P' - \Delta'$, c'est-à-dire lorsque toutes les génératrices du cône viennent à rencontrer la Terre. Quand $n > P' - \Delta'$ ou lorsque le cône de pénombre ne rencontre pas entièrement la Terre, une seule de ces lignes se trouve tracée sur sa surface; elle est située du côté sud si la différence de déclinaison de la Lune et du Soleil est négative, et du côté nord si cette différence de déclinaison est positive. Dans ce cas, nous avons vu que la courbe des lieux qui voient la phase au lever et au coucher du Soleil avait la forme d'un 8 distordu.

Soient S (*fig.* 33) la position du Soleil à un instant donné,

Fig. 33.



L la position de la Lune sur son orbite relative, Z et Z' les zéniths des lieux respectivement situés sur les courbes limites nord et sud, et m, m' les positions apparentes correspondantes de la Lune.

Menons les méridiens Pm', Pm, PS, PZ, PZ' ainsi que les arcs mr, $m'r'$, $Lhdh'$, perpendiculaires à PS, et soient $Sd = (x)$, $Ld = (y)$, $mh = x$, $Lh = y$, $Sr = u$, $mr = v$, $Sm = \Delta'$, $Zm = Z$, $PmZ = M$, $mPS = \alpha'$. Désignons en outre par D' la déclinaison du point m, par l la latitude du lieu Z et par h l'angle horaire ZPS.

Nous allons chercher d'abord la condition qui doit exister entre les coordonnées u et v du point m et le temps t, pour que ce point puisse être la position apparente de la Lune au moment du milieu de l'éclipse.

Il faut évidemment, pour cela, que la distance apparente Δ' des deux centres, pour le lieu Z, soit la plus petite possible ou que l'on ait

$$\frac{d\Delta'}{dt} = 0,$$

condition que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} = 0, \tag{1}$$

en remarquant que $\Delta'^2 = u^2 + v^2$.

Or, en considérant le triangle sphérique PZm (*fig.* 33), on a

$$\mathrm{P}m = 90^\circ - \mathrm{D}', \quad \mathrm{PZ} = 90^\circ - l,$$
$$m\mathrm{PZ} = h - \alpha', \quad m\mathrm{L} = \mathrm{P}' \sin \mathrm{Z},$$
$$x = m\mathrm{L} \cos \mathrm{M} = \mathrm{P}' \sin \mathrm{Z} \cos \mathrm{M}, \quad y = m\mathrm{L} \sin \mathrm{M} = \mathrm{P}' \sin \mathrm{Z} \sin \mathrm{M}.$$

On a de plus

$$\sin m\mathrm{PZ} \cot \mathrm{M} = \cot \mathrm{PZ} \sin \mathrm{P}m - \cos \mathrm{P}m \cos m\mathrm{PZ},$$

ou, en vertu de la relation qui doit exister entre les sinus des angles et les sinus des côtés opposés,

$$\begin{aligned}\sin \mathrm{Z} \cos \mathrm{M} &= \cos \mathrm{PZ} \sin \mathrm{P}m - \cos \mathrm{P}m \cos m\mathrm{PZ} \sin \mathrm{PZ} \\ &= \sin l \cos \mathrm{D}' - \sin \mathrm{D}' \cos l \cos(h - \alpha').\end{aligned}$$

On aurait de même

$$\sin \mathrm{Z} \sin \mathrm{M} = \cos l \sin(h - \alpha').$$

Ainsi,

$$mh = x = \mathrm{P}'[\sin l \cos \mathrm{D}' - \sin \mathrm{D}' \cos l \cos(h - \alpha')],$$
$$\mathrm{L}h = y = \mathrm{P}'[\cos l \sin(h - \alpha')].$$

Comme, d'après la figure,

$$u = mh - \mathrm{S}d = x - (x),$$
$$v = \mathrm{L}d - \mathrm{L}h = (y) - y,$$

on en conclut

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \mathrm{S}r = \mathrm{P}'[\sin l\cos \mathrm{D}' - \sin \mathrm{D}'\cos l\cos(h-\alpha')] - (x),\\ v &= hd = (y) - \mathrm{P}'\cos l\sin(h-\alpha').\end{aligned}\right.$$

Maintenant, si l'on différentie ces valeurs de u et de v par rapport à t, et qu'on remarque que l'angle horaire h varie à raison de 15° par heure, on aura

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\mathrm{P}'\sin 1''\frac{d\mathrm{D}'}{dt}[\sin l\sin \mathrm{D}' + \cos l\cos \mathrm{D}'\cos(h-\alpha')]\\ &\qquad + \mathrm{P}'\sin 1''\left(15^\circ - \frac{d\alpha'}{dt}\right)\cos l\sin \mathrm{D}'\sin(h-\alpha') - \frac{d(x)}{dt},\\ \frac{dv}{dt} &= \frac{d(y)}{dt} - \mathrm{P}'\sin 1''\left(15^\circ - \frac{d\alpha'}{dt}\right)\cos l\cos(h-\alpha'),\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\mathrm{P}'\sin 1''\frac{d\mathrm{D}'}{dt}\cos \mathrm{Z} + \mathrm{P}'\sin 1''\left(15^\circ - \frac{d\alpha'}{dt}\right)\sin \mathrm{D}'\sin \mathrm{Z}\sin \mathrm{M} - \frac{d(x)}{dt},\\ \frac{dv}{dt} &= \frac{d(y)}{dt} - \mathrm{P}'\sin 1''\left(15^\circ - \frac{d\alpha'}{dt}\right)(\cos \mathrm{Z}\cos \mathrm{D}' - \sin \mathrm{Z}\sin \mathrm{D}'\cos \mathrm{M}).\end{aligned}$$

Mais les quantités $\mathrm{P}'\sin 1''\frac{d\mathrm{D}'}{dt}$, $\mathrm{P}'\sin 1''\frac{d\alpha'}{dt}$, étant très petites par rapport à celles $\mathrm{P}'15^\circ\sin 1''$, $\frac{d(x)}{dt}$ et $\frac{d(y)}{dt}$, on peut les supprimer et écrire en outre $\mathcal{D}$ au lieu de D', ce qui donne

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \mathrm{P}'\,15^\circ\sin 1''\sin \mathcal{D}\sin \mathrm{Z}\sin \mathrm{M} - \frac{d(x)}{dt},\\ \frac{dv}{dt} &= \frac{d(y)}{dt} - \mathrm{P}'\,15^\circ\sin 1''(\cos \mathrm{Z}\cos \mathcal{D} - \sin \mathrm{Z}\sin \mathcal{D}\cos \mathrm{M});\end{aligned}\right.$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} u&\left[\mathrm{P}'15^\circ\sin 1''\sin \mathcal{D}\sin \mathrm{Z}\sin \mathrm{M} - \frac{d(x)}{dt}\right]\\ &+ v\left[\frac{d(y)}{dt} - \mathrm{P}'15^\circ\sin 1''(\cos \mathrm{Z}\cos \mathcal{D} - \sin \mathrm{Z}\sin \mathcal{D}\cos \mathrm{M})\right] = 0,\end{aligned}$$

ou bien, en remplaçant $\mathrm{P}'\sin \mathrm{Z}\cos \mathrm{M}$ par $(x) + u$, $\mathrm{P}'\sin \mathrm{Z}\sin \mathrm{M}$ par $(y) - v$ et effectuant les réductions,

$$\begin{aligned} u&\left[15^\circ\sin 1''(y)\sin \mathcal{D} - \frac{d(x)}{dt}\right]\\ &+ v\left[15^\circ\sin 1''(x)\sin \mathcal{D} + \frac{d(y)}{dt}\right] - \mathrm{P}'v\,15^\circ\sin 1''\cos \mathrm{Z}\cos \mathcal{D} = 0\end{aligned}$$

C'est la condition cherchée entre u, v, P', $\textcircled{D}$ et Z. Nous allons en déduire une relation entre Z et l'inclinaison i' que fait l'orbite relative apparente avec le parallèle de déclinaison mené par le point S.

On a, d'après ce qu'on a vu au § VIII,

$$(x) = (D) - \textcircled{D}, \quad (y) = \alpha \cos(D),$$

équations qui, étant différentiées par rapport à t, donnent, en négligeant les variations de $\textcircled{D}$ et de $\cos(D)$ et appelant D la déclinaison de la Lune au moment de la conjonction vraie, α_1 son mouvement relatif en ascension droite, et D_1 son mouvement relatif en déclinaison,

$$\frac{d(x)}{dt} = D_1, \quad \frac{d(y)}{dt} = \alpha_1 \cos D.$$

On a, par suite,

$$v \cos\textcircled{D} \cos Z - \frac{u}{P'}\left[(y)\sin\textcircled{D} - \frac{D_1}{15^{\circ}\sin 1''}\right] + \frac{v}{P'}\left[(x)\sin\textcircled{D} + \frac{\alpha_1 \cos D}{15^{\circ}\sin 1''}\right] = 0.$$

Soient

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
(A) &= \frac{\alpha_1 \cos D}{15^{\circ}\sin 1''} = (0,58204)\alpha_1 \cos D,\\
(B) &= \frac{D_1}{15^{\circ}\sin 1''} = (0,58204) D_1,\\
\lambda \sin\nu &= \frac{(B) - (y)\sin\textcircled{D}}{P'\cos\textcircled{D}},\\
\lambda \cos\nu &= \frac{(A) + (x)\sin\textcircled{D}}{P'\cos\textcircled{D}},
\end{aligned}\right.$$

expressions dans lesquelles les quantités (A) et (B) peuvent être regardées comme constantes pendant toute la durée de l'éclipse. On aura

$$\cos Z - \frac{\lambda}{v}(-u \sin\nu + v \cos\nu) = 0.$$

L'angle rSm étant égal à i', il en résulte

$$u = \Delta' \cos i', \quad v = \Delta' \sin i';$$

par conséquent,

$$(5)\qquad \cos Z = \frac{\lambda \sin(i' - \nu)}{\sin i'}.$$

C'est la relation que nous voulions obtenir entre Z et i'.

Puisque

$$\mathrm{LS}d = \mathrm{S},\quad \mathrm{LS}m = 180^\circ - (\mathrm{S} + i'),\quad \mathrm{LS}m' = \mathrm{S} + i',$$

on en conclut par le triangle LSm, considéré comme plan,

$$\mathrm{L}m^2 = \mathrm{P}'^2 \sin^2 \mathrm{Z} = \Delta^2 + \Delta'^2 \pm 2\Delta\Delta' \cos(\mathrm{S} + i'),$$

d'où

$$(6)\qquad \sin^2 \mathrm{Z} = \frac{\Delta^2 + \Delta'^2}{\mathrm{P}'^2} \pm \frac{2\Delta\Delta'}{\mathrm{P}'^2} \cos(\mathrm{S} + i'),$$

le signe supérieur ayant lieu aux limites nord et le signe inférieur aux limites sud. En élevant l'équation (5) au carré et l'ajoutant à celle (6), on obtient

$$(7)\qquad \frac{\lambda^2 \sin^2(i' - \nu)}{\sin^2 i'} \pm \frac{2\Delta\Delta'}{\mathrm{P}'^2} \cos(\mathrm{S} + i') + \frac{\Delta^2 + \Delta'^2}{\mathrm{P}'^2} = 1.$$

Comme une petite erreur dans la valeur de l'angle i' ne peut pas influer d'une manière sensible sur la valeur de Z, on peut considérer l'angle i comme étant égal à celui i', et dès lors on a, pour déterminer l'angle Z (*fig.* 33),

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
& u = \Delta' \cos i, \quad \mathrm{D}' = \mathfrak{D} \mp u,\\
& v = \Delta' \sin i, \quad \alpha' = \pm \frac{v}{\cos \mathrm{D}'}, \quad (\mathrm{D}) = \mathrm{D} + (\alpha - \alpha')\ \text{correct.},\\
& y = (\alpha - \alpha') \cos(\mathrm{D}), \quad x = (\mathrm{D}) - \mathrm{D}',\\
& \operatorname{tang} \mathrm{M} = \frac{y}{x}, \quad \sin \mathrm{Z} = \frac{x}{\mathrm{P}' \cos \mathrm{M}} = \frac{y}{\mathrm{P}' \sin \mathrm{M}},
\end{aligned}\right.$$

le signe supérieur dans les valeurs de D′ et de α' se rapportant aux limites nord, et le signe inférieur aux limites sud.

On peut encore obtenir Z et M à l'aide des formules suivantes, plus simples que les précédentes, bien qu'un peu moins exactes.

Soient t l'intervalle de temps écoulé depuis le milieu de l'éclipse générale jusqu'au moment considéré et ω' l'angle formé par l'arc Lm et la plus courte distance n des centres.

On a

$$\mathrm{L}m \sin \omega' = n \operatorname{tang} \omega = n \frac{t}{c} \quad \text{et} \quad \mathrm{L}m \cos \omega' = n \pm \Delta',$$

équations qui, en y remplaçant Lm par P′ sin Z, peuvent s'écrire

$$\mathrm{P}' \sin \mathrm{Z} \sin \omega' = n \frac{t}{c}, \quad \mathrm{P}' \sin \mathrm{Z} \cos \omega' = n \pm \Delta'.$$

On déduit de là

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{nt}{c(n \pm \Delta')}, \quad \sin Z = \frac{n \pm \Delta'}{P' \cos\omega'},$$

et, en posant

$$E = \frac{n}{c(n \pm \Delta')}, \quad F = \frac{n \pm \Delta'}{P'},$$

on obtient

$$(9) \qquad \operatorname{tang}\omega' = tE, \quad \sin Z = \frac{F}{\cos\omega'}, \quad M = (-i) \mp \omega',$$

le signe de E et de F étant le même que celui de $n \pm \Delta'$.

Une fois M et Z déterminés, on obtient la longitude l et la latitude h du lieu cherché par la considération du triangle sphérique ZmP (*fig.* 33), dans lequel $Zm = Z$, $Pm = 90° - D'$ et $PmZ = M$. On a, en effet, par ce triangle,

$$\cot Z \cos D' = \sin D' \cos M + \sin M \cot(h - \alpha'),$$

d'où

$$\cot(h - \alpha') = \frac{\cos D'}{\dfrac{\operatorname{tang} Z \cos M}{\operatorname{tang} M}} - \sin D'.$$

Soit

$$(10) \qquad \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang} Z \cos M,$$

alors on aura

$$(11) \qquad \operatorname{tang}(h - \alpha') = \frac{\sin\theta}{\cos(\theta + D')} \operatorname{tang} M.$$

On a ensuite

$$\sin l = \cos Z \sin D' + \cos D' \sin Z \cos M,$$

relation qu'on peut écrire sous cette forme

$$\operatorname{tang} l = \cos D' \frac{\sin Z}{\cos l} \cos M + \frac{\sin D' \cos M \sin Z}{\operatorname{tang} Z \cos M \cos l};$$

ou sous celle-ci

$$\operatorname{tang} l = \frac{\cos D' \sin(h - \alpha')}{\operatorname{tang} M} + \frac{\sin D' \sin(h - \alpha')}{\operatorname{tang} Z \cos M \operatorname{tang} M},$$

en remarquant que $\dfrac{\sin Z}{\cos l} = \dfrac{\sin(h - \alpha')}{\sin M}$. Par la substitution de $\operatorname{tang}\theta$ à la place de $\operatorname{tang} Z \cos M$ et eu égard à la relation (11), on aura donc

$$\tan l = \tan(\theta + D')\cos(h - \alpha'). \tag{12}$$

Comme moyen de vérification, on a

$$\frac{\sin\theta}{\cos(\theta + D')} = \frac{\sin Z \cos M}{\cos(h - \alpha')\cos l},$$

formule bien aisée à démontrer.

Les valeurs de Z et de M déterminées par ce qui précède sont suffisamment approchées pour le but qu'on se propose. On pourrait cependant en obtenir de plus exactes en introduisant dans les équations (8), à la place de i, la valeur i' de cet angle déterminée par la relation (5), qui devient

$$\cot i' = \cot\nu - \frac{\cos Z}{\lambda \sin\nu}, \quad \text{d'où} \quad \tan i' = \frac{\tan\nu}{\cos 2\varphi}, \tag{13}$$

en posant

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{\cos Z}}{2\lambda \cos\nu}.$$

Dans le cas où l'on voudrait atteindre à toute l'exactitude possible, ce qu'il y aurait de plus simple à faire, ce serait évidemment de déterminer, par un premier calcul, la position approchée des lieux et de calculer, pour l'instant considéré, α et D. La parallaxe P' étant ensuite obtenue au moyen du rayon vecteur (Table IX), et l'augmentation du demi-diamètre de la Lune ayant été déterminée à l'aide de la valeur approchée de Z (Table XI), on aurait suivant les cas $\Delta' = \delta' \pm d$ ou $\Delta' = d - \delta'$, et de là résulteraient déjà pour λ et ν des valeurs plus exactes. On calculerait ensuite l'angle i' à l'aide des formules (13), et alors M et Z seraient fournis par les équations (8) dans lesquelles on remplacerait i par i'.

Occupons-nous actuellement de déterminer la position géographique des lieux correspondant aux points extrêmes des courbes de simple contact nord et sud, points qui appartiennent, comme nous l'avons déjà dit, aux courbes du lever et du coucher. Comme à ces points limites on a évidemment $Z = 90°$, il en résulte, équation (6),

$$P'^2 = \Delta^2 + \Delta'^2 \pm 2\Delta\Delta' \cos(S + i').$$

Soit $i' = i$, on aura

$$S + i' = S + i = \omega,$$
$$\Delta \cos(S + i) = n,$$

et par conséquent

$$P'^2 = \Delta^2 + \Delta'^2 \pm 2\Delta' n = \Delta^2 - n^2 + (n \pm \Delta')^2 = \Delta^2 \sin^2\omega + (n \pm \Delta')^2,$$

équation qui, étant divisée par $\Delta^2 \cos^2\omega = n^2$, donne

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{1}{n}\sqrt{P'^2 - (n \pm \Delta')^2}.$$

Maintenant, si l'on pose, comme au § VII,

$$c = 3600 \times \frac{n \sin i}{D_1},$$

on aura

$$\text{demi-durée } \tau = c \operatorname{tang}\omega = \frac{c}{n}\sqrt{P'^2 - (n \pm \Delta')^2},$$

ou, sous une forme plus appropriée aux applications,

$$\cos\omega' = \frac{n \pm \Delta'}{P'}, \quad \tau = c\,\frac{P'}{n}\sin\omega'.$$

On déduit de là

Époque de l'entrée = temps du milieu $-\ \tau$,
Époque de la sortie = temps du milieu $+\ \tau$.

Quant aux valeurs de l et de h relatives aux lieux de l'entrée et de la sortie, elles seront déterminées de la même manière que pour les lieux qui voient le commencement et la fin de la phase sur la Terre; seulement, on devra employer ici $\textcircled{D} \mp u$ au lieu de $\textcircled{D}$. Ainsi, l'on aura

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\textcircled{D}' \mp u = D',} \\ \multicolumn{2}{c}{a = (-i) - \omega, \quad b = (-i) + \omega,} \\ \text{puis} & \\ \textit{Lieu de l'entrée.} & \textit{Lieu de la sortie.} \\ \sin l = \cos a \cos D', & \sin l = \cos b \cos D', \\ \operatorname{tang} h = -\dfrac{\operatorname{tang} a}{\sin D'}, & \operatorname{tang} h = -\dfrac{\operatorname{tang} b}{\sin D'}. \end{array}\right.$$

Dans ce qui précède, nous avons supposé $i' = i$, ce qui ne rend qu'approchés les résultats obtenus de cette manière. Si l'on voulait une plus grande exactitude, il faudrait employer la valeur même de i' et prendre la parallaxe P', qui convient à la latitude du lieu obtenue par le premier calcul. Comme $Z = 90^\circ$, on en conclurait, soit par l'équation (13), soit par celle (5), que $i' = \nu$; avec les époques respectives de l'entrée et de la sortie obtenues par la première approximation, on procéderait à une nouvelle détermination des quantités (A), (B), $\lambda \sin \nu$, $\lambda \cos \nu$; on emploierait ν au lieu de i dans les équations (8) et le résultat final serait alors fourni par les dernières équations (14).

X. — Détermination du point d'intersection des courbes relatives aux lieux qui voient commencer ou finir l'éclipse au lever ou au coucher du Soleil.

Lorsque la surface conique ne rencontre pas entièrement la surface de la Terre ou quand $n > P' - \Delta'$, nous avons dit que la courbe-limite des lieux qui voient la phase au lever et au coucher du Soleil avait la figure d'un 8 déformé. Le point d'intersection ou nœud est une position où la phase donnée apparaît au lever et au coucher du Soleil, soit que cette phase commence au lever du Soleil et finisse au coucher, soit qu'au contraire elle commence au coucher et finisse au lever. Occupons-nous de le déterminer.

Soit τ la demi-durée de l'éclipse, laquelle commence et finit avec la phase donnée; $\tau \frac{dh}{dt}$ exprimera évidemment l'arc semi-diurne du Soleil dans l'intervalle de temps τ, et, en considérant le triangle sphérique PZS (*fig.* 33) dans lequel $ZS = 90^\circ$, $ZP = 90^\circ - l$, et $PS = 90^\circ - \mathfrak{D}$, on aura, par l'application du principe fondamental de la Trigonométrie sphérique,

$$-\operatorname{tang} l \operatorname{tang} \mathfrak{D} = \cos\left(\tau \frac{dh}{dt}\right),$$

ou bien

$$-\operatorname{tang} l \operatorname{tang} \mathfrak{D} = \cos(\tau\, 15^\circ),$$

valeur qu'on peut supposer égale à l'unité, à cause de la petitesse de l'arc τ. Or, comme dans cette supposition $l \sim \mathfrak{D} = 90^\circ$, $Z = 90^\circ$, on voit que, pour les valeurs de u, v, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ relatives à l'instant du milieu de l'éclipse, instant qui arrivera à midi ou à minuit, on pourra prendre $\sin Z = 1$ et $M = 0°$ ou $180°$. Dès lors, on aura (équations 2 et 3 du § IX),

$$u = -(x) \pm P', \quad v = (y),$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{d(x)}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d(y)}{dt} \pm P' \, 15° \sin 1'' \sin \textcircled{D}.$$

Appelons μ le mouvement horaire de la Lune sur son orbite relative apparente et i' l'inclinaison que fait le plan de cette orbite avec un parallèle de déclinaison mené par le point S; on aura

$$\mu \cos i' = \frac{dv}{dt}, \quad \mu \sin i' = -\frac{du}{dt},$$

ou, d'après ce qui a été établi au § IX,

$$(1) \qquad \begin{cases} \mu \sin i' = D_1, \\ \mu \cos i' = \alpha_1 \cos D \pm (9,41796) P' \sin \textcircled{D}. \end{cases}$$

Maintenant on a pour la condition de la plus grande phase ou pour celle du milieu de l'éclipse,

$$u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire

$$u \sin i' - v \cos i' = 0,$$

ou

$$[-(x) \pm P'] \sin i' - (y) \cos i' = 0.$$

On a d'ailleurs, t désignant l'intervalle de temps écoulé depuis la conjonction vraie jusqu'au moment considéré,

$$(x) = \partial + t D_1, \quad (y) = t \alpha_1 \cos D;$$

ainsi

$$[(-\partial \pm P') \sin i' - t(D_1 \sin i' + \alpha_1 \cos D \cos i')] = 0.$$

Mais

$$D_1 = \left(\frac{D_1}{\sin i}\right) \sin i, \quad \alpha_1 \cos D = \left(\frac{D_1}{\sin i}\right) \cos i,$$

par conséquent,

$$\left[(-\partial \pm P') \sin i' - t \frac{D_1}{\sin i} \cos(i' \sim i)\right] = 0.$$

Posons

$$k = \frac{-\partial \pm P'}{\cos(i' \sim i)}. \tag{2}$$

On aura

$$t = \frac{k \sin i' \sin i}{D_1},$$

ou, parce que $D_1 = \mu \sin i'$,

$$t = \frac{k}{\mu} \sin i,$$

c'est-à-dire, t étant exprimé en secondes de temps,

$$t = (3.55630)\,\frac{k}{\mu} \sin i. \tag{3}$$

Quand la différence de déclinaison ∂ est négative, $M = 180^\circ$ et c'est le signe inférieur que l'on doit adopter dans la valeur de k. En général, P' doit être pris avec le même signe que ∂.

Comme l diffère peu de $90^\circ \sim Ⓓ$, on peut aussi corriger préalablement la parallaxe horizontale en raison de la latitude.

La valeur de t étant ainsi obtenue, on a pour le temps apparent de la conjonction vraie relatif au lieu cherché, temps que nous désignerons par H,

$$\left\{\begin{array}{ll} H = 12^h - t, & \text{si } \partial \text{ et } Ⓓ \text{ ont le même signe,} \\ H = 0^h - t, & \text{si } \partial \text{ et } Ⓓ \text{ sont de signes contraires.} \end{array}\right. \tag{4}$$

C'est cette heure H qui, comparée à celle de Paris au moment de la conjonction vraie, détermine la longitude du lieu intersection des courbes des levers et des couchers.

Quant à la latitude l du même lieu, elle est déterminée de la manière suivante. On a

$$\begin{aligned} u &= -(x) \pm P' = (-\partial \pm P') - tD_1, \\ v &= (y) = t\alpha_1 \cos D. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} (-\partial \pm P') &= k \cos(i' \sim i), \\ tD_1 &= k \sin i' \sin i, \\ \alpha_1 \cos D &= \frac{D_1 \cos i}{\sin i}; \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} u &= k \cos i' \cos i, \\ v &= k \sin i' \cos i. \end{aligned}$$

Soit n' la plus courte distance apparente des centres et τ la demi-durée de l'éclipse, on aura

$$n' = \frac{v}{\sin i''}, \quad \cos\omega = \frac{n'}{\Delta'}, \quad \tau = \frac{\Delta' \sin\omega \sin i''}{D_1},$$

et, par suite, il viendra

$$\tang l = \pm \frac{\cos(\tau\, 15^\circ)}{\tang \textcircled{D}}.$$

On a aussi, en employant la valeur ci-dessus de v,

$$(5) \qquad \cos\omega = \frac{k \cos i}{\Delta'}, \quad \tau = \frac{\Delta' \sin\omega}{\mu},$$

et

$$(6) \qquad \tang l = \pm \frac{\cos(\tau\, 15^\circ)}{\tang \textcircled{D}}.$$

l et δ sont toujours de même nom.

Pour que le milieu de l'éclipse ait le Soleil à l'horizon, il faut que $n' = \Delta'$ ou que ω soit nul. Alors $\tau = 0$ et $l = 90^\circ - \textcircled{D}$. Lorsque ω diffère de zéro, le lieu C (*fig.* 32) ne se trouve pas sur la *courbe des lieux voyant le milieu de l'éclipse au lever ou au coucher du Soleil;* il est situé un peu au-dessus ou un peu au-dessous de cette ligne et forme, avec la courbe-limite des levers et des couchers, un très petit triangle représenté par aCb.

Nous allons nous proposer d'appliquer les formules qui précèdent à la détermination du lieu intersection des courbes du lever et du coucher, dans l'éclipse totale de Soleil du 16 avril 1874.

On a

		$\log \rho$	9.99861	
		$\log(\Pi - p)$	3.56396	
		P'	3.56257	$P' = +60'.52''$
		$\log \sin \textcircled{D}$	9.24740	
i''	$24^\circ.55'$	log nombre const	9.41796	
i	26.49	$\log(9.41796) P' \sin \textcircled{D}$ ..	2.22793	+ 2.49
$(i'' \sim i)$	1 .54	$\log \alpha_1$	3.28511	
		$\log \cos D$	9.99435	
δ	$+57'.14''$	$\log \alpha_1 \cos D$...........	3.27946	+ 31.43
P'	-60.52	$\log \mu \cos i''$	3.31639	$\mu \cos i'' = + 34.32$
$(-\delta - P')$	-3.38	$\log \mu \sin i'' = \log D_1$ ...	2.98330	
		$\log \tang i''$	9.66691	
		$\log \cos i''$	9.95757	
		$\log \mu$	3.35882	

$\log(-\delta - P')$	2.33846	
$\log\cos(i' \sim i)$	9.99976	
$\log k$	2.33870	
$\log\sin i$	9.65431	
log nombre const	3.55630	
	5.54931	
$\log \mu$	3.35882	
$\log t$	2.19049	—

	h m s	
t	— 0. 2.35	
$H = 0^h - t$	+ 0. 2.35	
Temps moyen de ♈	1.26.25	
Équ. du temps	14	
Temps moyen de ♈	1.26.39	à Paris
	24. 2.35	
Longitude en temps	22.35.56	Est
Longitude Ouest	1.24. 4	= 21° 1′

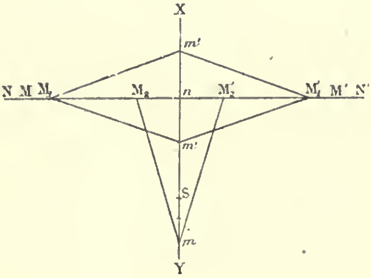
$\log k$	2.33870	
$\log\cos i$	9.95059	
	2.28929	
$\log \Delta' = (\delta + d)$	3.29226	
$\cos\omega$	8.99703	95° 42′
$\sin\omega$	9.99785	
$\Delta' \sin\omega$	3.29011	
$\log \mu$	3.35882	
$\log \tau$	9.93129	
$\log 15°$	2.95424	
$\log \tau\, 15°$	2.88553	$\tau\, 15° = 12° 48'$
$\log\cos(\tau\, 15°)$	9.98907	
log tang Ⓛ	9.25437	
$\log \operatorname{tang} l$	0.73470	
l	79°.34′	
Réduction	4′	
Latitude	79°38 S′.	

XI. — Courbe des lieux voyant le milieu de l'éclipse au lever et au coucher du Soleil.

Puisque chacun des ovales Ouest et Est est la limite des lieux qui voient la fin et le commencement de l'éclipse au lever ou au coucher du Soleil, il doit nécessairement exister, dans chacun d'eux, une ligne allant du Nord au Sud, et telle que les lieux qui y sont situés voient, pour l'ovale Ouest, le milieu de l'éclipse au coucher du Soleil et pour l'ovale Est, le milieu de l'éclipse au lever de cet astre. C'est cette ligne DCE (*fig.* 31 et 32), dont le tracé sur les Cartes des *Éphémérides* permet une appréciation plus complète de la marche du phénomène, que nous allons maintenant déterminer en admettant que l'inclinaison de l'orbite apparente de la Lune soit la même que celle de l'orbite vraie ou que $i' = i$, supposition qui donne lieu, dans la pratique, à des résultats suffisamment approchés pour le but qu'on se propose.

Soient NN' (*fig.* 34) l'orbite relative vraie de la Lune et Sn

Fig. 34.



une perpendiculaire menée à cette orbite par le point S, position du Soleil. Si l'on prend sur la direction Sn, de part et d'autre de ce point S, des longueurs $Sm = Sm' = \delta + d$, il est clair que les points m et m' ainsi déterminés seront les limites entre lesquelles devra se trouver la position apparente de la Lune, pour qu'il puisse y avoir éclipse; et deux cas seront à distinguer, suivant que le point m' tombera entre S et n ou au delà du point n.

Supposons d'abord que le point m' tombe entre S et n, et prenons sur NN', $M_1 m' = P'$. La première position vraie de la Lune sera en M_1, et il n'y aura qu'un simple contact au moment du milieu de l'éclipse. Quant aux autres positions vraies de la Lune, en deçà du point M_1 (nous supposons que le mouvement s'effectue de N vers N'), elles ne pourront évidemment donner lieu à aucun contact et, par conséquent, à aucun lieu voyant le milieu de l'éclipse. Mais de M_1 en M'_1, la série des lieux voyant le milieu de l'éclipse, le Soleil étant à l'horizon, existera, et cette série sera continue si $P' < mn$ ou si $n > P' - (\delta + d)$, et discontinue si $P > mn$ ou si $n < P' - (\delta + d)$, ce qui s'accorde parfaitement, comme on voit, avec ce que nous avons dit au § VIII, puisque dans le premier cas la courbe des levers et des couchers a la figure d'un 8 déformé, et dans le second cas cette courbe est formée de deux ovales distincts et séparés.

Supposons maintenant que le point m' tombe au delà du point n, et prenons $Mn = P'$. Il est clair que, dans ce cas, à chaque position vraie de la Lune comprise entre M et M_1, point où $M_1 m' = P'$, correspondront deux positions apparentes de chaque côté du point n, et, par conséquent, deux lieux voyant le milieu de l'éclipse à l'horizon. Passé le point M_1, les contacts ne pourront plus se faire que du côté nY et correspondront chacun à une position de la Lune comprise entre M_1 et M_2, M_2 étant un point tel que $M_2 m = P'$. Enfin, du point M_2 au point symétrique M'_2, la série des lieux voyant le milieu de l'éclipse à l'horizon existera, et cette série, comme dans le cas qui précède, pourra être continue ou discontinue, suivant qu'on aura

$$n > P' - (\delta + d) \quad \text{ou} \quad n < P' - (\delta + d).$$

Il s'agit actuellement de déterminer les époques correspondantes aux positions M, M_1, M_2, M'_2, M'_1, M' de la Lune sur son orbite relative vraie, positions qui sont celles pour lesquelles ont lieu les premiers et derniers contacts indiqués.

En convenant de représenter par ω l'angle Mmn que fait la perpendiculaire Sn à l'orbite relative avec la ligne qui va de la position vraie de la Lune à la position apparente, et par τ_1, τ_2 les demi-durées correspondantes aux positions de la Lune en M et M_2, on aura, d'après ce qu'on a vu au § IX, p. 228.

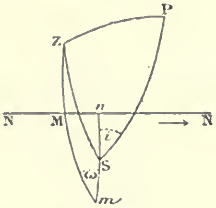
1° $n < (\delta + d)$:

$$\tag{1} \left\{ \begin{array}{lll} \text{Point M} \ldots\ldots\ldots & \omega_1 = 90^\circ, & \tau_1 = \dfrac{cP'}{n}, \\[2ex] \text{Point M}_2 \ldots\ldots\ldots & \cos\omega_2 = \dfrac{n + (\delta + d)}{P'}, & \tau_2 = \dfrac{cP'}{n} \sin\omega_2, \end{array} \right.$$

ω_2 étant plus grand que 90°, quand δ est négatif.

Maintenant, si l'on conçoit mené par le point S (*fig.* 35) un arc de grand cercle ZS, et qu'on prolonge Mm jusqu'en Z, l'arc ZS étant sensiblement égal à 90°, il est clair qu'on pourra considérer les arcs Zm et ZS comme sensiblement parallèles à leurs extrémités, et dès lors on aura

Fig. 35.



Première position du lieu correspondant au commencement de la phase.

$$a = -i - 90^\circ,$$

$$\sin l = -\sin i \cos \mathcal{D}, \quad \tang h = -\frac{\cot i}{\sin \mathcal{D}}, \tag{2}$$

h devant être pris entre 0° et $-180°$.

Première position du lieu correspondant à la fin de la phase.

$$b = -i + 90^\circ.$$

(3) Cette position est déterminée en changeant le nom de la latitude de la position du commencement et en appliquant à l'angle horaire h, $\pm 180°$.

(4)

Seconde position du lieu correspondant au commencement de la phase.

$$a = -i - \omega_2, \qquad b = -i + \omega_2,$$

$$\sin l = \cos a \cos \mathcal{D}, \quad \tang h = -\frac{\tang a}{\sin \mathcal{D}},$$

Seconde position du lieu correspondant à la fin de la phase.

$$\sin l = \cos b \cos \mathcal{D}, \quad \tang h = -\frac{\tang b}{\sin \mathcal{D}}.$$

Les secondes positions du commencement et de la fin de la phase sont deux des points extrêmes (M_1 et M'_1) des lignes tracées sur la surface de la Terre. Quant aux deux autres points extrêmes M_2, M'_2, ils pourront être déterminés comme précédemment, en prenant

$$\cos \omega = \frac{(\delta + d) - n}{p'},$$

n étant considéré comme positif et $\omega > 90^\circ$, quand ∂ est positif.

Ces quatres points extrêmes M_1, M'_1, M_2, M'_2 sont les mêmes que ceux des limites nord et sud, dans le cas d'un simple contact.

2° Soit $n > P' - (\delta + d)$ et $< \delta + d$. Dans ce cas, les positions sont déterminées dans toute l'étendue de la durée $\tau_1 = \frac{cP'}{n}$.

3° Soit $n > (\delta + d)$. Ici

$$\cos\omega = \frac{n - (\delta + d)}{P'} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{cP'}{n}\sin\omega;$$

le phénomène a lieu pendant toute la durée τ, et les positions extrêmes sont déterminées à l'aide de cette valeur de ω et des équations (4).

Les limites entre lesquelles la phase est possible, une fois déterminées, on obtient la position des lieux qui correspondent à des époques quelconques, comprises entre ces limites, au moyen des relations suivantes :

$$\sin\omega = \left(\frac{n}{cP'}\right)t,$$

($\omega > 90^\circ$ quand ∂ est négatif),

$$a = -i - \omega, \qquad b = -i + \omega,$$

$$\sin l = \cos a \cos\mathcal{D}, \quad \text{tang}\, h = -\frac{\text{tang}\, a}{\sin\mathcal{D}},$$

$$\sin l = \cos b \cos\mathcal{D}, \quad \text{tang}\, h = -\frac{\text{tang}\, b}{\sin\mathcal{D}},$$

t désignant ici l'intervalle de temps écoulé depuis le milieu de l'éclipse, jusqu'au moment considéré.

Dans ce qui précède, nous avons admis que $i' = i$, ce qui conduit à des résultats suffisamment approchés pour le tracé des Cartes données dans les *Éphémérides*. Si l'on voulait une plus grande exactitude, il faudrait employer la valeur même de i' et prendre la parallaxe corrigée P', qui convient à la latitude du lieu obtenu par le premier calcul; on aurait alors, comme on l'a vu au § IX,

$$i' = \nu, \quad P' = \rho(\Pi - p),$$

puis

$$(x) = (D) - \textcircled{L}, \qquad (D) = D + (\alpha \text{ correct. Table X}),$$

$$(y) = \alpha \cos(D), \quad \operatorname{tang} S = \frac{(y)}{(x)}, \quad \Delta = \frac{(y)}{\sin S} = \frac{(x)}{\cos S},$$

$$(A) = (0{,}58204)\alpha_1 \cos D, \qquad (B) = (0{,}58204) D_1,$$

et l'angle ν serait donné par la formule

$$\operatorname{tang} \nu = \frac{(B) - (y)\sin\textcircled{L}}{(A) + (x)\sin\textcircled{L}}.$$

Supposons maintenant que dans la (*fig.* 36) on ait

$$Mm = Mm' = P',$$

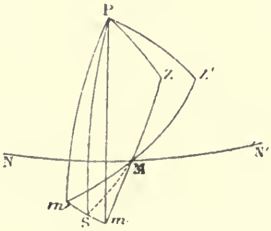
d'où

$$Mmm' = Mm'm;$$

appelons θ cet angle et posons

$$PmM = M \quad \text{et} \quad Pm'M = M',$$

Fig. 36.



on aura

$$PmS = \nu, \qquad Pm'S = 180^\circ - \nu, \qquad M = \theta - \nu,$$
$$M' = 180^\circ - \nu - \theta,$$
$$MSm = 180^\circ - S - \nu, \quad MSm' = S + \nu, \qquad SMm = S + \nu - \theta,$$
$$SMm' = 180^\circ - (S + \nu + \theta);$$

et en considérant les triangles MSm et MSm', il viendra

$$\sin\theta = \frac{\Delta}{P'}\sin(S + \nu),$$

$$Sm = \frac{P'\sin(S + \nu - \theta)}{\sin(S + \nu)}, \quad PmM = M = \theta - \nu,$$

$$Sm' = \frac{P'\sin(S + \nu + \theta)}{\sin(S + \nu)}, \quad Pm'M = M' = (180^\circ - \nu - \theta);$$

θ est positif ou négatif, mais plus petit que 90°.

Les valeurs de M et de M′ étant connues par ce qui précède, on obtiendra la position des lieux correspondants à ces valeurs, au moyen des formules suivantes, qui se déduisent des triangles PmZ et Pm'Z,

$$\text{Pour M}\ldots\ldots\ldots\quad \sin l = \cos \mathrm{M} \cos \mathcal{D} \quad \operatorname{tang} h = -\frac{\operatorname{tang} \mathrm{M}}{\sin \mathcal{D}},$$

$$\text{Pour M}'\ldots\ldots\ldots\quad \sin l = \cos \mathrm{M}' \cos \mathcal{D} \quad \operatorname{tang} h = -\frac{\operatorname{tang} \mathrm{M}'}{\sin \mathcal{D}}.$$

Pour que ces deux positions puissent exister, il faut que les quantités Sm et Sm' dont nous venons de donner les expressions, soient toutes deux plus petites que $\delta + d$, somme des demi-diamètres apparents du Soleil et de la Lune. Une seule de ces positions peut être déterminée, si l'une de ces quantités Sm', par exemple, est plus grande que $\delta + d$, et elle correspond alors à l'angle M. Enfin, si les quantités Sm et Sm' sont toutes deux plus grandes que $\delta + d$, le milieu de l'éclipse ne peut pas être aperçu de la Terre, et, dans ce cas, aucune détermination n'est possible.

XII. — Ligne de l'éclipse centrale.

Cette ligne FG (*fig.* 31 et 32), qui renferme les lieux voyant exactement le centre de la Lune sur le centre du Soleil, résulte des intersections successives de l'axe des cônes d'ombre avec la surface de la Terre. Comme, en chacun de ses points, la parallaxe relative de hauteur P′ sin Z doit être égale à la distance vraie Δ des deux centres, on a d'abord

$$(1) \qquad \sin \mathrm{Z} = \frac{\Delta}{\mathrm{P}'},$$

Soit t l'intervalle de temps, écoulé depuis le milieu de l'éclipse jusqu'au moment considéré; on a, comme on l'a vu au § VIII,

$$(2) \qquad \operatorname{tang} \omega = \frac{t}{c}, \quad \Delta = \frac{n}{\cos \omega},$$

ω étant plus grand que 90°, quand n est négatif.

On a ensuite

$$(3) \qquad \mathrm{S} = (-i) \mp \omega,$$

le signe négatif, dans ces valeurs de S, se rapportant au temps écoulé *avant* le milieu de l'éclipse, et le signe *positif* au temps écoulé *après* ce milieu.

En considérant maintenant le triangle PSZ (*fig.* 36), dans lequel $PS = 90^\circ - \mathcal{D}$, $PSZ = S$, $SZ = Z$, on a, comme on l'a vu au § IX,

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \operatorname{tang} h = \dfrac{\sin\theta}{\cos(\theta + \mathcal{D})} \operatorname{tang} S, \\ \operatorname{tang} l = \operatorname{tang}(\theta + \mathcal{D}) \cos h, \end{cases}$$

en posant

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang} Z \cos S.$$

On a aussi la formule suivante, qui sert de vérification :

$$\frac{\sin\theta}{\cos(\theta + \mathcal{D})} = \frac{\sin Z \cos S}{\cos h \cos l};$$

θ est de même signe que $\cos S$ et plus petit que 90°, et h dans le même demi-cercle que S.

Quant au lieu qui voit à midi vrai l'éclipse centrale, on peut en déterminer la position de la manière suivante. Comme à cet instant les deux astres doivent évidemment se trouver en conjonction en ascension droite vraie et apparente, on a d'abord

$$\Delta = \partial \quad \text{et} \quad S = 0,$$

d'où résulte

$$\text{(5)} \qquad \sin Z = \frac{\partial}{P'} \quad \text{et} \quad l = \mathcal{D} + Z,$$

Z ayant le même signe que ∂; on a ensuite

longitude Ouest du lieu = Temps de la conjonction vraie.

La valeur de P′ qui entre dans les formules précédentes est celle qui convient au lieu cherché; mais comme ce lieu est inconnu, on peut prendre pour la valeur de P′ celle qui se rapporte à la latitude moyenne de 45°, sauf à recommencer le calcul avec la valeur de P′ correspondante à la latitude du lieu ainsi déterminée, si l'on veut une plus grande exactitude.

Relativement aux positions des lieux qui voient les premiers et les derniers l'éclipse centrale, comme ces positions appartiennent évidemment aux courbes des lieux voyant le milieu de l'éclipse à l'horizon, elles seront déterminées parce que nous venons de dire au Paragraphe qui précède.

Nous allons faire une application des formules qui précèdent à l'éclipse de Soleil du 16 avril 1874, et chercher la position d'un point de la *Ligne de l'éclipse centrale* qui *suit* l'époque du milieu T_m d'un intervalle que nous supposerons égal à 0^h50^m.

Nous avons d'abord

	h m				
Époque du milieu.....	2.10	log *t*......	3,47712+	log cos ω..	9,93706−
t....................	0.50	log *c*......	3,71380+	log *n*.....	3,48640−
Époq. suiv. le milieu..	3.00	log tang ω.	9,76332+	log Δ.....	3,54934+
	° ′	ω........	149°53′34″	log P′....	3,56323+
(− *i*)......	− 26.49				
ω..........	+149.54	Z........	+75°35′	log sin Z..	9,98611+
S après....	123. 5			log tang Z.	0,58995+

Nous avons ensuite

log tang Z.......	0,58995+	log sin θ........	9,95651−
log cos S........	9,73708−	log cos(θ + Ⓓ).	9,76289+
log tang θ..... .	0,32703−		0,19362−
		tang S.........	0,18610−
	° ′		
θ..............	−64.47	log tang *h*......	0,37972+
Ⓓ..............	+10.11	*h* = + 67°21′25″	
θ + Ⓓ..........	−54.36		
	h m s		
H..............	3.00.00	log cos *h*.......	9,58544+
Équat. du temps.	14	log tang(θ + Ⓓ).	0,14834−
	3.00.14	log tang *l*.......	9,73378−
En arc.........	45° 4′	*l*..............	28°40′ Sud
h.............	67°21′	Réduction......	10
Longitude......	22.17 Est	Latitude.......	28.50 Sud

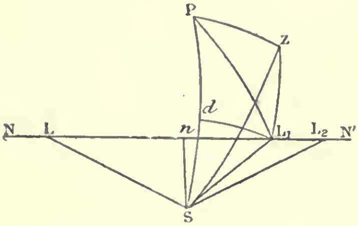
Lieu qui voit l'éclipse centrale à midi vrai.

log ∂...........	3,53584−		
log P′..........	3,56323+		
log sin Z........	9,97261−		h m s
Z..............	− 69°52′	Temps de la ☌.	1.26.25
Ⓓ..............	+10.11	Équat. du temps.	14
l..............	−59.41 Sud		1.26.39
Réduction......	10	Longitude.....	21°40′ Oucst
latitude........	59.51 Sud		

XIII. — Éclipse de Soleil pour un lieu particulier.

Soient S et L_1 (*fig.* 37) les positions apparentes respectives du Soleil et de la Lune à un instant compris entre le commencement et la fin de l'éclipse, et NL_1N' un arc de grand cercle tangent au point L_1 à l'orbite relative, arc que nous supposerons se confondre avec cette orbite à l'instant considéré. Menons sur le cercle de déclinaison PS l'arc de grand cercle perpendiculaire L_1d, et du point S abaissons l'arc Sn perpendiculaire sur NN'. Soient, en outre,

Fig. 37.



(D) la déclinaison apparente du point d;
D la déclinaison vraie de la Lune en L_1;
D' sa déclinaison apparente;
α la différence des ascensions droites vraies du Soleil et de la Lune;
α' la différence de leurs ascensions droites apparentes,

et posons

$$Sd = x,\quad L_1d = y,\quad SL_1 = W,$$
$$SL_1 = S,\quad LL_1d = dSn = i,$$
$$Sn = n,\quad LS = SL_2 = \Delta',$$
$$LSn = L_2Sn = \omega.$$

Par le triangle sphérique PdL_1, rectangle en d, on a

$$\operatorname{tang}(D) = \frac{\operatorname{tang} D}{\cos\alpha},$$

ou

$$\operatorname{tang}[(D) - D] = \frac{\dfrac{\operatorname{tang} D}{\cos\alpha} - \operatorname{tang} D}{1 + \dfrac{\operatorname{tang}^2 D}{\cos\alpha}} = \frac{\operatorname{tang} D(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha + \operatorname{tang}^2 D},$$

ou bien encore, à cause que l'arc α est très petit,

$$\operatorname{tang}[(\mathrm{D})-\mathrm{D}]=\frac{\operatorname{tang}\mathrm{D}(1-\cos\alpha)}{1+\operatorname{tang}^2\mathrm{D}}=\sin 2\mathrm{D}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Supposons que α soit exprimé en minutes et $(\mathrm{D})-\mathrm{D}$ en secondes de degré; alors

$$\operatorname{tang}[(\mathrm{D})-\mathrm{D}]=[(\mathrm{D})-\mathrm{D}]\sin 1'',$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}\sin 1''=(30\sin 1'')\alpha,$$

et par conséquent

$$(\mathrm{D})-\mathrm{D}=(900''\sin 1''\sin 2\mathrm{D})\alpha^2=\alpha\text{ correct.}$$

Maintenant, si l'on convient de représenter par $\Delta\alpha$ et $\Delta\mathrm{D}$ les parallaxes d'ascension droite et de déclinaison, dont les expressions rigoureuses ont été données au § II du Chapitre III de la première Partie (éq. 6 *bis* et 7), et que, dans le cas actuel, on peut réduire à cette forme (¹)

$$\Delta\alpha=\frac{\mathrm{P}'\cos l\sin h}{\cos\mathrm{D}},\quad \Delta\mathrm{D}=\mathrm{P}'(\sin l\cos\mathfrak{D}-\cos l\sin\mathfrak{D}\cos h),$$

il est clair qu'on aura

$$\alpha-\Delta\alpha=\alpha',\quad \mathrm{D}-\Delta\mathrm{D}=\mathrm{D}';$$

par suite, on pourra écrire

$$x=[\mathrm{D}'+(\alpha-\Delta\alpha)\text{ correct.}]-\mathfrak{D},$$
$$y=[\alpha-\Delta\alpha]\cos\mathrm{D}'.$$

Soient x_1 et y_1 les variations horaires des coordonnées x et y; on aura aussi

$$x_1=\mathrm{D}_1-\Delta\mathrm{D}_1,$$
$$y_1=(\alpha_1-\Delta\alpha_1)\cos\mathrm{D}'.$$

En différentiant les valeurs ci-dessus de $\Delta\alpha$ et de $\Delta\mathrm{D}$, on ob-

---

(¹) En écrivant $\sin\mathrm{P}'$ au lieu de $\sin\mathrm{P}$ (égal, d'après la notation du Chapitre III, à $\sin\Pi$), mettant $\mathfrak{D}$ au lieu de $\mathfrak{D}'$, et négligeant $\Delta\mathfrak{h}$, ce qui donne $(h)=h$.

tient

$$d\left(\frac{\Delta\alpha}{dt}\right) = \left(\mathrm{P}'\,\frac{dh}{dt}\sin 1''\right)\frac{\cos l}{\cos \mathrm{D}}\cos h,$$

$$d\left(\frac{\Delta\mathrm{D}}{dt}\right) = \left(\mathrm{P}'\,\frac{dh}{dt}\sin 1''\right)\cos l \sin \textcircled{l} \sin h.$$

D'ailleurs P', Δα, ΔD étant de très petites quantités, il est permis de faire

$$\frac{\sin \mathrm{P}'}{\mathrm{P}'} = (4,6856) = \frac{\operatorname{tang}\Delta\alpha}{\Delta\alpha} = \frac{\operatorname{tang}\Delta\mathrm{D}}{\Delta\mathrm{D}},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sin \mathrm{P}' &= (4,6856)\,\mathrm{P}' \\ \Delta\alpha &= (5,3144)\operatorname{tang}\Delta\alpha, \\ \Delta\mathrm{D} &= (5,3144)\operatorname{tang}\Delta\mathrm{D}. \end{aligned}$$

Si donc l'on pose

$$\begin{aligned} m &= (4,6856)\,\mathrm{P}'\cos l, \\ n &= (4,6856)\,\mathrm{P}'\,\frac{\cos l}{\cos \mathrm{D}}\cos h, \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{P}'\,\frac{\cos l}{\cos \mathrm{D}}\cos h &= (5,3144)\,n, \\ \mathrm{P}'\cos l &= (5,3144)\,m, \end{aligned}$$

et, par suite, les valeurs précédentes de $\frac{d(\Delta\alpha)}{dt}$ et de $\frac{d(\Delta\mathrm{D})}{dt}$ deviendron

$$\frac{d(\Delta\alpha)}{dt} = (5,3144)\left(\frac{dh}{dt}\sin 1''\right)n,$$

$$\frac{d(\Delta\alpha)}{dt} = (5,3144)\left(\frac{dh}{dt}\sin 1''\right)m \sin \textcircled{l} \sin h.$$

En prenant 14°29' pour la valeur moyenne de $\frac{dh}{dt}$, on obtient

$$\frac{dh}{dt}\sin 1'' = (9,4027);$$

par conséquent, en écrivant $\Delta\alpha_1$ et $\Delta\mathrm{D}_1$ au lieu de $\frac{d(\Delta\alpha)}{dt}$ et $\frac{d(\Delta\mathrm{D})}{dt}$, on a

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= (4,7172)\,n, \\ \Delta\mathrm{D}_1 &= (4,7172)\,m \sin \textcircled{l} \sin h. \end{aligned}$$

Les valeurs de x, y, x_1, y_1 étant ainsi déterminées, le triangle $d\mathrm{SL}_1$

considéré comme rectiligne donne

$$\tan S = \frac{y}{x}, \quad W = \frac{y}{\sin S} = \frac{x}{\cos S}, \quad \cot y = \frac{y_1}{x_1};$$

puis

$$\text{Mouvement horaire dans l'orbite} = \frac{y_1}{\cos i};$$

$$n = W \cos(S + i), \quad \cos\omega = \frac{n}{\Delta'},$$

et suivant que

$$\Delta' = \delta + d, \quad \Delta' = \delta - d, \quad \Delta' = d - \delta,$$

l'éclipse est partielle, totale ou annulaire.

Les triangles LSL_1, L_1SL_2, L_1Sn donnent ensuite

$$\begin{aligned} LL_1 &= \frac{W}{\cos\omega} \sin[\omega + (S + i)], \\ L_2L_1 &= \frac{W}{\cos\omega} \sin[\omega - (S + i)], \\ L_1 n &= W \sin(S + i). \end{aligned}$$

Si donc t_1, t_2, t_3 représentent les corrections que l'on doit appliquer à l'instant T pris comme origine, pour avoir celui du commencement de la plus grande phase ou de la fin de l'éclipse, il est clair que, en posant

$$c = \frac{W \cos i}{y_1 \cos\omega} 3600'',$$

on aura

$$\begin{aligned} t_1 &= c \sin[-(S + i) - \omega], \\ t_2 &= c \cos\omega \sin[-(S + i)], \\ t_3 &= c \sin[-(s + i) + \omega], \end{aligned}$$

et, par suite, il viendra :

Pour l'époque du commencement...... $T + t_1$
Pour celle de la plus grande phase.... $T + t_2$
Pour celle de la fin.................. $T + t_3$.

Pour que les résultats qui précèdent soient suffisamment exacts, il est nécessaire que l'époque prise pour origine soit voisine du milieu de l'éclipse dans le lieu que l'on considère. Or le moyen le plus simple d'obtenir cette époque est de calculer d'une manière approchée le temps de la conjonction apparente.

Soient h l'angle horaire vrai du Soleil et de la Lune à l'instant de la conjonction vraie, h' l'angle horaire de ces deux astres au moment de la conjonction apparente, et t le temps écoulé entre ces deux conjonctions. L'effet de la parallaxe n'ayant ici aucune influence sensible, on peut poser

$$h' = h + 15'' t,$$

et aussi

$$\alpha = \alpha_1 t \, \Delta\alpha = \frac{P' \cos l}{\cos D} \sin(h + 15'' t).$$

Alors, l'équation de condition $\alpha' = 0$, qui a lieu à la conjonction apparente, devient

$$\alpha_1 t - P' \frac{\cos l}{\cos D} (\sin h \cos 15'' t) + (\cos h \sin 15'' t) = 0,$$

et, en posant $\cos 15'' = 1$, $\sin 15'' t = 15 t \sin 1''$, on obtient

$$t = \frac{\sin h}{\alpha_1 \dfrac{\cos D}{P' \cos l} - 15 \sin 1'' \cos h}.$$

Nous allons actuellement considérer les positions apparentes de la Lune par rapport au centre du Soleil.

D'après la *fig.* 37, il est clair que l'angle $L_1 SP = S$ est l'angle de position de la Lune au centre du Soleil à l'instant que nous avons choisi pour origine ; de même que $PSL = \omega + i$ est l'angle de position apparente au temps du commencement, $PSL_2 = \omega - i$ l'angle de position au temps de la fin, et $PSn = i$ l'angle de position de la Lune à l'instant de la plus grande phase. En convenant donc de compter tous ces angles du *Nord* vers l'*Est*, on doit avoir

Au commencement.......... $S = (-i) - \omega$
A la plus grande phase...... $S = (-i)$
A la fin.................... $S = (-i) + \omega$

Comme l'angle PSZ diffère peu de celui $PL_1 Z = M$, on peut supposer que $Z = M$; et alors l'angle de position du centre de la Lune au zénith, dans la direction de l'Est, est représenté par $S - M$. Quant à cet angle M, il est déterminé par les formules que nous avons rapportées au Chapitre III de la I$^{\text{re}}$ Partie, savoir :

$$\operatorname{tang} \theta = \cot l \cos h, \quad \operatorname{tang} M = \frac{\sin \theta}{\cos(\theta + \delta)} \operatorname{tang} h.$$

XIV. — Calcul des circonstances d'une éclipse de Soleil pour des lieux avoisinant le lieu considéré.

Eu égard aux relations $\alpha - \Delta\alpha = \alpha'$, $D - \Delta D = D'$, les valeurs des coordonnées x, y données au paragraphe qui précède peuvent s'écrire

$$(1)\qquad \left\{ \begin{array}{l} x = [(D + \alpha' \text{ correct.}) - ☾)] - \Delta D, \\ y = \alpha \cos D' - \Delta\alpha \cos D'; \end{array} \right.$$

et en désignant, comme précédemment, par i l'inclinaison de l'orbite relative apparente sur un parallèle de déclinaison et par n la plus courte distance des centres des deux astres, on a, d'après la *fig.* 37,

$$n = x \cos i - y \sin i,$$
$$n L_1 = x \sin i + y \cos i.$$

Soient L et L_2 les positions de la Lune qui répondent aux temps du commencement et de la fin de l'éclipse. A ces instants, on a évidemment Ln ou $L_1 n = \mp \Delta' \sin\omega$; et, par suite, pour les expressions des distances LL_1 et $L_2 L$,

$$\mp \Delta' \sin\omega - (x \sin i + y \cos i).$$

Divisant ces expressions par $\frac{y_1}{\cos i}$, mouvement horaire dans l'orbite, on en déduit pour les intervalles t_1, t_2 exprimés en unité d'heure, intervalles qui, appliqués au temps adopté T, donnent l'instant t où la phase a lieu,

$$t_1 \quad \text{ou} \quad t_2 = \mp \frac{\Delta' \cos i}{y_1} \sin\omega - \frac{\cos i}{y_1}(x \sin i + y \cos i).$$

En posant donc

$$(2)\qquad K = \frac{\Delta' \cos i}{y_1} \times 3600'',$$

on devra avoir pour le temps t exprimé en secondes

$$(3)\qquad t = T \mp K \sin\omega - \frac{K}{\Delta'}(x \sin i + y \cos i),$$

ω étant déterminé par la relation

$$(4)\qquad \cos\omega = \frac{n}{\Delta'} = \frac{x \cos i - y \sin i}{\Delta'}.$$

Maintenant si, dans les équations (3) et (4), on met à la place de x et de y leurs valeurs ci-dessus (1), puisqu'on pose, pour abréger,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{(\mathrm{D}+\alpha'\,\mathrm{correct.})-\textcircled{D}}{\Delta'}\cos i - \frac{\alpha\cos \mathrm{D}'}{\Delta'}\sin i,\\ q &= \frac{\mathrm{K}}{\Delta'}\left[(\mathrm{D}+\alpha'\,\mathrm{correct.})-\textcircled{D}\right]\sin i + \frac{\mathrm{K}}{\Delta'}\alpha\cos \mathrm{D}'\cos i;\end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta p &= \frac{\Delta \mathrm{D}}{\Delta'}\cos i - \frac{\Delta\alpha\cos \mathrm{D}'}{\Delta'}\sin i,\\ \Delta q &= \frac{\mathrm{K}}{\Delta'}\Delta \mathrm{D}\sin i + \frac{\mathrm{K}}{\Delta'}\Delta\alpha\cos \mathrm{D}'\cos i,\end{aligned}\right.$$

il viendra

$$(7)\quad \cos\omega = p - \Delta p,\qquad t = \mathrm{T} \mp \mathrm{K}\sin\omega - (q - \Delta q).$$

Les quantités Δp et Δq qui entrent dans ces expressions dépendent de la position du lieu d'observation, et, transformées à l'aide des relations (6 *bis* et 7) du Chapitre III de la Ire Partie, elles peuvent s'écrire, en remarquant que $\dfrac{\cos \mathrm{D}'}{\cos\textcircled{D}} = 1$,

$$\Delta p = \frac{\mathrm{P}'\cos i\cos\textcircled{D}\sin l}{\Delta'} - \cos l\left(\frac{\mathrm{P}'}{\Delta'}\cos i\sin\textcircled{D}\cos h + \frac{\mathrm{P}'}{\Delta'}\sin i\sin h\right),$$

$$\Delta q = \frac{\mathrm{P}'\mathrm{K}\sin i\cos\textcircled{D}\sin l}{\Delta'} - \cos l\left(\frac{\mathrm{P}'\mathrm{K}}{\Delta'}\sin i\sin\textcircled{D}\cos h - \frac{\mathrm{P}'\mathrm{K}}{\Delta'}\cos i\sin h\right).$$

Soient alors H l'angle horaire vrai de la Lune pour le méridien de Paris, λ la longitude du lieu, positive à l'Est et négative à l'Ouest, et posons

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{L}' &= \frac{\mathrm{P}'\cos i\cos\textcircled{D}}{\Delta'},\\ \gamma'\cos(\psi'-\mathrm{H}) &= \frac{\mathrm{P}'}{\Delta'}\cos i\sin\textcircled{D},\\ \gamma'\sin(\psi'-\mathrm{H}) &= -\frac{\mathrm{P}'}{\Delta'}\sin i.\end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{L}'' &= \frac{\mathrm{P}'\mathrm{K}\sin i\cos\textcircled{D}}{\Delta'},\\ \gamma''\cos(\psi''-\mathrm{H} &= \frac{\mathrm{P}'\mathrm{K}}{\Delta'}\sin i\sin\textcircled{D},\\ \gamma''\sin(\psi''-\mathrm{H} &= \frac{\mathrm{P}'\mathrm{K}}{\Delta'}\cos i,\end{aligned}\right.$$

il en résultera

$$\begin{aligned}\Delta p &= \text{L}'\sin l - \gamma'\cos l\cos(\psi' + h - \text{H})\\ &= \text{L}'\sin l - \gamma'\cos l\cos(\psi' + \lambda),\\ \Delta q &= \text{L}''\sin l - \gamma''\cos l\cos(\psi'' + h - \text{H})\\ &= \text{L}''\sin l - \gamma''\cos l\cos(\psi'' + \lambda),\end{aligned}$$

et, par suite, on aura, pour déterminer le temps t de la phase dans le lieu dont la latitude est l et la longitude λ,

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}&\cos\omega = p - \text{L}'\sin l + \gamma'\cos l\cos(\psi' + \lambda),\\ &t = (\text{T} - q) \mp \text{K}\sin\omega + \text{L}''\sin l - \gamma''\cos l\cos(\psi'' + \lambda).\end{aligned}\right.$$

Cette détermination se fera d'autant plus exactement que ce lieu (l, λ) sera plus voisin de celui primitivement considéré.

XV. — Calcul des éclipses de Lune.

Les notions que nous avons présentées au commencement de ce Chapitre sur les éclipses de Lune peuvent maintenant être complétées et rendues plus exactes, par l'application des principes que nous venons d'exposer dans les paragraphes qui précèdent, et en particulier par l'emploi des formules contenues dans le § XIII.

Désignons par

Π	la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune;
p	la parallaxe horizontale équatoriale du Soleil;
δ	le demi-diamètre de la Lune;
d	le demi-diamètre du Soleil;
$\mathcal{A}_{\odot}$	l'ascension droite du Soleil;
$\mathcal{D}$	sa déclinaison;
$\mathcal{A}_{☾}$	l'ascension droite de la Lune;
D	sa déclinaison;

et prenons

$$\text{P}' = (9{,}99929)\Pi.$$

On aura

Ascension droite du centre de l'ombre.....	$\mathcal{A}_{\odot} \pm 12^{\text{h}} = \mathcal{A}$
Déclinaison du centre de l'ombre.........	$-\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$

et en outre

$$
\begin{aligned}
a &= \mathcal{A}_{\leftmoon} - (\mathcal{A}_{\odot} \pm 12^{\text{h}}) = \mathcal{A}_{\leftmoon} - \mathcal{A},\\
\alpha_1 &= \text{mouvement horaire de } \alpha,\\
x &= (\text{D} + \alpha \text{ correct.}) - \textcircled{D}_1,\\
y &= \alpha \cos \text{D},\\
x_1 &= \text{mouvement horaire de } x,\\
y_1 &= \alpha_1 \cos \text{D}.
\end{aligned}
$$

Supposons que pour l'instant de la pleine Lune ou de l'opposition en longitude on ait déterminé Π, δ, p, d, et soient

$$\text{A} = \frac{61}{60}(\Pi + p - d),$$

$$\text{A}' = \frac{61}{60}(\Pi + p + d),$$

A et A′ désignant respectivement les demi-diamètres des disques d'ombre pure et de pénombre ; alors, et en observant que, au moment du contact extérieur ou intérieur avec l'ombre pure,

$$\Delta' = \text{A} \pm \delta,$$

et au moment d'un contact extérieur ou intérieur avec la pénombre,

$$\Delta' = \text{A}' \pm \delta,$$

on aura, comme au § XIII,

$$\tang \text{S} = \frac{y}{x}, \quad \cot i = \frac{y_1}{x_1}, \quad \text{W} = \frac{y}{\sin \text{S}} = \frac{x}{\cos \text{S}},$$

$$n = \text{W} \cos[-(\text{S} + i)], \quad \cos \omega = \frac{n}{\Delta'}, \quad c = \frac{\text{W} \cos i}{y_1 \cos \omega} 3600'',$$

$$t_1 = c \sin[-(\text{S} + i) - \omega],$$

$$t_2 = c \sin[-(\text{S} + i) + \omega];$$

puis

Temps du commencement.......	$\text{T} + t_1$
Temps de la fin	$\text{T} + t_2$
Temps du milieu de l'éclipse.....	$\text{T} + \dfrac{(t_1 + t_2)}{2}$

et dans le cas d'une éclipse partielle

Portion du disque de la Lune éclipsée	$\Delta' - n$
Grandeur de l'éclipse	$\dfrac{\Delta' - n}{2\delta}$

le diamètre de la Lune étant pris pour unité.

On aura ensuite pour déterminer les positions angulaires des points de contacts où ont lieu l'immersion, le milieu de l'éclipse et l'émersion :

A l'immersion........ $S_1 = (-i) - \omega$

A l'émersion......... $S_3 = (-i) + \omega$

Au milieu de l'éclipse.. $S_2 = (-i)$

les angles étant tous estimés du *Nord* vers l'*Est,* dans une position renversée sur le disque de la Lune. Pour la position directe, on aurait

$$S_1 = (180^\circ - i) - \omega,$$
$$S_3 = (180^\circ - i) + \omega,$$
$$S_2 = (180^\circ - i).$$

CHAPITRE III.

PRÉDICTION DES OCCULTATIONS DES ÉTOILES ET DES PLANÈTES PAR LA LUNE.

I. — Calcul des phases d'une occultation d'étoile ou de planète. Première approximation.

Lorsque la Lune, dans son mouvement autour de la Terre, vient à nous cacher certains astres, étoiles ou planètes, situés sur la zone que son disque parcourt, on dit qu'il y a éclipse ou *occultation* de ces astres par la Lune (¹). Il y a *appulse* lorsque l'astre ne fait seulement que raser le bord du disque lunaire.

Les occultations d'étoiles par la Lune offrent, comme les éclipses, un moyen précieux pour obtenir la longitude des lieux terrestres. Aussi la *Connaissance des Temps* fait-elle connaître toutes les données nécessaires au calcul et à l'observation de ces phénomènes. Ainsi l'on trouve à la page 466 (année 1875) les positions moyennes des étoiles de première à sixième grandeur occultées pour le 1er janvier, et aux pages 474 et suivantes le Tableau des occultations ou appulses des étoiles ou des planètes jusqu'à la sixième grandeur inclusivement, visibles à Paris. On trouve enfin aux pages 467 et suivantes les éléments nécessaires au calcul de l'occultation dans un lieu quelconque, éléments qui sont les deux latitudes extrêmes entre lesquelles le phénomène de l'occultation

---

(¹) Comme la plus grande valeur du demi-diamètre lunaire est 16′46″; que celle de la parallaxe est 61′24″ et que la plus grande inclinaison de l'orbite est 5°17′34″, on voit que les étoiles dont la latitude est moindre que la somme de ces arcs ou 6°35′44″, sont les seules pour lesquelles il puisse y avoir occultation. De ce nombre, sont évidemment les planètes, tant inférieures que supérieures.

est observable, et les valeurs de certaines quantités h, p, q, p', q' dont la signification va être donnée dans l'exposé que nous allons présenter de la théorie des occultations d'après Bessel.

Soient

A et D l'ascension droite et la déclinaison apparente de l'étoile occultée ;
α et δ l'ascension droite et la déclinaison vraie de la Lune ;
α' et δ' son ascension droite et sa déclinaison apparente ;
π la parallaxe horizontale équatoriale ;
ρ le demi-diamètre horizontal ;
ρ' le demi-diamètre apparent ;
μ le temps sidéral ;
r la distance du lieu d'observation au centre de la Terre ;
φ la latitude de ce lieu ;
φ' cette latitude corrigée de l'effet dû à l'ellipticité de la Terre.

Admettons que Σ représente la distance angulaire de l'étoile P au centre L de la Lune, mesurée sur l'arc de grand cercle qui passe par ces points, et abaissons du pôle P' le cercle de déclinaison P'P. L'angle à l'étoile où P'PL, étant compté de 0° à 360°, sera compris entre 0° et 180° si $\alpha' < A$, et entre 180° et 360° si $\alpha' > A$; et, en considérant le triangle sphérique P'PL, on aura

$$\begin{aligned}\sin\Sigma\sin P &= -\cos\delta'\sin(\alpha'-A),\\ \sin\Sigma\cos P &= \sin\delta'\cos D-\cos\delta'\sin D\cos(\alpha'-A).\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, pour exprimer le lieu apparent de la Lune en fonction de son lieu vrai,

$$\begin{aligned}\Delta\cos\delta'\sin\alpha' &= \cos\delta\sin\alpha - r\cos\varphi'\sin\pi\sin\mu,\\ \Delta\cos\delta'\cos\alpha' &= \cos\delta\cos\alpha - r\cos\varphi'\sin\pi\cos\mu,\end{aligned}$$

Δ étant la distance du centre de la Lune au lieu d'observation.

Substituant, on a donc

$$\begin{aligned}\Delta\sin\Sigma\sin P &= -\cos\delta\sin(\alpha-A)+r\cos\varphi'\sin\pi\sin(\mu-A),\\ \Delta\sin\Sigma\cos P &= \sin\delta\cos D-\cos\delta\sin D\cos(\alpha-A)\\ &\quad - r\sin\pi[\sin\varphi'\cos D-\cos\varphi'\sin D\cos(\mu-A).\end{aligned}$$

Si l'on observe maintenant qu'au moment d'une immersion et d'une émersion

$$\Sigma = \rho' \quad \text{et} \quad \Delta \sin\rho' = \sin\rho,$$

d'où

$$\Delta \sin\Sigma = \sin\rho,$$

on en conclura

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin\rho \sin \mathrm{P} &= -\cos\delta \sin(\alpha - \mathrm{A}) + r \cos\varphi' \sin\pi \sin(\mu - \mathrm{A}), \\ \sin\rho \cos \mathrm{P} &= \quad \sin\delta \cos \mathrm{D} - \cos\delta \sin \mathrm{D} \cos(\alpha - \mathrm{A}) \\ &\quad - r \sin\pi[\sin\varphi' \cos \mathrm{D} - \cos\varphi' \sin \mathrm{D} \cos(\mu - \mathrm{A})]. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$\sin\rho = k \sin\pi,$$

k étant une constante donnée par les Tables lunaires, constante dont la valeur est égale, d'après les Tables de Hansen, à 0,27295, et divisons tout par $\sin\pi$; alors

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} k \sin \mathrm{P} &= -\frac{\cos\delta \sin(\alpha - \mathrm{A})}{\sin\pi} + r \cos\varphi' \sin(\mu - \mathrm{A}), \\ k \cos \mathrm{P} &= \quad \frac{\sin\delta \cos \mathrm{D} - \cos\delta \sin \mathrm{D} \cos(\alpha - \mathrm{A})}{\sin\pi} \\ &\quad - r \sin\varphi' \cos \mathrm{D} - \cos\varphi' \sin \mathrm{D} \cos(\mu - \mathrm{A}), \end{aligned} \right.$$

équations qui, étant élevées au carré, puis ajoutées ensemble, donnent

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} k^2 = & \left[\frac{\cos\delta \sin(\alpha - \mathrm{A})}{\sin\pi} - r \cos\varphi' \sin(\mu - \mathrm{A})\right]^2 \\ & + \left\{ \frac{\sin\delta \cos \mathrm{D} - \cos\delta \sin \mathrm{D} \cos(\alpha - \mathrm{A})}{\sin\pi} \right. \\ & \quad \left. - r[\sin\varphi' \cos \mathrm{D} - \cos\varphi' \sin \mathrm{D} \cos(\mu - \mathrm{A})] \right\}^2. \end{aligned} \right.$$

Ces équations sont rigoureuses; mais, comme pour l'objet que nous avons en vue une très grande précision n'est pas nécessaire, on peut supposer

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\cos\delta \sin(\alpha - \mathrm{A})}{\sin\pi} &= \frac{\alpha - \mathrm{A}}{\pi} \cos\delta = p, \\ \frac{\sin\delta \cos \mathrm{D} - \cos\delta \sin \mathrm{D} \cos(\alpha - \mathrm{A})}{\sin\pi} &= \frac{\delta - \mathrm{D}}{\pi} = q \quad (^1). \end{aligned} \right.$$

---

(1) Depuis quelques années, les rédacteurs de la *Connaissance des Temps* emploient les valeurs rigoureuses de p et de q. Les Tables XIII, XIV et XV, que nous donnons à la fin de l'Ouvrage, abrègent un peu le calcul de ces quantités.

Dès lors, et en posant

$$(6)\qquad \begin{cases} r\cos\varphi'\sin(\mu-\mathrm{A}) = u, \\ r\sin\varphi'\cos\mathrm{D} - r\cos\varphi'\sin\mathrm{D}\cos(\mu-\mathrm{A}) = v, \end{cases}$$

il vient

$$(7)\qquad k^2 = (p-u)^2 + (q-v)^2.$$

Supposons maintenant que α, δ, π et μ soient connus à une époque T, temps moyen de Paris, et assez rapprochée du temps $(\mathrm{T}+t)$ de l'immersion ou de l'émersion pour que l'on puisse exprimer le second membre de l'équation (4) en séries rapidement convergentes suivant les puissances de t; alors, pour le temps $\mathrm{T}+t$,

$$(8)\qquad \begin{cases} p \text{ deviendra } p + p't + \dfrac{p''t^2}{1.2} + \ldots, \\ q \quad \text{»} \quad q + q't + \dfrac{q''t^2}{1.2} + \ldots, \\ u \quad \text{»} \quad u + u't + \dfrac{u''t^2}{1.2} + \ldots, \\ v \quad \text{»} \quad v + v't + \dfrac{v''t^2}{1.2} + \ldots, \end{cases}$$

et, en négligeant les termes en t^2 et ceux des ordres suivants, on aura

$$(9)\qquad \begin{cases} p = \dfrac{\alpha-\mathrm{A}}{\pi}\cos\delta, \\ q = \dfrac{\delta-\mathrm{D}}{\pi}, \\ p' = \dfrac{\cos\delta}{\pi}\Delta\alpha = \dfrac{\cos\delta \text{ variat. horaire } \alpha}{\pi}, \\ q' = \dfrac{\Delta\delta}{\pi} = \dfrac{\text{variat. horaire } \delta}{\pi}, \\ u = r\cos\varphi'\sin(\mu'-\mathrm{A}), \\ v = r\sin\varphi'\cos\mathrm{D} - r\cos\varphi'\sin\mathrm{D}\cos(\mu'-\mathrm{A}), \\ u' = r\cos\varphi'\cos(\mu'-\mathrm{A})\,\dfrac{d\mu}{dt}, \\ v' = r\cos\varphi'\sin(\mu'-\mathrm{A})\sin\mathrm{D}\,\dfrac{d\mu}{dt}, \end{cases}$$

expressions dans lesquelles μ' désigne l'heure sidérale qui se rapporte au temps T et où

$$\log \frac{d\mu}{dt} = \log \lambda = 9,41916 \quad (^1).$$

En représentant par $\pm h$ l'angle horaire à Paris de l'étoile, à l'instant T de la conjonction vraie en ascension droite, positif si l'astre est dans l'Ouest, négatif si l'astre est dans l'Est; et par $\pm \mathcal{L}$ la longitude du lieu considéré, positive si le lieu est à l'Est et négative s'il est à l'Ouest, on aura

$$\mu' - A = h + \mathcal{L}. \tag{10}$$

En posant donc

$$\left\{\begin{aligned} a &= r\cos\varphi' \sin(h + \mathcal{L}),\\ b &= r\cos\varphi' \cos(h + \mathcal{L}),\\ c &= r\sin\varphi' \cos D,\end{aligned}\right. \tag{11}$$

les valeurs de u, u', v, v' qui précèdent pourront s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} u &= a,\\ u' &= \lambda b,\\ v &= c - b\sin D,\\ v' &= a\lambda \sin D.\end{aligned}\right. \tag{12}$$

Quant aux valeurs de $r\cos\varphi'$ et de $r\sin\varphi'$ qui entrent dans les expressions de a, b, c, elles seront déterminées à l'aide des relations suivantes, qui ont lieu dans l'ellipse :

$$r\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}, \quad r\sin\varphi' = \frac{(1 - e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}},$$

---

[1] En effet, $\frac{d\mu}{dt}$ étant la variation de l'angle horaire en 1^h de temps moyen, on a, en temps,

$$\frac{d\mu}{dt} = 3609^s,86,$$

et en arc

$$\frac{d\mu}{dt} = 54147'',90.$$

Multipliant ce nombre par sin 1″ (ou le divisant par 206265), afin de réduire $\frac{d\mu}{dt}$ en partie du rayon, on obtient

$$\log \frac{d\mu}{dt} = 9,41916.$$

lesquelles, en y supposant $\sin\theta = e \sin\varphi$, prennent la forme

$$(13)\qquad r\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}, \quad r\sin\varphi' = \frac{(1-e)^2}{e}\tang\theta.$$

e est l'excentricité du méridien terrestre, et l'on a

$$(14)\qquad \log e = 8{,}9122052, \quad \log\frac{(1-e)^2}{e} = 1{,}0848864.$$

Les valeurs de p, q, p', q' étant connues, l'équation (4) devient

$$k^2 = [p - u + (p' - u')t]^2 + [q - v + (q' - v')t]^2,$$

et si, pour résoudre cette équation par rapport à t, on pose

$$(15)\qquad \begin{cases} p - u = m\sin M, \\ q - v = m\cos M, \\ p' - u' = n\sin N, \\ q' - v' = n\cos N, \end{cases}$$

formules dans lesquelles m et n doivent être pris positivement, on aura

$$\begin{aligned} k^2 &= (m\sin M + n\sin N\,t)^2 + (m\cos M + n\cos N\,t)^2 \\ &= m^2(\sin^2 M + \cos^2 M) + n^2t^2(\sin^2 N + \cos^2 N) \\ &\quad + 2mnt(\sin M\sin N + \cos M\cos N) \\ &= m^2 + 2mnt\cos(M - N) + n^2t^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$k^2 = m^2[\sin^2(M - N) + \cos^2(M - N)] + 2mnt\cos(M - N) + n^2t^2,$$

ou bien

$$k^2 = m^2\sin^2(M - N) + [m\cos(M - N) + nt]^2.$$

Posons

$$(16)\qquad \cos\psi = \frac{m}{k}\sin(M - N), \quad (\log k = 9{,}43609).$$

Par la substitution de cette valeur, l'expression précédente de k^2 deviendra

$$k^2 = k^2\cos^2\psi + [m\cos(M - N) + nt]^2$$

ou

$$[m\cos(M - N) + nt]^2 = k^2(1 - \cos^2\psi) = k^2\sin^2\psi,$$

et, en extrayant la racine carrée, on aura

$$m\cos(M - N) + nt = \mp k\sin\psi,$$

c'est-à-dire

$$t = -\frac{m}{n}\cos(\mathrm{M}-\mathrm{N}) \mp \frac{k}{n}\sin\psi, \tag{17}$$

le signe supérieur devant être pris pour l'immersion et le signe inférieur pour l'émersion, pourvu que $\psi < 180^\circ$.

Pour les intervalles de temps t_i et t_e, compris entre $\mathrm{T}+\mathcal{L}$ et les instants de l'immersion et de l'émersion, on aura donc (en secondes de temps)

$$\left\{\begin{aligned} t_i &= -3600^s\,\frac{m}{n}\cos(\mathrm{M}-\mathrm{N}) - 3600^s\,\frac{k}{n}\sin\psi, \\ t_e &= 3600^s\,\frac{m}{n}\cos(\mathrm{M}-\mathrm{N}) + 3600^s\,\frac{k}{n}\sin\psi, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

et par suite

$$\left\{\begin{aligned} &\text{Pour le temps de l'immersion....} \quad \mathrm{I} = \mathrm{T}+\mathcal{L}+t_i \\ &\text{Pour le temps de l'émersion.. ..} \quad \mathrm{E} = \mathrm{T}+\mathcal{L}+t_e \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Remarques. — S'il arrivait que $\cos\psi$ fût plus grand que l'unité ou, ce qui revient au même, si l'on trouvait

$$\frac{m}{k}\sin(\mathrm{M}-\mathrm{N}) > 1,$$

cette circonstance indiquerait ou bien qu'il y a *appulse,* c'est-à-dire que la Lune passe près de l'étoile sans la cacher, ou bien que l'occultation est de très faible durée (¹). Toutefois une approximation complète est nécessaire pour lever le doute et décider si réellement

$$\frac{m}{k}\sin(\mathrm{M}-\mathrm{N})$$

est plus grand que 1. Dans ce cas, l'on n'a qu'une seule époque à

(¹) Le maximum de durée d'une occultation d'étoile par la Lune répond au cas où les points d'immersion et d'émersion sont les extrémités d'un même diamètre lunaire. Or, comme le moyen mouvement de la Lune est de 13°10′35″ par jour moyen et son diamètre apparent moyen de 31′10″, on a cette proportion

$$\frac{13^\circ 10' 35''}{31' 10''} = \frac{24^{\mathrm{h}}}{x},$$

d'où l'on tire, pour la durée maximum de l'occultation,

$$x = 56^{\mathrm{m}} 46^{\mathrm{s}} \text{ (environ).}$$

calculer, qui est celle de la plus courte distance des centres donnée par l'expression

$$t_a = -\frac{m}{n}\cos(M - N).$$

Lorsque l'astre qui doit être occulté par la Lune est une planète, il faut, dans les formules qui précèdent, remplacer k par $k \pm \frac{\sigma}{\varpi}$ et λ par $\lambda - 0,0000727\,\mu$, σ étant le demi-diamètre de la planète, ϖ la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune, moins celle de la planète, et μ le mouvement horaire de la planète en ascension droite exprimé en secondes de temps, positif si le mouvement est direct, négatif s'il est rétrograde.

Quant au double signe qui affecte $\frac{\sigma}{\varpi}$, on peut remarquer que le signe *positif* se rapporte à l'immersion du premier bord et à l'émersion du second, et le signe *négatif* à l'immersion du second bord et à l'émersion du premier.

Voici une application des formules qui précèdent au calcul de l'occultation de ζ Bélier le 9 janvier 1881, en faisant usage des Tables XIII-XV. Ces Tables, très ingénieuses, simplifient beaucoup le calcul des éléments p, q, p' et q'.

On déduit de la *Connaissance des Temps* pour l'époque T (en heure ronde), temps moyen de Paris, la plus voisine de la conjonction vraie en ascension droite,

1° A, ascension droite apparente de l'astre occulté;
2° D, déclinaison apparente de l'astre occulté.... { boréale + / australe —
3° α, ascension droite de la Lune;
4° δ, déclinaison de la Lune .... { boréale + / australe —
5° π, parallaxe horizontale équatoriale de la Lune.

Calcul des éléments.

Date........			9 janvier 1881.		
Heure	10^h	11^h	12^h	13^h	14^h
Nom de l'ast.			(Époque T)		
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
α............	3. 3.58,401	3. 6. 5,677	3. 8.13,043	3.10.20,502	3.12.28,048
A............	3. 8. 5,78	3. 8. 5,78	3. 8. 5,78	3. 8. 5,78	3. 8. 5,78

Heure.....	10^h	11^h	12^h	13^h	14^h
δ..........	+20°.42′.10″,19	+20°.48′.23″,98	+20°.54′.31″,69	+21°. 0′.33″,22	+21°. 6′.28″,65
D..........	+20.36.17,1	+20.36.17, 1	+20.36.17, 1	+20.36.17, 1	+20.36.17, 1
(α − A) séc..	− 247,379	− 120,103	+ 7,264	+ 134,722	+ 262,268
δ − D	+ 5.53,09	+ 12. 6,88	+ 18.14,56	+ 24.16,12	+ 30.11,55
(δ − D) séc.	+ 353,09	+ 726,83	+ 1094,56	+ 1456,12	+ 1811,55
π (¹)......	54.55,31	54.54,09	54.52,89	54.51,71	54.50,54

log cos δ (1)..............	9,971018	9,970711	9,970416	9,970125	9,969837
Table XIII (2)..........	1,176086	1,176104	1,176110	1,176103	1,176083
log (α − A) (3).........	2,393363 —	2,079554 —	4,861176	2,129438	2,418745
Table XIV (4)..........	5,560650	5,560640	5,560636	5,560640	5,560650
(1) + (2) + (3) = (I)..	3,540467 —	3,226369 —	2,007702	3,275666	3,564665
log π (5)..............	3,517896	3,517735	3,517577	3,517422	3,517267
log (δ − D) (6)........	2,547885	2,861463	3,039240	3,163197	3,258050
(I) − (5) = log *p*.....	0,022571 —	9,708634 —	8,490125	9,758244	0,047398
(3) + (4) = (II).......	7,954013 —	7,640194 —	6,421812	7,690078	7,979395
sin D (7).............	9,546443	9,546443	9,546443	9,546443	9,546443
(6) − (5) = (III)......	9,029989	9,343728	9,521663	9,645775	9,740783
Table XV (8)..........	+ 18	+ 17	+ 16	+ 15	+ 13
log IV = (III) + (8)....	9,030007	9,343745	9,521679	9,645790	9,740796
log V = log *p* + (II) + (7).	7,523027	6,895271	4,458380	6,994765	7,573236
(IV)..................	+0,107154	+0,220671	+0,332414	+0,442374	+0,550549
(V)...................	+ 3334	+ 786	+ 3	+ 988	+ 3743
p....................	−1,053346	−0,511251	+0,030912	+0,573118	+1,115316
1^{re} diff. (valeur de *p′*)..	+ 542095	+ 542163	+ 542206	+ 542198	
q = (IV) + (V)........	+0,110488	+0,221457	+0,322417	+0,443362	+0,554292
1^{re} diff. (valeur de *q′*)..	+ 110969	+ 110960	+ 110945	+ 110930	

Calcul de l'occultation.

Constantes du calcul.

$\log r \sin \varphi' = 9{,}87461$
$\log r \cos \varphi' = 9{,}81919$
$\log r \cos \varphi' \lambda = 9{,}23835$
$\log k = 9{,}43609$

	Immersion.	Émersion.
	h m s	h m s
T, temps moyen de la ☾ pour Paris...	12.48. 0,00	13.24. 0,00
Correction (Table VI de la *C. des T.*)..	2. 6,20	2.12. 0,00
Temps sidéral de la ☾..............	12.50. 6,20	12.26.12,00
T_s, temps sidéral à midi moyen	19.16.36,79	19.16.36,79
μ, temps sidéral	8. 6.42,99	8.42.48,79
A..............................	3. 8. 5,78	3. 8. 5,78
Angle horaire *h* ou (μ − A) (en temps).	+ 4.58.37,21	+ 5.34.43,01

(¹) Si l'astre occulté était une planète, il faudrait prendre $\pi - \pi_*$ au lieu de π, π_* étant la parallaxe de la planète.

$\log \sin h$	9,98423 +	9,99736 +	
$\log r \cos \varphi'$	9,81919 +	9,81919 +	
$\log u$	9,80342 +	9,81655 +	
u	+ 0,63593	+ 0,65545	
$\log \cos D$	8,97129	9,97129	
$\log r \sin \varphi'$	9,87461	9,87461	
$\log r \sin \varphi' \cos D = \log(\mathrm{I})$	9,84590	9,84590.	
$\log \sin D$	8,54644 +	9,54644 +	
$\log \cos h$	9,42264 +	9,04177 +	
$\log r \cos \varphi'$	9,81919 +	7,81919 +	
$\log r \cos \varphi' \sin D \cos h = \log(\mathrm{II})$	8,78827 +	8,40740 +	
(I)	+ 0,70131	+ 0,70131	
(II)	+ 0,06141	+ 0,02555	
$v = (\mathrm{I}) - (\mathrm{II})$	+ 0,63990	+ 0,67576	
$\log \cos h$	9,42264 +	9,04177 +	
$\log r \cos \varphi' \lambda$	9,23835 +	9,23835 +	
$\log u'$	8,66099 +	8,28012 +	
u'	+ 0,04581	+ 0,01906	
$\log \sin h$	9,98423 +	9,99736 +	
$\log \sin D$	9,54644 +	9,54644 +	
$\log r \cos \varphi' \lambda$	9,23835 +	9,23835 +	
$\log v'$	8,76902 +	8,78215 +	
v'	+ 0,05875	+ 0,06055	
p'	+ 0,54218		
q'	+ 0,11095		
p	+ 0,57312	+ 0,57312	
$p't$	— 0,10844	+ 0,21687	(1)
p	+ 0,46468	+ 0,78999	
q	+ 0,44336	+ 0,44336	
$q't$	— 0,02219	+ 0,04438	
	+ 0,42117	+ 0,48774	
$p - u$	— 0,17125	+ 0,13454	
$q - v$	— 0,21873	— 0,18802	
$p' - u'$	+ 0,49637	+ 0,52312	
$q' - v'$	+ 0,05220	+ 0,05040	

---

(1) Les valeurs de t qui se rapportent à l'immersion et à l'émersion sont dans

$\log(p-u) = \log m \sin M$	$9,23363 -$	$9,12885 +$
$\log(q-v) = \log m \cos M$	$9,33991 -$	$9,27421 -$
$\log \tang M$	$9,89372 +$	$9,85464 -$
M	$218^\circ 3' 30''$	$144^\circ 24' 52''$
$\log(p'-u') = \log n \sin N$	$9,69580 +$	$9,71860 +$
$\log(q'-v') = \log n \cos N$	$8,71767 +$	$8,70243 +$
$\log \tang N$	$0,97813 +$	$1,01617 +$
N	$83^\circ 59' 48''$	$84^\circ 29' 49''$
$M - N$	$134^\circ 3' 42''$	$59^\circ 55' 3''$
$\log(p-u)$	$9,23363 -$	$9,12885 +$
$\log \sin M$	$9,78992 -$	$9,76486 +$
$\log m$	$9,44371 +$	$9,36399 +$
$\log(p'-u')$	$9,69580 +$	$9,71860 +$
$\log \sin N$	$9,99761 +$	$9,99799 +$
$\log n$	$9,69819 +$	$9,72061 +$
$\log \frac{m}{k}$	$0,00763 +$	$9,92790 +$
$\log \sin(M-N)$	$9,85649 +$	$9,93717 +$
$\log \cos \psi$	$9,86412 +$	$9,86507 +$
ψ	$43^\circ 0' 4''$	$42^\circ 51' 59''$
$\log\left(-\frac{m}{n}\right)$	$9,74553 -$	$9,64338 -$
$\log \cos(M-N)$	$9,84225 -$	$9,70005 +$
$\log -\frac{m}{n}\cos(M-N)$	$9,58778 +$	$9,34343 -$
$\log \frac{k}{n}$	$9,73790$	$9,71548$
$\log \sin \psi$	$9,83379$	$9,83269$
$\log \frac{k}{n} \sin \psi$	$9,57169$	$9,54817$

notre exemple

$$t = \frac{1}{6}(48^{\mathrm{m}} - 1^{\mathrm{h}}), \quad t = \frac{1}{6}24^{\mathrm{m}}.$$

On a donc pour l'immersion

$$p't = -0,54218 \times 2 = -0,10844,$$

et pour l'émersion

$$p't = +0,54218 \times 4 = 0,21687.$$

$-\frac{m}{n}\cos(\mathrm{M}+\mathrm{N})$..............	$+0,38706$	$-0,22051$
$\frac{k}{n}\sin\psi$........................	$-0,37298$	$+0,35332$
t...........................	$+0,01408$	$+0,13281$
	$0,84$	$7,97$

Immersion.

Temps moyen.......... $12^{\mathrm{h}}48^{\mathrm{m}}+0,84=12^{\mathrm{h}}48^{\mathrm{m}}8$.
Temps sidéral......... $8^{\mathrm{h}}\ 7^{\mathrm{m}}5$.

Émersion.

Temps moyen.......... $13^{\mathrm{h}}24^{\mathrm{m}}+7,97=13^{\mathrm{h}}31^{\mathrm{m}}9$.
Temps sidéral......... $8^{\mathrm{h}}50^{\mathrm{m}}7$.

II. — Seconde approximation du calcul de l'occultation.

Première méthode. — Cas des occultations visibles à Paris. — Lorsque la valeur de t_i ou celle de t_e excède 1^{h}, ce qui arrive toutes les fois que $\mathrm{T}+\mathcal{L}$ diffère beaucoup de la conjonction apparente en ascension droite, dans le lieu considéré, on ne peut plus compter sur l'exactitude des résultats obtenus, et, dans ce cas, il faut procéder à une seconde approximation en employant de nouvelles valeurs (p), (q) et (h), correspondantes à une époque $(\mathrm{T})+\mathcal{L}$ plus rapprochée de la conjonction apparente dans le lieu que le temps $\mathrm{T}+\mathcal{L}$. Pour cette nouvelle époque, on pourra prendre

$$(\mathrm{T})+\mathcal{L}=\frac{\mathrm{I}+\mathrm{E}}{2}.$$

Soit alors $\tau=(\mathrm{T})+\mathcal{L}-(\mathrm{T}+\mathcal{L})$. On calculera les quantités (p), (q) et (h) qui doivent être employées dans ce second calcul par les formules

$$(a)\qquad\left\{\begin{aligned}(p)&=p+p'\tau,\\(q)&=q+q'\tau,\\(h)&=h+\tau_1,\end{aligned}\right.$$

τ_1 étant la valeur en arc de l'intervalle τ préalablement converti en temps sidéral, et p, q, p', q', h des constantes dont la signification nous est connue; puis, en partant de l'angle horaire $(h)+\mathcal{L}$ qui correspond au temps $(T) + \zeta$, on calculera par les formules (11) et (12) les quantités u, u', v, v' qui dépendent de la position du lieu. Enfin avec les quantités u, u', v, v' et les constantes (p), (q), p', q' (les dérivées p' et q' sont celles de la première approximation), on déterminera, comme précédemment, à l'aide des formules (15), (16), (17), (18) et (19), les temps de l'immersion et de l'émersion, lesquels, par cette seconde approximation, seront exacts à la minute, ce qui est bien suffisant pour se préparer à l'observation.

Si l'astre qui doit être occulté était une planète, il faudrait ajouter à la valeur de (h), donnée ci-dessus, la variation $-\mu\tau$ que subit l'ascension droite pendant l'intervalle de temps τ; et cette valeur deviendrait ainsi

$$(h) = h + \tau_1 - \mu\tau. \tag{b}$$

Seconde méthode. — Cas des occultations invisibles à Paris. — La méthode qui précède convient aux occultations qui sont visibles à Paris ou à celles dont les éléments h, p, q, p', q' se rapportent au temps T de la conjonction apparente en ascension droite. Pour celles dont les éléments sont relatifs au temps de la conjonction vraie, c'est-à-dire pour les occultations invisibles à Paris, on doit, pour procéder au calcul de l'occultation dans un lieu donné, chercher le temps de la conjonction apparente dans ce lieu, puis ramener à cet instant les valeurs de h, p, q, qui sont données dans la *Connaissance des Temps* pour le temps T de la conjonction vraie.

Proposons-nous comme exemple de calculer l'occultation de 27 Taureau, le 17 octobre 1875, dans le lieu (San-Francisco) dont

La longitude est........ $8^h 19^m 1^s = 124°45'15''$O de Paris
La latitude .... $37°49'27''$N.

et en combinant les deux approximations.

On déduit de la *Connaissance des Temps* pour la position de l'astre (année 1875, p. 466)

Ascension droite .... $3^h 41^m 44^s$
Déclinaison .... $23°40'$B

On a ensuite, par les formules (13), (14),

$$\log(r\sin\varphi') = 9,78528+,\quad \log(r\cos\varphi') = 9,89811,$$

$$\varphi' = 37^\circ 38',4\ \text{N}.$$

On a d'ailleurs (p. 471)

$$T = 0^h 3^m 30^s,$$

$$\begin{aligned} h &= +151^\circ 0', & q &= +0,1491, \\ \log p' &= 9,76932, & p' &= +0,5879, \\ \log q' &= 9,23931, & q' &= +0,1735; \end{aligned}$$

de là on conclut pour la valeur de l'angle horaire vrai de 27 Taureau, à San-Francisco, au moment de la conjonction vraie :

Angle horaire à Paris	$+151^\circ, 0'$
Longitude du lieu	$-124, 45$
Angle horaire	$+26, 15$ en arc $+1^h 45^m 0^s$ en temps

Il faut maintenant déterminer d'une manière suffisamment approchée l'intervalle de temps τ qui sépare la conjonction vraie T de la conjonction apparente dans le lieu considéré, ce qui peut se faire à l'aide de la formule suivante, dont nous donnons une Table à la fin du Volume (Table XVI),

$$\tau = \frac{A}{\mu f - B}.$$

Or, avec l'angle horaire $+1^h 45^m 0^s$ pour argument, on trouve pour les valeurs des quantités A et B

$$A = +44,0,\quad B = +23,5.$$

On a d'ailleurs, à l'instant T, $\mu = 155^s,55$, et, comme pour le lieu considéré $\log f = 9,73036$, on en conclut $\mu f = 83,61$. Par conséquent

$$\tau = \frac{44,0}{83,61 - 23,5} = +0^h 43^m 56^s,$$

$$\tau_1 = +10^\circ 59',\quad \log\tau = 9,86458+$$

Les valeurs de τ et de τ_1 une fois obtenues, on a pour le temps moyen approché de la conjonction apparente dans le lieu et pour l'angle horaire (h) qui lui correspond :

	h m s
T	0. 3.30 le 17 octobre
$\mathcal{L}$	$-$8.19. 1
τ	$+$0.43.56
$T+\mathcal{L}+\tau$	16.28.25

	°
h	$+$151, 0
$\mathcal{L}$	$-$124,45
τ	$+$ 10,59
(h)	$+$ 37,14

Les formules (a), (11), (12) donnent ensuite pour le calcul de (p), (q), u, u', v, v' :

$\log p'$	9,76932 +
$\log \tau$	9,86458 +
$\log p'\tau$	9,63390 +
(p)	+ 0,4304

$\log q'$	9,23931 +
$\log \tau$	9,86458 +
$\log q\tau$	9,10389 +
$q'\tau$	+ 0,1270
q	+ 0,1491
(q)	+ 0,2761

$\log r \cos \varphi'$	9,89811 +
$\log \sin (h)$	9,78180 +
$\log a$	9,67991 +
$a = u$	+ 0,4785

$\log r \cos \varphi'$	9,89811 +
$\log \cos (h)$	9,90101 +
$\log b$	9,79912 +
$\log \lambda$	9,41916 +
$\log u'$	9,21828
u'	+ 0,1653

$\log r \sin \varphi'$	9,78528 +
$\log \cos D$	9,96185 +
$\log c$	9,74713 +
c	+ 0,5586
$-b \sin D$	$-$ 0,2528
v	+ 0,3058
v'	+ 0,0504

$\log b$	9,79912 +
$\log \sin D$	9,60359 +
$\log b \sin D$	9,40271 +
$\log a$	9,67991 +
$\log \lambda$	9,41916 +
$\log \sin D$	9,60359 +
$\log v'$	8,70266 +

Le reste du calcul s'achève à l'aide des formules (15), (16), (17), (18) et (19), et l'on trouve pour les valeurs de M, N, m, n, et de

ψ, t_i, t_e, P, P′ :

$(p) - u$	− 0,0481
$(q) - v$	— 0,0297
M	238° 18′
$\log m$	8,75230
$p' - u'$	+ 0.4226
$q' - v'$	+ 0,1231
N	73° 46′
co-log n	0,35639 +
$\log k$	9,43609 +
$\log \frac{k}{n}$	9,79248 +

$\log m \sin M$	8,68215 —
$\log m \cos M$	8,47276 —
$\log \operatorname{tang} M$	0,20939 +
$\log \sin M$	9,92985 —
$\log n \sin N$	9,62593 +
$\log n \cos N$	9,09026 +
$\log \operatorname{tang} N$	0,53567 +
$\log \sin N$	9,98232 +

$$M - N = 164°32'.$$

$\log m$	8,75230 +
$\operatorname{colog} k$	0,56391 +
$\log \sin (M - N)$	9,42599 +
$\log \cos \psi$	8,71220 +
$\log \sin \psi$	9,99934 ∓
$\log \frac{k}{n}$	9,79248 +
3600″	3,55630 +
	3,34812 ±

ψ	86°.50′
N	73.46
N + ψ	160.36
	270.00
N − ψ	346.56
Q	109.24
Q′	283. 4

$$\mp 0^h 37^m 29^s,$$

— 3600″	3,55630 —
$\log m$	8,75230 +
co-log n	0,35639 +
$\cos (M - N)$	7,98398 —
	2,64897 +

	h m s
	∓ 0.37. 9
	± 0. 7.26
t_i	− 0.29.43
t_e	+ 0.44.34

$$\mp 0^h 7^m 26^s.$$

Avec ces valeurs de t_i et de t_e, on obtient enfin

	Immersion.		Émersion.
	h m s		h m s
$T + \mathcal{L} + \tau$	16.28.25	$T + \mathcal{L} + \tau$	16.28.25
t_i	− 0.29.43	t_e	— 0.44.35
I	15.58.42	E	17.13. 0

III. — Détermination des angles de position des points de contact par rapport au pôle et au zénith.

Pour se préparer à l'observation, il est nécessaire de connaître les points du disque lunaire où doivent se faire l'immersion et l'émersion : ils sont déterminés soit par l'angle que font entre eux les grands cercles menés du centre de la Lune à l'étoile et au pôle, angle désigné dans la *Connaissance des Temps* et les autres *Éphémérides* sous le nom d'*angle-pôle,* soit par l'angle des grands cercles menés du centre de la Lune à l'étoile et au zénith, appelé *angle-zénith.* Occupons-nous donc de la détermination de ces angles.

Eu égard aux relations (15), les formules (3) du § II peuvent s'écrire

$$-k\sin P = m\sin M + N\sin N t,$$
$$k\cos P = m\cos M - N\cos N t,$$

et, en substituant pour t sa valeur ci-dessus, on obtient

$$-k\sin P = m\sin M - m\sin N\cos(M-N) \mp \sin\psi\sin N,$$
$$-k\cos P = m\cos M + m\cos N\cos(M-N) \pm \sin\psi\cos N.$$

Mais

$$\begin{aligned}\sin M - \sin N\cos(M-N) &= \sin M - \sin N\cos M\cos N - \sin M\sin^2 N\\ &= \sin M(1-\sin^2 N) - \sin N\cos M\cos N\\ &= \cos N(\sin M\cos N - \sin N\cos M) = \cos N\sin(M-N),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos M + \cos M\cos(M-N) &= \cos M + \cos N\cos M\cos N\\ &\quad + \sin N\sin M\cos N' + \sin N\sin M\cos N\\ &= \cos M(1+\cos^2 N) + \sin N\sin M\cos N = \sin N\sin(M-N).\end{aligned}$$

Ainsi

$$k\sin P = -m\sin(M-N)\cos N \pm k\sin\psi\sin N,$$
$$k\cos P = -m\sin(M-N)\sin N \mp k\sin\psi\cos N;$$

d'ailleurs

$$m\sin(M-N) = k\cos\psi.$$

Donc

$$\sin P = -\cos(N\pm\psi),$$
$$\cos P = -\sin(N\pm\psi),$$

et, par conséquent,

$$(1)\qquad \begin{cases} P = 270° - (N + \psi) \text{ pour l'immersion,} \\ P = 270° - (N - \psi) \text{ pour l'émersion.} \end{cases}$$

C'est la valeur de l'angle que, dans la *Connaissance des Temps*, on appelle *angle-pôle* (¹).

Quant à l'*angle au zénith*, que nous désignerons par Q, il est évidemment égal à P augmenté de l'angle $\mathfrak{P}$, compris entre le cercle vertical et le cercle de déclinaison; ainsi

$$Q = P + \mathfrak{P}.$$

Cet angle $\mathfrak{P}$, que l'on nomme *angle parallactique,* est déterminé par la considération du triangle sphérique formé par le pôle, l'étoile et le zénith, lequel donne, en appelant H la hauteur de l'astre et φ la latitude du lieu pour lequel on calcule,

$$\cos H \sin \mathfrak{P} = \cos\varphi \sin h,$$
$$\cos H \cos \mathfrak{P} = \cos D \sin\varphi - \sin D \cos\varphi \cos h,$$

et, par suite,

$$(3)\qquad \operatorname{tang} \mathfrak{P} = \frac{\sin h}{\operatorname{tang}\varphi \cos D - \sin D \cos h}.$$

Les formules qui précèdent, appliquées à notre exemple (occultation de ζ Bélier), donnent :

	Immersion.		Émersion.
N....................	83°.59′.48″		84°.29′.49″
ψ....................	43. 0. 4		42.51.59
N + ψ................	126.59.52	N — ψ................	41.37.50
P....................	143		228.22
Ang. $\mathfrak{P}$ (Table XVII)...	44.48		43.48
Q....................	188		272

(¹) Lorsqu'il y a *appulse,* le point de la plus courte distance des centres est donné par l'expression

$$P = 270° - N, \quad \text{si} \quad \sin(M - N) \text{ est positif,}$$
$$P = 90 - N, \quad \text{si} \quad \sin(M - N) \text{ est négatif.}$$

IV. — Détermination des deux latitudes extrêmes entre lesquelles le phénomène de l'occultation est observable.

Il nous reste maintenant à déterminer les limites extrêmes de la latitude entre lesquelles le phénomène de l'occultation peut être observé.

Ces limites appartiennent évidemment aux points extrêmes des lignes de simple contact nord et sud déterminées comme dans le cas d'une éclipse de Soleil, et peuvent être obtenues en partant des relations que nous avons établies au § IX du Chapitre II. Il faut seulement remarquer ici que l'étoile n'ayant ni mouvement appréciable, ni parallaxe, ni demi-diamètre, on peut prendre P au lieu de P′, δ au lieu de Δ' et faire, en outre, $\mathcal{D} = D'$, ce qui apporte quelque simplification dans le calcul. On a de la sorte, et en adoptant les notations du § XV,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang} i = \frac{D_1}{\alpha_1 \cos\mathcal{D}}, \quad n = \partial \cos i, \quad \cos W = \frac{n \pm \delta}{P},\\ &\sin Z = \frac{\cos W}{\cos\omega'}, \qquad M = (-i) \mp \omega'; \end{aligned}\right.$$

on a ensuite,

$$(2)\qquad \sin l = \sin\mathcal{D} \cos Z + \cos\mathcal{D} \sin Z \cos M,$$

et tout se réduit, dans le cas actuel, à chercher quelle est la valeur de l'angle ω' qui rend l un *maximum* ou un *minimum*.

Soit φ un arc déterminé par la relation

$$(3)\qquad \cos Z = \cos\varphi \sin W;$$

en rapprochant cette équation de la précédente

$$(4)\qquad \cos\omega' \sin Z = \cos W,$$

on en conclut

$$(5)\qquad \sin\omega' \sin Z = \sin\varphi \sin W,$$

car ces trois équations, élevées au carré, puis ajoutées ensemble, donnent pour somme l'unité.

On a d'ailleurs

$$\sin\mathcal{D} \cos Z = \sin\mathcal{D} \cos\varphi \sin W,$$

et, de plus,

$$\sin Z \cos M = \sin Z \cos(i \pm \omega') = \cos i \cos W \mp \sin i \sin\varphi \sin W.$$

Ainsi

$$(6) \qquad \sin l = \cos\mathcal{D} \cos i \cos W + \sin W (\sin\mathcal{D} \cos\varphi \mp \cos\mathcal{D} \sin i \sin\varphi).$$

Désignons par θ et ψ deux nouveaux arcs tels que

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} \cos\theta \cos\psi = \sin\mathcal{D}, \\ \cos\theta \sin\psi = \pm \cos\mathcal{D} \sin i; \end{array}\right.$$

par la même raison que, tout à l'heure, on pourra poser

$$(8) \qquad \sin\theta = \cos\mathcal{D} \cos i,$$

et l'expression précédente de $\sin l$ deviendra alors

$$(9) \qquad \sin l = \cos W \sin\theta + \sin W \cos\theta \cos(\varphi + \psi).$$

Comme l'angle $\varphi + \psi$ est la seule variable que renferme cette équation, on voit que la plus grande valeur de l correspond au cas où $\varphi + \psi = 0$, et la plus petite valeur à celui où $\varphi + \psi = 180^\circ$. Et il est évident d'ailleurs que, pour ces valeurs,

$$\sin l = \sin(\theta + W),$$
$$\sin l = \sin(\theta - W).$$

Ainsi donc

$$(10) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \text{Maximum de } l \ldots\ldots\ldots & \theta + W \\ \text{Minimum de } l \ldots\ldots\ldots & \theta - W \end{array}\right.$$

la valeur de W, dans le premier cas, devant être celle qui convient à la limite nord, et, dans le second cas, celle qui se rapporte à la limite sud.

D'après l'équation (3), $\cos Z$ doit avoir le même signe que $\cos\varphi$, lequel doit être celui de $+\cos\psi$ pour la limite nord ou de $-\cos\varphi$ pour la latitude sud; car, dans le premier cas, $\varphi + \psi = 0$ et dans le second, $\varphi + \psi = 180^\circ$. Mais par la relation (7), $\cos\psi$ doit être de même signe que $\mathcal{D}$; par conséquent

(11) Pour la limite nord, $\cos Z$ a le même signe que $+\mathcal{D}$,
Pour la limite sud, $\cos Z$ a le même signe que $-\mathcal{D}$.

Et il suit évidemment de là que, lorsque la déclinaison $\mathcal{D}$ est négative, la limite extrême nord a l'étoile au-dessous de l'horizon, puisqu'alors la distance zénithale Z excède 90°, et, par conséquent, cette limite doit être exclue. Par la même raison, la limite sud doit être rejetée quand $\mathfrak{D}$ est positif.

Ainsi la seule limite extrême admissible est donnée par les équations

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang} i = \frac{D_1}{\alpha_1 \cos\mathfrak{D}}, \quad n = \partial \cos i, \\ &\cos W_1 = \frac{n+\delta}{P}, \quad l_1 = \theta + W_1 \text{ quand } \mathfrak{D} \text{ est positif}, \\ &\cos W_1 = \frac{n-\delta}{P}, \quad l_1 = \theta - W_1 \text{ quand } \mathfrak{D} \text{ est négatif}. \end{aligned}\right.$$

Quant à l'autre limite en latitude, elle est évidemment l'un des deux lieux où la seconde ligne limite vient rencontrer les courbes du lever et du coucher, et est déterminée, par conséquent, par les formules

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos W_2 = \frac{n \mp \delta}{P}, \quad \sin l_2 = \cos\mathfrak{D} \cos a, \\ &\qquad a = (-i) \mp W_2, \end{aligned}\right.$$

le signe supérieur se rapportant, comme précédemment, au cas où $\mathfrak{D}$ est positif, et le signe inférieur à celui où $\mathfrak{D}$ est négatif.

Les équations qui précèdent peuvent être mises sous la forme suivante

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang} i = \frac{D_1}{\alpha_1 \cos\mathfrak{D}}, \quad \cos W_1 = \mp\frac{n}{P} - \frac{\delta}{P}, \\ &\cos W_2 \mp \frac{n}{P} + \frac{\delta}{P}, \quad \frac{\delta}{P} = 0,2729, \\ &n = \partial \cos i, \quad \sin\theta = \cos\mathfrak{D} \cos i, \quad l_1 = W_1 - \theta, \\ &\qquad \sin l_2 = \mp \cos\mathfrak{D} \cos(W_2 - i), \end{aligned}\right.$$

en observant que W_1, W_2, θ et i doivent être pris avec le même signe que $\mathfrak{D}$, et en convenant de prendre en outre le signe supérieur quand $\mathfrak{D}$ est positif et le signe inférieur quand $\mathfrak{D}$ est négatif.

Lorsqu'il arrive que W_1 est imaginaire, l_1 est égal à 90° et de même nom que $\mathfrak{D}$. Dans ce cas, l'occultation est visible près du pôle de la Terre lequel est alors tourné vers l'étoile. Quant c'est W_2 qui est imaginaire, l_2 est égal à $90° - \mathfrak{D}$ et de nom différent avec $\mathfrak{D}$.

Il reste à déterminer la position angulaire des points où l'immersion a lieu sur le disque de la Lune, ce qui peut évidemment se faire de la même manière que dans le cas d'une éclipse de Soleil. Ainsi on a pour l'image directe

$$(15)\quad\left\{\begin{array}{ll}\text{A l'immersion : angle de position.....} & (180^\circ - i) - \omega \\ \text{A l'émersion : angle de position......} & (180^\circ - i) + \omega\end{array}\right.$$

et pour l'image inverse

$$(16)\quad\left\{\begin{array}{ll}\text{A l'immersion : angle de position.....} & (-i) - \omega \\ \text{A l'émersion : angle de position......} & (-i) + \omega\end{array}\right.$$

tous ces angles étant comptés du *Nord* vers l'*Est*.

Appliquons les formules qui précèdent à la recherche pour ζ Bélier des limites en latitude de l'occultation.

On déduit de la *Connaissance des Temps,* pour l'époque $11^h 47^m 12^s$ de la conjonction en ascension droite, les données suivantes :

$$\mathrm{D}_{☾} = +20^\circ 54' 11'', \quad \mathcal{D}_\star = 20^\circ 36' 17'',$$

d'où

$$\mathrm{D}_{☾} - \mathcal{D}_\star = +0^\circ 17' 54'', \quad \mathrm{D}_1 = +6' 7'', \quad \alpha_1 = +31' 54'', \quad \mathrm{P} = 54' 53''.$$

On a ensuite

$\log \mathrm{D}_1$	2,56467
$\log \alpha_1$	3,28194
$\log \dfrac{\mathrm{D}_1}{\alpha_1}$	9,28273
$\log \cos \mathcal{D}$	9,97130
$\log \operatorname{tang} i$	9,31143
i	$+11^\circ 35'$
$-\dfrac{n}{\mathrm{P}}$	$-0,3195$
constante..............	$+0,2729$
log cos nat W_1	$-0,5924$
log cos nat W_2	$-0,0466$
W_1	$+126^\circ.23'$
W_2	$+92.40$
$\mathrm{W}_2 - i$	$+81.5$
$l_1 = \mathrm{W}_1 - \theta$	$+59.54$

$\log(\mathrm{D}_{☾} - \mathcal{D}_\star) = \partial$....	3,03100
$\log \cos i$	9,99106
$\log n$	3,02206
$\log \mathrm{P}$	3,51759
$\log \dfrac{n}{\mathrm{P}}$	9,50447
$\dfrac{n}{\mathrm{P}}$	$+0,3159$
$\log \cos i$	9,99106
$\log \cos \mathcal{D}$	9,97130
$\log \cos \theta$	9,96236
θ	$66^\circ 29'$
$\log \cos \mathcal{D}$	9,97130
$\log \cos(\mathrm{W}_2 - i)$	9,19033
$-\log \sin l_2$	9,16163—
l_2	$-8^\circ 21'$

Ainsi les limites en latitude sont :

Limite *Nord*.......... 60° Limite *Sud*......... .. 8°

CHAPITRE IV.

PRÉDICTION DES MARÉES.

I. — Des causes qui produisent ce phénomène. Effets généraux.

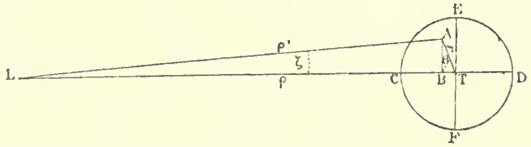
Sous l'influence attractive du Soleil et de la Lune, la mer éprouve un mouvement d'oscillation régulier, en vertu duquel ses eaux s'élèvent et s'abaissent alternativement dans un intervalle d'environ $12^{\text{h}}15^{\text{m}}$. Ainsi, à partir d'un certain moment, on voit, pendant $6^{\text{h}}15^{\text{m}}$ environ, la mer s'élever et envahir graduellement les rivages qui la bordent; c'est le moment du *flux* ou du *flot;* puis, durant la même période de temps qu'elle a mis à monter, on la voit s'abaisser et abandonner peu à peu les lieux qu'elle avait inondés : c'est le *reflux*, le *jusant* ou la *mer baissante.* On donne le nom de *haute mer*, au maximum d'élévation des eaux dû à l'effet du flux, et celui de *basse mer* au maximum de dépression causé par l'effet du reflux. L'oscillation entière du flux ou du reflux, ou plutôt l'amplitude de cette oscillation, est ce qu'on désigne sous le nom de *marée;* et l'on appelle *marée totale* la différence de niveau entre la haute mer et la basse mer, ou, pour parler plus exactement, la différence entre la moyenne de deux pleines mers consécutives et la basse mer intermédiaire.

Les plus grands géomètres des temps modernes, Descartes, Newton, Daniel Bernoulli, Euler, Maclaurin, d'Alembert, se sont occupés du problème des marées, mais sans parvenir à en donner une solution satisfaisante. Kepler paraît être le premier qui ait cherché dans l'action attractive des astres l'explication de ce curieux phénomène; mais il était réservé à Newton d'en faire connaître la vraie cause, en le rattachant au principe de la gravitation universelle qu'il venait de découvrir. La théorie de ce grand géomètre parut dans le Livre des *Principes* en 1687. Un peu plus tard, en 1740, Daniel Bernoulli, Euler et Maclaurin tentèrent, par différents moyens, d'avancer la solution de la question, mais sans cependant ajouter beaucoup à ce qu'avait dit Newton avant eux. Enfin, en 1774, Laplace, aidé des importantes découvertes que l'on venait de faire dans le calcul aux différentielles partielles et dans la théorie du mouvement des fluides, reprit le problème des marées et parvint à le résoudre complètement dans le cas hypothétique d'une mer libre de toute part et également profonde. Bien que la théorie de Laplace soit loin de rendre compte exactement de tous les faits observés, on peut néanmoins la considérer comme un perfectionnement important apporté à la solution de ce problème, solution qui, de nos jours encore, revêt la forme analytique que lui a donnée l'illustre auteur de la *Mécanique céleste*.

Il n'entre point dans notre but de présenter ici une analyse, même sommaire, des recherches théoriques auxquelles a donné lieu le problème des marées considéré comme la manifestation du grand principe de la gravitation universelle : une telle étude nous mènerait trop loin. Nous pouvons cependant, sans trop sortir des limites que nous nous sommes prescrites, montrer, par un calcul simple, comment l'action combinée du Soleil et de la Lune agit sur les eaux de la mer, dans le cas considéré par Laplace, et rendre ainsi compte, d'une manière élémentaire, des principales circonstances que présente le phénomène des marées.

Soient donc, en nous plaçant dans l'hypothèse émise par Laplace, T (*fig.* 38) le centre de la Terre, A un point quelconque

Fig. 38.



de sa surface liquide, L le centre de la Lune, m sa masse, r le rayon de la Terre, et posons

$$TL = \rho, \quad AL = \rho', \quad ATL = \theta, \quad ALT = \zeta.$$

L'attraction exercée sur le point A sera

$$\frac{fm}{\rho'^2}$$

et l'on aura, pour les composantes que cette force exerce parallèlement à TL et à TE,

$$\frac{fm}{\rho'^2}\cos\zeta,\quad \frac{fm}{\rho'^2}\sin\zeta.$$

Cela posé, abaissons du point A, AB perpendiculaire sur TL, il est clair qu'on aura

$$\cos\zeta = \frac{\rho - \mathrm{TB}}{\rho'} = \frac{\rho - r\cos\theta}{\rho'},$$

$$\sin\zeta = \frac{\mathrm{AB}}{\rho'} = \frac{r\sin\theta}{\rho'},$$

et, en désignant par x et y les composantes parallèles à TL et à TE de l'attraction exercée par la Lune sur le point A, on trouvera

$$x = \frac{mf(\rho - r\cos\theta)}{\rho'^3},$$

$$y = \frac{mfr\sin\theta}{\rho'^3}.$$

On a d'ailleurs, en considérant le triangle TAL,

$$\rho' = (\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos\theta)^{-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\frac{1}{\rho'^3} = \frac{1}{(\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Maintenant, si l'on pose $\frac{1}{\rho'^3} = u$, et qu'on développe cette quantité suivant les puissances croissantes de r, on aura, en se bornant au premier terme en $\frac{du}{dr}$,

$$u = u_0 + \left(\frac{du}{dr}\right)_0 r.$$

Pour $r = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{\rho^3}$; on a de plus, en différentiant l'expression précédente de $\frac{1}{\rho'^3}$,

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_0 = \frac{3\cos\theta}{\rho^4};$$

ainsi,

$$\frac{1}{\rho'^3} = \frac{1}{\rho^3} + \frac{3r\cos\theta}{\rho^4} + \ldots.$$

Cette valeur, substituée dans les expressions précédentes de x et de y, donne

$$x = \frac{fm}{\rho^2} + \frac{2fmr\cos\theta}{\rho^3},$$

$$y = \frac{fmr\sin\theta}{\rho^3}.$$

L'interprétation dynamique de ces expressions est bien facile. En effet, considérons d'abord la force $\frac{fm}{\rho^2}$ que renferme l'expression de x. Cette force, étant égale à celle qui attire le centre de la Lune, ne change rien à la position de ce centre et du point A, et est, par conséquent, sans influence sur l'effet des marées. Quant aux deux autres forces

$$\frac{2fmr\cos\theta}{\rho^3}, \quad \frac{fmr\sin\theta}{\rho^3},$$

qui agissent, la première, suivant la direction TL, et la seconde, suivant une direction perpendiculaire à cette ligne, comme ces forces tendent à déplacer les diverses molécules fluides à la surface, ce sont évidemment elles qui produisent les marées lorsqu'elles agissent sur une grande masse d'eau. Les composantes de ces deux forces suivant la direction TA et suivant une direction perpendiculaire étant, pour la première direction,

$$\frac{2fmr\cos^2\theta}{\rho^3}, \quad \frac{2fmr\sin^2\theta}{\rho^3},$$

et pour la seconde

$$\frac{fmr\sin^2\theta}{\rho^3}, \quad \frac{fmr\sin\theta\cos\theta}{\rho^3},$$

on en conclut, pour l'expression de la force totale dirigée suivant TA,

$$\frac{fmr}{\rho^3}(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

ou

$$\frac{fmr}{\rho^3}(3\cos^2\theta - 1),$$

et, pour celle perpendiculaire à cette direction,

$$\frac{3}{2}\frac{fmr\sin 2\theta}{\rho^3}.$$

Pour $\theta = 0$, c'est-à-dire au point C, la première force se réduit à $\frac{2fmr}{\rho^3}$, et pour $\theta = 90°$, c'est-à-dire au point E, elle devient $-\frac{fmr}{\rho^3}$; en D, c'est-à-dire pour $\theta = 180°$, elle redevient $\frac{2fmr}{\rho^3}$. D'où l'on conclut qu'il y a élévation des eaux en C et en D, et abaissement en E et en F. Ainsi, sous l'influence de l'attraction lunaire, les eaux de la mer tendent à prendre la forme d'un ellipsoïde de révolution, ayant son grand axe dirigé du centre de la Terre au centre de la Lune. Et si, pour plus de simplicité, on suppose la Lune située dans le plan de l'équateur, il résulte du mouvement de rotation de la Terre, combiné avec le mouvement relatif de translation de la Lune, qu'il y aura, en chaque lieu de la Terre, deux élévations et deux abaissements des eaux par jour. Le même phénomène se reproduira évidemment à l'égard des points situés sur les parallèles, mais avec une intensité qui ira en diminuant à mesure qu'on se rapprochera du pôle.

L'action du Soleil sur les eaux de la mer produit un effet semblable à celui de la Lune, mais beaucoup moins intense. Pour l'évaluer, ne considérons que la force tangentielle qui agit suivant TL; en désignant par M la masse du Soleil et par R sa distance à la Lune, on a pour l'expression de la force produite par M

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{fMr\sin 2\theta}{R^3} = F.$$

Pour celle qui provient de l'action de la Lune, nous avons trouvé

$$\frac{3}{2}\,\frac{fmr\sin 2\theta}{\rho^3} = F'.$$

On a donc

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{M}\,\frac{R^3}{\rho^3},$$

et comme, en prenant $m = 1$,

$$M = 354936,$$
$$R = 24000\,r,$$
$$\rho = 60\,r,$$

on en conclut

$$\frac{F}{F'} = 2,15 \text{ environ}.$$

Ainsi l'action du Soleil est à celle de la Terre comme 1 est à 2,15. Par un grand nombre d'observations, on a trouvé que ce rapport, dans un même lieu et pour des positions semblables du Soleil et de la Lune, était égal a 2,35333. Comme ces actions s'exercent simultanément, on conçoit que la forme que doit prendre la surface de la mer résulte de la superposition de ces deux effets. Ainsi à la nouvelle Lune, lorsque les deux astres agissent à peu près dans la même direction et dans le même sens, la marée totale est la somme des marées lunaires et solaires. Il en est de même à la pleine Lune, quoique leurs actions s'exercent en sens inverse, car elles tendent, l'une et l'autre, à élever les eaux. On voit donc que, vers les syzygies, la haute mer lunaire arrive en même temps que la haute mer solaire. Dans les quadratures, au contraire, les forces agissant dans des directions rectangulaires, la haute mer lunaire correspond à la basse mer solaire et la marée effective se trouve être la différence des marées solaires et lunaires. Entre les syzygies et les quadratures, le Soleil tend plus ou moins à accroître ou à diminuer la marée lunaire, ou bien la Lune à diminuer ou à accroître la marée solaire. L'intensité de la marée dépend aussi de la distance de la Terre à la Lune et au Soleil. Par exemple, aux équinoxes, les marées sont les plus fortes quand la Lune est périgée avec une faible déclinaison; elles sont les plus faibles aux solstices, lorsque la Lune est apogée, avec une grande déclinaison. Il est bien entendu que nous faisons abstraction ici des causes accidentelles, telles que les vents et la pression atmosphérique, causes qui viennent parfois, les premières surtout, modifier d'une manière sensible les effets dont nous parlons.

Pour que les conséquences déduites de la théorie qui précède puissent s'accorder avec les faits observés, il faudrait, comme nous l'avons supposé, que la mer recouvrît entièrement la surface de la Terre et que sa profondeur fût partout la même. La présence des continents, l'inégalité de profondeur de la mer, la configuration des côtes, l'irrégularité du fond, etc., sont autant de causes qui doivent modifier d'une manière sensible ces effets généraux, et c'est effectivement ce que l'observation confirme. Ainsi, un fait universellement constaté dans tous nos ports d'Europe, c'est que la plus haute mer n'a pas lieu le jour même des syzygies, comme le voudrait la théorie, mais bien trente-six heures après ces époques, en sorte que la haute mer, qui arrive au moment des syzygies, est réellement celle qui résulte des attractions du Soleil et de la Lune trente-six heures auparavant. Un autre fait également en désaccord avec la théorie, et qui paraît dépendre de la configuration des rivages et des circonstances de la localité, c'est le retard que la marée éprouve dans chaque port sur le passage de la Lune au méridien, retard constant pour chaque port, mais variable d'un port à un autre. L'heure à laquelle ce phénomène se produit à l'époque des équinoxes, et quand la Lune se trouve à ses moyennes distances de la Terre, est ce que l'on nomme l'*établissement du port;* c'est, comme on voit, le retard de la pleine mer sur le passage de la Lune au méridien le jour d'une syzygie équinoxiale. On le détermine dans chaque lieu par l'observation, et, une fois connu, il suffit d'y ajouter successivement $0^j,035050$ ou $50^m 28^s,32$, retard moyen journalier du passage de la Lune au méridien, pour avoir les retards successifs des marées d'un jour à l'autre. Enfin, ce qui est encore en contradiction avec les faits observés, c'est que, en un point du globe situé hors de l'équateur, deux hautes mers consécutives ne soient pas égales et puissent différer beaucoup, tandis que les faits observés concourent au contraire à prouver que cette différence est généralement fort petite relativement à chacune d'elles.

II. — Formules de Laplace.

En nous plaçant au point de vue envisagé par Laplace dans sa théorie des marées, c'est-à-dire en supposant la surface du sphéroïde terrestre régulière et recouverte entièrement par les eaux de la mer, soient :

γ la profondeur de la mer supposée très petite par rapport au demi petit axe du sphéroïde terrestre pris pour unité;
θ le complément de la latitude d'un point m de la surface de la mer dans l'état d'équilibre qu'elle prendrait sous l'action du Soleil et de la Lune (ou la colatitude du port);
ϖ la longitude du même point;
ρ la densité moyenne de la Terre;
g la pesanteur;
nt le moyen mouvement de rotation de la Terre;
$nt + \varpi$ l'heure sidérale;
r et r' les distances du Soleil et de la Lune au centre de la Terre;

v et v' les déclinaisons de ces astres;
ψ et ψ' leurs ascensions droites;
L et L′ leurs masses;
$\left.\begin{array}{l} nt+\varpi-\psi \\ nt+\varpi-\psi' \end{array}\right\}$ les angles horaires du Soleil et de la Lune;
enfin A, B, P, Q, γ, λ des constantes arbitraires déterminées dans chaque port par l'observation.

On aura pour l'expression de la hauteur $\mathfrak{h}$ de la mer au-dessus de sa surface d'équilibre à un instant quelconque (*Mécanique céleste,* t. II, p. 268, édit. des *Œuvres*).

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{h} = & -\frac{(1+3\cos 2\theta)}{8g\left(1-\frac{3}{5}\rho\right)}\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v')\right] \\
& + A\left[\frac{L\sin v\cos v}{r^3}\cos(nt+\varpi-\psi-\gamma)\right] \\
& + A\left[\frac{L'\sin v'\cos v'}{r'^3}\cos(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right] \\
& + B\,\frac{d}{dt}\left[\frac{L\sin v\cos v}{r^3}\sin(nt+\varpi-\psi-\gamma)\right] \\
& + B\,\frac{d}{dt}\left[\frac{L'\sin v'\cos v'}{r'^3}\sin(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right] \\
& + P\left[\frac{L\cos^2 v}{r^3}\cos 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)\right] \\
& + P\left[\frac{L'\cos^2 v'}{r'^3}\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right] \\
& + PQ\,\frac{d}{dt}\left[\frac{L\cos^2 v}{r^3}\sin 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)\right] \\
& + PQ\,\frac{d}{dt}\left[\frac{L'\cos^2 v'}{r'^3}\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right],
\end{aligned}
$$

expression dans laquelle les différentielles doivent être prises en regardant nt comme constant, et où le temps t doit être diminué d'une constante T′ pour les termes ayant A et B pour facteurs, et d'une constante T pour ceux multipliés par P et Q.

Vu l'extrême lenteur avec laquelle croissent les quantités r, r', v, v', ψ, ψ' par rapport au mouvement diurne nt de la Terre, on peut regarder l'expression précédente de $\mathfrak{h}$ comme la somme de trois groupes distincts de termes, répondant, chacun, à une espèce différente d'oscillation. Les *oscillations de la première espèce* sont indépendantes du mouvement diurne de la Terre et proviennent seulement du mouvement du Soleil et de la Lune dans leurs orbites. Ce sont les oscillations de cette espèce que représente le terme

$$\frac{(1+3\cos 2\theta)}{8g\left(1-\frac{3}{5}\rho\right)}\left[\frac{\mathrm{L}}{r^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{\mathrm{L}'}{r'^3}(1-3\sin^2 v')\right],$$

qui dépend seulement des déclinaisons v et v' de ces astres.

Les *oscillations de la seconde espèce* dépendent principalement du mouvement diurne nt; elles sont fournies par les termes de $\mathfrak{H}$ ayant A et B en facteurs, et leur période est d'environ un jour. Enfin les *oscillations de la troisième espèce* dépendent de $2nt$ et ont une période d'un demi-jour environ; elles sont représentées par les termes de $\mathfrak{H}$ qui ont pour facteurs les quantités P et PQ.

Pour obtenir les instants de la haute et de la basse mer ou le *maximum* et le *minimum* de l'expression de $\mathfrak{H}$, il faut, comme on sait, égaler à zéro la dérivée de $\mathfrak{H}$ prise par rapport à t. Or, si dans cette différentiation on regarde, ainsi qu'on peut le faire, v, v', r, r', ψ, ψ' comme des quantités constantes, et qu'on néglige les termes de $\mathfrak{H}$ qui ont la quantité B en facteur, termes qui donnent lieu, comme nous venons de le dire, à une oscillation très petite, ainsi que le terme qui est multiplié par Q et que Laplace a prouvé être insensible (*Mécanique céleste,* t. II, p. 269), on aura pour la condition du minimum et du maximum, ou pour l'expression de $\frac{d\mathfrak{H}}{dt}=0$,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{H}}{dt}=0=\frac{\mathrm{A}}{2\mathrm{P}}&\left[\frac{\mathrm{L}\sin v\cos v}{r^3}\sin(nt+\varpi-\psi-\gamma)\right]\\
&+\frac{\mathrm{A}}{2\mathrm{P}}\left[\frac{\mathrm{L}'\sin v'\cos v'}{r'^3}\sin(nt+\varpi-\psi'-\psi)\right]\\
&+\frac{\mathrm{L}\cos^2 v}{r^3}\sin 2(nt+\varpi-\psi-\lambda),\\
&+\frac{\mathrm{L}'\cos^2 v'}{r'^3}\sin 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda).\end{aligned}$$

Soient

$$\frac{\mathrm{L}\cos^2 v}{r^3}=\alpha,\quad \frac{\mathrm{L}'\cos^2 v'}{r'^3}=\beta,\quad nt+\varpi-\lambda=\xi,$$

et négligeons la fraction $\frac{\mathrm{A}}{2\mathrm{P}}$ qui, pour le port de Brest, n'excède pas $\frac{1}{40}$, on aura

$$\begin{aligned} \sin 2(\xi - \psi') &= -\frac{\alpha}{\beta}\sin 2(\xi - \psi) \\ &= -\frac{\alpha}{\beta}\sin 2[(\xi - \psi') - (\psi - \psi')] \\ &= -\frac{\alpha}{\beta}\sin 2[(\xi - \psi')\cos 2(\psi - \psi')] \\ &\quad + \frac{\alpha}{\beta}\cos 2[(\xi - \psi')\sin 2(\psi - \psi')], \end{aligned}$$

ou, en divisant par $\cos 2(\xi - \psi')$,

$$\operatorname{tang} 2(\xi - \psi') = \frac{\alpha \sin 2(\psi - \psi')}{\beta + \alpha \cos 2(\psi - \psi')},$$

valeur qui devient, en y substituant pour α, β et ξ leurs valeurs ci-dessus,

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) = \frac{\frac{L}{r^3}\cos^2 v \sin 2(\psi - \psi')}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' + \frac{L}{r^3}\cos^2 v \cos 2(\psi - \psi')}.$$

Désignons par r_0 et r'_0 les moyennes distances du Soleil et de la Lune à la Terre. Par un grand nombre d'observations de marées faites à Brest, on a trouvé

$$\frac{L'}{r'^3} = \frac{123}{40}\,\frac{L}{r_0^3},$$

c'est-à-dire

$$\frac{L'}{r'^3} = 3{,}06\,\frac{L}{r_0^3}\,\frac{r_0'^3}{r'^3}.$$

Ainsi donc

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) = \frac{\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \cos^2 v \sin 2(\psi - \psi')}{3{,}06\left(\frac{r'_0}{r'}\right)^3 \cos^2 v' + \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \cos^2 v \cos 2(\psi - \psi')}.$$

Maintenant, si l'on désigne par δ et δ' les demi-diamètres apparents du Soleil et de la Lune pour les distances moyennes r_0 et r'_0, et par δ_0 et δ'_0 leurs demi-diamètres actuels, on pourra remplacer dans l'expression précédente, $\frac{r_0}{r}$ et $\frac{r'_0}{r'}$ respectivement par $\frac{\delta_0}{\delta}$ et $\frac{\delta'_0}{\delta'}$; ce qui donnera, après avoir divisé numérateur et dénominateur par

$\left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^3 \cos^2 v$ et posé $\psi - \psi' = \alpha$,

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) = \frac{\sin 2\alpha}{3{,}06 \frac{\delta'^3 \cos^2 v'}{\delta^3 \cos^2 v} + \cos 2\alpha},$$

ou bien

$$(nt + \varpi - \psi' - \lambda) = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sin 2\alpha}{3{,}06 \frac{\delta'^3 \cos^2 v'}{\delta^3 \cos^2 v} + \cos 2\alpha}.$$

Cette formule fait connaître l'angle horaire $nt + \varpi - \psi'$ de la Lune au moment de la haute mer, et, par suite, le retard qu'éprouve la marée sur le passage de la Lune au méridien. Dans les applications, il ne faut pas perdre de vue que α, v, v', ainsi que δ et δ', doivent être pris pour 36^{h} ou plus exactement pour $1^{\text{j}},50724$ avant l'heure du passage de la Lune au méridien. En appelant p cette heure et H l'heure de la pleine mer qui suit ce passage, on a

$$\text{H} - p = \text{C} + \lambda,$$

avec

$$\text{C} = \frac{1}{30} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sin 2\alpha}{\text{A} + \cos 2\alpha} \quad \text{et} \quad \text{A} = 3{,}06 \frac{\delta'^3}{\delta^3} \frac{\cos^2 v'}{\cos^2 v}.$$

Les angles doivent être convertis en temps, à raison de la circonférence entière pour un jour.

La quantité λ est une constante que l'observation détermine ; elle varie d'un port à un autre et dépend des circonstances locales On la déduit aisément du retard $\text{H} - p$ de la pleine mer sur le passage de la Lune au méridien le jour d'une syzygie équinoxiale, retard que nous avons appelé l'*établissement du port*. Pour cette marée, qui aurait dû arriver $1^{\text{j}},50724$ plus tôt, on a, en effet,

$$\alpha = 18^\circ,$$

d'où

$$\text{C} = 19^{\text{m}},$$

puis

$$\text{H} - p = 19^{\text{m}} + \lambda ;$$

et comme, en désignant par E l'heure de l'établissement du port, on a

$$\text{E} = \text{H} - p = 19^{\text{m}} + \lambda,$$

on en conclut

$$\lambda = \text{E} - 19^{\text{m}}.$$

Ainsi donc

$$\mathrm{H} = p + \mathrm{C} + \mathrm{E} - 19^{\mathrm{m}}.$$

Voici maintenant comment on détermine les diverses quantités qui entrent dans cette formule :

1° *Calcul du passage p de la Lune au méridien du lieu.* — On peut, sans erreur sensible, déduire cette heure de celle p' du passage de la Lune au méridien de Paris, telle qu'on la donne dans la *Connaissance des Temps,* en la corrigeant à raison de $2^{\mathrm{m}},1$ par heure de différence en longitude. Ainsi, h désignant la longitude du lieu exprimée en heures et rapportée au méridien de Paris, on a pour l'heure p du passage au méridien du lieu pour lequel il s'agit de conclure H

$$p = p' \pm 2^{\mathrm{m}},1 \times h.$$

Le signe + se rapporte aux lieux situés à l'ouest du méridien de Paris ou pour lesquels la longitude h est occidentale, et le signe — à ceux pour lesquels cette longitude est orientale.

A Brest, le plus occidental de nos ports, on a $h = 27^{\mathrm{m}}$ ou $0^{\mathrm{h}},45$, et la correction $2^{\mathrm{m}},1 \times h$ est seulement de $0^{\mathrm{m}},945$. Ainsi, dans tous nos ports de France, cette correction est au-dessous d'une minute. On peut donc la négliger dans le calcul de l'heure des marées et prendre pour le passage de la Lune au méridien d'un port quelconque la même heure qu'à Paris.

2° *Calcul de* $\psi - \psi' = \alpha$. — Cette quantité, qui exprime la différence d'ascension droite du Soleil et de la Lune, 36 heures avant le passage de ce dernier astre au méridien du lieu que l'on considère, se déduit également du passage de la Lune au méridien de Paris. En effet, si l'on désigne par D la différence entre les heures du passage de la Lune au méridien de Paris, la veille et l'avant-veille du jour donné, et par p' l'heure du passage de la Lune au méridien du lieu l'avant-veille, on a pour déterminer α

$$\alpha = p' + 0,55\,\mathrm{D},$$

et, comme cette différence est exprimée en temps moyen, on devra, pour l'obtenir en temps vrai, en retrancher le temps moyen à midi vrai.

3° *Calcul de* C *et de* E. — Les valeurs de la correction C sont données par les Tables I et II que publie toutes les années l'*An-*

nuaire du Bureau des Longitudes. La Table I fait connaître la valeur de A multipliée par 10 pour tous les jours de l'année; après quoi, la Table II donne, en fonction de A et de α, la correction C. Quant à la valeur de E, elle est donnée dans le même Recueil par la Table III et pour les principaux ports des côtes de l'Europe. On a donc ainsi tous les éléments nécessaires au calcul de H.

Exemple. — On demande, pour le port de Brest, l'heure de la pleine mer qui arrive après le passage de la Lune au méridien le jeudi soir, 18 janvier 1877. On a

	h m
Passage de la Lune au méridien, à Brest comme à Paris, l'avant-veille, 16 janvier, p'	1.41 S.
Retard du passage de la Lune du 16 au 17, $D = 42^m$; ainsi $0,55 \times 42^m$	+0.23
Temps moyen à midi vrai, le 17	−0.11
Valeur de α, 36^h avant le passage du 18 janvier	1.53

Avec cette valeur de α et celle $A = 24$ que donne la Table I, on trouve, Table II, $C = -32^m$; par suite, on a

	h m
Heure du pass. au mér. le 18 janvier, à Brest comme à Paris.	−3. 3 S.
Valeur de C	−0.32
Valeur de E (Table III)	3.46
Correction constante	−0.19
H = heure de la pleine mer le 18 janvier, à Brest	5.58 S.

III. — Hauteur des marées. — Hauteur de la pleine mer à l'époque des syzygies.

Les plus grandes marées ont lieu à l'époque des syzygies, c'est-à-dire lorsque la Lune est pleine ou nouvelle; mais elles ne sont pas toutes également fortes, parce que les marées partielles dont elles résultent varient avec les déclinaisons du Soleil et de la Lune, et aussi avec les distances de ces astres à la Terre. Pour les déterminer, on a recours à l'expression de $\mathfrak{H}$ que nous avons rapportée au paragraphe qui précède, expression dans laquelle on peut supposer nuls les termes en B et Q, comme nous l'avons déjà dit, et où il est permis, en outre, de faire $\gamma = \lambda = 0^j,18358 = 66^\circ 5'$ (¹) dans

---

(¹) Cette constante λ représente l'intervalle dont la marée solaire suit, à Brest, le passage du Soleil au méridien; elle a été déduite d'un très grand nombre de marées syzygies faites dans ce port.

les termes multipliés par A, vu l'extrême petitesse de ce facteur. Laplace obtient ainsi (*Mécanique céleste,* t. II, p. 331) pour la hauteur de la marée à Brest

$$\begin{aligned}\mathfrak{H} = -\,0^{\mathrm{m}},02745[&i^3(1-3\sin^2 v)+3\,i'^3(1-3\sin^2 v')]\\ +\,0^{\mathrm{m}},07179[&i'^3\sin v\cos v\cos(\zeta-66^\circ 5')\\ &\qquad+3\,i^3\sin v'\cos v'\cos(\zeta+\psi-\psi'-66^\circ 5')]\\ +\,0^{\mathrm{m}},78112[&i^3\cos^2 v\cos 2(\zeta-66^\circ 5')\\ &\qquad+3\,i'^3\cos^2 v'\cos 2(\zeta+\psi-\psi'-66^\circ 5')].\end{aligned}$$

ζ représente dans cette formule l'angle horaire $nt+\varpi-\psi$ du Soleil; i est le rapport de la moyenne distance du Soleil à sa distance actuelle; i' la parallaxe horizontale actuelle de la Lune divisée par le nombre $57'\,1''$, qui en est sa valeur moyenne; enfin ψ, ψ', v, v' représentent les ascensions droites et déclinaisons du Soleil et de la Lune, ascensions droites et déclinaisons qui, ainsi que i et i', doivent être calculées pour un instant qui précède celui que l'on cherche $1^{\mathrm{j}},50724$.

Lors des grandes marées syzygies qui suivent d'un jour et demi l'instant de la pleine ou de la nouvelle Lune, les angles $\zeta-66^\circ 5'$ et $\zeta+\psi-\psi'-66^\circ 5'$ sont nuls ou égaux à 180°, et dans ce cas l'on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{H} = -\,0^{\mathrm{m}},02745[&i^3(1-3\sin^2 v+3\,i'^3(1-3\sin^2 v')]\\ +\,0^{\mathrm{m}},07179(&\pm\, i^3\sin v\cos v\pm 3\,i'^3\sin v'\cos v')\\ +\,0^{\mathrm{m}},78112(&i^3\cos^2 v+3\,i'^3\cos^2 v'),\end{aligned}$$

ou bien, en négligeant les deux premiers termes, qui sont très petits par rapport au dernier,

$$\mathfrak{H} = 0^{\mathrm{m}},78112(i^3\cos^2 v+3\,i'^3\cos^2 v').$$

Aux syzygies équinoxiales, lorsque la Lune est à sa moyenne distance de la Terre et à peu près dans le plan de l'équateur, on a, d'une manière très approchée,

$$i=1,\quad v=0,\quad v'=0\quad\text{et}\quad i'=\frac{41}{40}.$$

Donc, dans ce cas,

$$\mathfrak{H} = 0^{\mathrm{m}},77112\left(\frac{163}{40}\right).$$

En prenant cette hauteur pour unité, on a donc, pour une syzygie quelconque,

$$\mathfrak{h} = \frac{40}{163}(i^3 \cos^2 v + 3\, i'^3 \cos^2 v').$$

C'est à l'aide de cette formule que l'on calcule dans la *Connaissance des Temps* de chaque année et pour toutes les syzygies, les hauteurs des marées, telles qu'elles arrivent trente-six heures après ces époques; i, i', v et v' se rapportent au moment de la syzygie. Comme v et v' ne dépassent jamais 45°, les deux termes de la parenthèse sont toujours additifs. Le maximum de leur somme a lieu pour 1,18 et le minimum pour 0,67.

Pour présenter une application de la formule qui précède, proposons-nous de déterminer la hauteur de la marée qui a suivi la pleine Lune du 14 avril 1881, pleine Lune qui est arrivée à $11^h 59^m$ du matin.

On déduit de la *Connaissance des Temps* pour le moment de la syzygie,

v	$+\ 9^\circ 33' 29''$
v'	$-\ 15.32.30$
Parallaxe horiz....	57.65
Parallaxe moyenne.	57. 1

$\log r$	0,00159
$\log i'$	0,00693
$\log \frac{40}{163}$	9,38987

Par suite, on a

$\log \frac{40}{163}$	9,38987
$\log i^3$	0,00477
$\log \cos^2 v$	9,98786
	9,38249
	0,2412

$\log \frac{40}{163}$	9,38987
$\log 3$	0,47712
$\log i'^2$	0,02079
$\log \cos^2 v'$	9,96764
	9,85542
	0,7168

Ainsi

$$\mathfrak{h} = 0,2412 + 0,7168 = 0,9580.$$

C'est le nombre donné dans la *Connaissance des Temps,* à la page 661, et rapporté dans l'*Annuaire*.

CHAPITRE V.

PRÉDICTION DES PASSAGES DE VÉNUS ET DE MERCURE SUR LE DISQUE DU SOLEIL.

I. — Méthode de Lagrange et de Encke. — Prédiction du phénomène pour le centre de la Terre.

Les passages des planètes Vénus et Mercure sur le disque du Soleil peuvent être déterminés de la même manière que pour les éclipses, et l'on pourrait faire servir au calcul de ces phénomènes les formules que nous avons données aux paragraphes (VII et suivants) du Chapitre II. Mais il existe une méthode de Lagrange, modifiée par Encke, qui permet d'arriver plus simplement et plus rapidement au but. Elle consiste à déterminer d'abord les époques des contacts pour le centre de la Terre et à en déduire ensuite celles qui se rapportent à un lieu déterminé de sa surface. Nous allons exposer successivement la solution de ces deux problèmes.

Soient, pour un temps t voisin de l'époque de la conjonction en ascension droite,

α l'ascension droite vraie ou géocentrique de Vénus,
δ sa déclinaison vraie,
A l'ascension droite vraie du Soleil,
D sa déclinaison vraie,
Δ la distance vraie des centres des deux astres.

Considérons le triangle PVS (*fig.* 39) formé par le pôle P de l'équateur et les centres S et V du Soleil et de Vénus. On a dans ce triangle

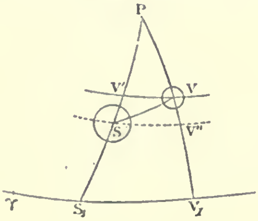
$$PS = 90^\circ - D, \quad PV = 90^\circ - \delta, \quad P = (\alpha - A), \quad \Delta = SV;$$

on a par suite, en appelant M et 180° — M′ les angles dont les sommets sont aux centres du Soleil et de Vénus,

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin\tfrac{1}{2}\Delta\sin\tfrac{1}{2}(M'+M) = \sin\tfrac{1}{1}(\alpha-A)\cos\tfrac{1}{2}(\delta+D),\\ &\sin\tfrac{1}{2}\Delta\cos\tfrac{1}{2}(M'+M) = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-A)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-D).\end{aligned}\right.$$

Comme au moment d'un contact $(\alpha - A)$, $(\delta - D)$ et Δ sont de très petites quantités et que M' diffère peu de M, on peut substituer aux sinus des arcs $(\alpha - A)$, $(\delta - D)$ et Δ ces arcs eux-mêmes, et faire en outre

Fig. 39.



$$\sin\tfrac{1}{2}(M'+M) = \sin M, \quad \cos\tfrac{1}{2}(M'+M) = \cos M.$$

Dès lors, il vient

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta\sin M = (\alpha - A)\cos\tfrac{1}{2}(\delta+D),\\ &\Delta\cos M = \delta - D.\end{aligned}\right.$$

Maintenant, si l'on représente par n la vitesse relative de Vénus par rapport au Soleil, et par N l'angle que fait la direction de cette vitesse avec le cercle horaire PVV_1 à l'époque t, il est clair que $n\cos N$ exprimera la vitesse relative de Vénus sur le cercle de déclinaison, et que $n\sin N$ sera la vitesse relative du même astre sur un cercle perpendiculaire au premier.

En appelant donc

$$\frac{d(\alpha - A)}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d(\delta - D)}{dt}$$

les variations des différences d'ascension droite et de déclinaison de Vénus et du Soleil dans l'unité de temps, on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &n\sin N = \frac{d(\alpha - A)}{dt}\cos\tfrac{1}{2}(\delta+D),\\ &n\cos N = \frac{d(\delta - D)}{dt},\end{aligned}\right.$$

et par suite

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang} \mathrm{N} &= \frac{\dfrac{d}{dt}(\alpha - \mathrm{A}) \cos \frac{1}{2}(\delta + \mathrm{D})}{\dfrac{d}{dt}(\delta - \mathrm{D})}, \\ n &= \frac{\dfrac{d}{dt}(\delta - \mathrm{D})}{\cos \mathrm{N}}. \end{aligned}\right.$$

Désignons par $t + \tau$ l'époque de l'un des contacts et par R et ρ les demi-diamètres du Soleil et de Vénus à cet instant. Menons par le point S le cercle parallèle SV″, et considérons la projection de SV d'abord sur ce cercle SV″ et ensuite sur celui PS_1 qui lui est perpendiculaire. Nous aurons, dans ces deux cas et au moment considéré,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathrm{R} \pm \rho) \sin \mathrm{S} &= \Delta \sin \mathrm{M} + n \sin \mathrm{N}\tau, \\ (\mathrm{R} \pm \rho) \cos \mathrm{S} &= \Delta \cos \mathrm{M} + n \cos \mathrm{N}\tau, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(\Delta \sin \mathrm{M} + n \sin \mathrm{N}\tau)^2 + (\Delta \cos \mathrm{M} + n \cos \mathrm{N}\tau)^2 = (\mathrm{R} \pm \rho)^2,$$

le signe supérieur ayant lieu pour un contact intérieur et le signe inférieur pour un contact extérieur.

Cette équation, étant résolue par rapport à τ, donne

$$\tau = -\frac{\Delta}{n} \cos(\mathrm{M} - \mathrm{N}) \mp \frac{\mathrm{R} \pm \rho}{n} \sqrt{1 - \frac{\Delta^2 \sin^2(\mathrm{M} - \mathrm{N})}{(\mathrm{R} \pm \rho)^2}},$$

et en posant

$$(5)\qquad \sin \psi = \frac{\Delta \sin(\mathrm{M} - \mathrm{N})}{(\mathrm{R} \pm \rho)},$$

on obtient

$$(6)\qquad \tau = -\frac{\Delta}{n} \cos(\mathrm{M} - \mathrm{N}) \mp \frac{\mathrm{R} \pm \rho}{n} \cos \psi.$$

D'après cela, on a donc, pour les époques de l'entrée,

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{T}_e &= t - \frac{\Delta}{n} \cos(\mathrm{M} - \mathrm{N}) - \frac{\mathrm{R} + \rho}{n} \cos \psi, && \text{1}^{\text{er}} \text{ cont. ext.} \\ \mathfrak{T}_i &= t - \frac{\Delta}{n} \cos(\mathrm{M} - \mathrm{N}) - \frac{\mathrm{R} - \rho}{n} \cos \psi, && \text{1}^{\text{er}} \text{ cont. int.} \end{aligned}\right.$$

et, pour celles de la sortie,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{T}'_e &= t - \frac{\Delta}{n} \cos(\mathrm{M} - \mathrm{N}) + \frac{\mathrm{R} + \rho}{n} \cos \psi, && \text{2}^{\text{e}} \text{ cont. ext.} \\ \mathfrak{T}'_i &= t - \frac{\Delta}{n} \cos(\mathrm{M} - \mathrm{N}) + \frac{\mathrm{R} - \rho}{n} \cos \psi, && \text{2}^{\text{e}} \text{ cont. int.} \end{aligned}\right.$$

Pour un contact central, $\rho = 0$; donc, dans ce cas,

$$\mathfrak{T}_c = t - \frac{\Delta}{n}\cos(M - N) - \frac{R\cos\psi}{n}. \tag{9}$$

Maintenant on déduit des équations (4), et eu égard à la relation (5),

$$\cos(S - N) = \mp\cos\psi;$$

ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} S = N - \psi + 180^\circ \text{ pour l'entrée.} \\ S = N + \psi \text{ pour la sortie.} \end{array}\right. \tag{10}$$

II. — Calculs du phénomène pour un lieu donné. Théorème de Lagrange.

Les époques de contacts ainsi obtenues pour le centre de la Terre, il nous reste à montrer comment on peut en déduire celles qui se rapportent à un lieu déterminé de sa surface. Cette solution repose sur un théorème fort remarquable, dû à Lagrange, et que nous allons démontrer.

Représentons toujours par α, δ, A, D et Δ les coordonnées équatoriales *vraies* des deux astres, et soient α', δ', D′ et Δ' les quantités analogues relatives aux lieux *apparents*. On a, par le triangle sphérique dont les trois sommets sont au pôle de l'équateur et aux positions vraies de Vénus et du Soleil,

$$\cos\Delta = \sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha - A).$$

On a semblablement

$$\cos\Delta' = \sin\delta'\sin D' + \cos\delta'\cos D'\cos(\alpha' - A').$$

Maintenant si, pour exprimer cette distance apparente Δ' en fonction des éléments vrais, on pose

$$\begin{aligned}\cos\Delta' = {} & \sin[\delta + (\delta' - \delta)]\sin[D + (D' - D)] \\ & + \cos[\delta + (\delta' - \delta)]\cos[D + (D' - D)]\cos[\alpha - A + (\alpha' - \alpha) - (A' - A)]\end{aligned}$$

et qu'on développe les différents produits que renferme cette expression, en remarquant que $\delta' - \delta$, $\alpha' - \alpha$, $D' - D$ et $A' - A$ sont de très petits arcs, on aura, en s'arrêtant aux termes du premier ordre,

$$\begin{aligned}\cos\Delta' = \cos\Delta &+ (\delta' - \delta)\,[\cos\delta \sin D - \sin\delta \cos D \cos(\alpha - A)]\\ &+ (D' - D)[\sin\delta \cos D - \cos\delta \sin D \cos(\alpha - A)]\\ &- (\alpha' - \alpha) \cos\delta \cos D \sin(\alpha - A)\\ &+ (A' - A) \cos\delta \cos D \sin(\alpha - A).\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, π et Π désignant les parallaxes horizontales de Vénus et du Soleil (Chapitre III, I$^{\text{re}}$ Partie) et μ l'heure sidérale du lieu égale, comme on sait, à l'angle horaire h de l'astre augmenté de son ascension droite,

$$\begin{aligned}\delta' - \delta &= \Pi[\cos\varphi \sin\delta \cos(\alpha - \mu) - \sin\varphi \cos\delta],\\ D' - D &= \pi[\cos\varphi \sin D \cos(A - \mu) - \sin\varphi \cos D],\\ \alpha' - \alpha &= \Pi \operatorname{séc}\delta \sin(\alpha - \mu) \cos\varphi,\\ A' - A &= \pi \operatorname{séc} D \sin(A - \mu) \cos\varphi.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\cos\Delta' = \cos\Delta &+ [\cos\delta \sin D - \sin\delta \cos D \cos(\alpha - A)]\\ &\times [\Pi \cos\varphi \sin\delta \cos(\alpha - \mu) - \Pi \sin\varphi \cos\delta]\\ &+ [\sin\delta \cos D - \cos\delta \sin D \cos(\alpha - A)]\\ &+ [\pi \cos\varphi \sin D \cos(A - \mu) - \pi \sin\varphi \cos D]\\ &- \cos D \sin(\alpha - A)\Pi \sin(\alpha - \mu) \cos\varphi\\ &+ \cos\delta \sin(\alpha - A)\pi \sin(A - \mu) \cos\varphi.\end{aligned}\right.$$

On peut donner à cette expression une forme plus simple en cherchant les coefficients des quantités $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ qui entrent dans chacun des termes de $\cos\Delta'$. Considérons d'abord le coefficient de $\cos\varphi$. Il n'est pas difficile de voir qu'on aura pour ce coefficient

$$\begin{aligned}&\Pi[\sin\delta \cos\delta \sin D \cos(\alpha - \mu) - \sin^2\delta \cos D \cos(\alpha - \mu) \cos(\alpha - A)\\ &\qquad - \cos D \sin(\alpha - \mu) \sin(\alpha - A)]\\ &+ \pi[\sin\delta \cos D \sin D \cos(\alpha - \mu) - \sin^2 D \cos\delta \cos(A - \mu) \cos(\alpha - A)\\ &\qquad + \cos\delta \sin(A - \mu) \sin(\alpha - A)],\end{aligned}$$

expression qui devient, en y remplaçant $\sin^2\delta$ et $\sin^2 D$ respectivement par $1 - \cos^2\delta$ et $1 - \cos^2 D$,

$$\begin{aligned}&+ \Pi\,\Big\{[\sin\delta \sin D + \cos\delta \cos D \cos(\alpha - A)] \cos\delta \cos(\alpha - \mu)\\ &\qquad\qquad - \cos D \cos(\alpha - \mu)\Big\}\\ &+ \pi\,\Big\{[\sin\delta \sin D + \cos\delta \cos D \cos(\alpha - A)] \cos D \cos(A - \mu)\\ &\qquad\qquad - \cos\delta \cos(\alpha - \mu)\Big\},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\Pi[\cos\Delta\cos\delta\cos(\alpha-\mu)-\cos D\cos(A-\mu)]\\
&+\pi[\cos\Delta\cos D\cos(A-\mu)-\cos\delta\cos(\alpha-\mu)]\\
&\quad=+(\Pi\cos\Delta\cos\delta\cos\alpha-\Pi\cos D\cos A)\cos\mu\\
&\quad\quad+(\pi\cos\Delta\cos D\cos A-\pi\cos\delta\cos\alpha)\cos\mu\\
&\quad\quad+(\Pi\cos\Delta\cos\delta\sin\alpha-\Pi\cos D\sin A)\sin\mu\\
&\quad\quad+(\pi\cos\Delta\cos D\sin A-\pi\cos\delta\sin\alpha)\sin\mu,
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&+[(\Pi\cos\Delta-\pi)\cos\delta\cos\alpha-(\Pi-\pi\cos\Delta)\cos D\cos A]\cos\varphi\cos\mu\\
&+[(\Pi\cos\Delta-\pi)\cos\delta\sin\alpha-(\Pi-\pi\cos\Delta)\cos D\sin A]\cos\varphi\sin\mu.
\end{aligned}$$

Relativement au coefficient de $\sin\varphi$, on trouvera d'abord

$$\begin{aligned}
&+\Pi[-\cos^2\delta\sin D+\sin\delta\cos\delta\cos D\cos(\alpha-A)\\
&+\pi[-\cos^2 D\sin\delta+\sin D\cos D\cos\delta\cos(\alpha-A),
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
&+\Pi\{-\sin D+\sin\delta[\sin\delta\sin D+\cos\delta\cos D\cos(\alpha-A)]\}\\
&+\pi\{-\sin\delta+\sin D[\sin\delta\sin D+\cos\delta\cos D\cos(\alpha-A)]\};
\end{aligned}$$

ainsi l'expression de ce coefficient est

$$(\Pi\cos\Delta-\pi)\sin\delta\sin\varphi-(\Pi-\pi\cos\Delta)\sin D\sin\varphi.$$

Au lieu de l'équation (1), nous pouvons donc écrire

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\cos\Delta'=\cos\Delta\\
&\quad+[(\Pi\cos\Delta-\pi)\cos\delta\cos\alpha-(\Pi-\pi\cos\Delta)\cos D\cos A]\cos\varphi\cos\mu\\
&\quad+[(\Pi\cos\Delta-\pi)\cos\delta\sin\alpha-(\Pi-\pi\cos\Delta)\cos D\sin A]\cos\varphi\sin\mu\\
&\quad+[(\Pi\cos\Delta-\pi)\sin\delta-(\Pi-\pi\cos\Delta)\sin D]\sin\varphi.
\end{aligned}\right.$$

Maintenant si l'on pose

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
f\sin s&=\Pi\cos\Delta-\pi,\\
f\cos s&=-\Pi\sin\Delta,
\end{aligned}\right.$$

d'où

$$\Pi-\pi\cos\Delta=f\sin(s-\Delta),$$

on aura

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
\cos\Delta'=\cos\Delta&+f[\sin s\cos\delta\cos\alpha-\sin(s-\Delta)\cos D\cos A]\cos\varphi\cos\mu\\
&+f[\sin s\cos\delta\sin\alpha-\sin(s-\Delta)\cos D\sin A]\cos\varphi\sin\mu\\
&+f[\sin s\sin\delta-\sin(s-\Delta)\sin D]\sin\varphi.
\end{aligned}\right.$$

Soient encore

$$(5)\quad \begin{cases} \sin s \cos\delta \cos\alpha - \sin(s-\Delta)\cos D \cos A = P\cos\beta\cos\lambda, \\ \sin s \cos\delta \sin\alpha - \sin(s-\Delta)\cos D \sin A = P\cos\beta\sin\lambda, \\ \sin s \sin\delta - \sin(s-\Delta)\sin D = P\sin\beta]. \end{cases}$$

L'expression précédente deviendra

$$\begin{aligned} \cos\Delta' &= \cos\Delta + fP[\cos\beta\cos\lambda\cos\varphi\cos\mu + \cos\beta\sin\lambda\cos\varphi\sin\mu + \sin\beta\sin\varphi] \\ &= \cos\Delta + fP[\cos\varphi\cos\beta\cos(\lambda-\mu) + \sin\varphi\sin\beta, \end{aligned}$$

et comme, en élevant les équations (4) et (5) au carré, puis les ajoutant ensemble, on trouve

$$\begin{aligned} P^2 &= \sin^2 s + s^2(s-\Delta) - 2s\sin s\sin(s-\Delta)\cos\Delta \\ &= \sin^2 s - \sin(s+\Delta)\sin(s-\Delta) - \sin(s-\Delta)^2 + \sin(s-\Delta)^2 \\ &= \sin^2 s - \sin^2 s + \sin^2\Delta = \sin^2\Delta, \end{aligned}$$

il viendra

$$(6)\qquad \cos\Delta' = \cos\Delta + f\sin\Delta[\cos\varphi\cos\beta\cos(\lambda-\mu) + \sin\varphi\sin\beta].$$

Cette équation renferme les deux variables arbitraires λ et β que nous allons déterminer en fonction de S et de M.

Reprenons pour cela les équations (5) sous la forme

$$(7)\quad \begin{cases} \sin s \cos\delta \cos\alpha - \sin(s-\Delta)\cos D \cos A = \sin\Delta\cos\beta\cos\lambda, \\ \sin s \cos\delta \sin\alpha - \sin(s-\Delta)\cos D \sin A = \sin\Delta\cos\beta\sin\lambda, \\ \sin s \sin\delta - \sin(s-\Delta)\sin D = \sin\Delta\sin\beta. \end{cases}$$

En multipliant la première de ces équations par $\sin A$ et la seconde par $\cos A$, puis faisant la différence, on trouve

$$\sin(\lambda - A)\sin\Delta\cos\beta = \sin s\cos\delta\sin(\alpha - A);$$

on a pareillement, en multipliant la première équation par $\cos A$ et la seconde par $\sin A$, puis faisant la somme,

$$\cos(\lambda - A)\sin\Delta\cos\beta = \sin s\cos\delta\cos(\alpha - A) - \sin(s - A)\cos D.$$

Au lieu des équations (7), on peut donc poser

$$(8)\quad \begin{cases} \sin(\lambda - A)\sin\Delta\cos\beta = \sin s\cos\delta\sin(\alpha - A), \\ \cos(\lambda - A)\sin\Delta\cos\beta = \sin s\cos\delta\cos(\alpha - A) - \sin(s - A)\cos D, \\ \sin\Delta\sin\beta = \sin s\sin\delta - \sin(s-\Delta)\sin D. \end{cases}$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned}&\sin s\cos\delta\cos(\alpha-\mathrm{A})-\sin(s-\Delta)\cos\mathrm{D}\\&\quad=\sin s[\cos\delta\cos(\alpha-\mathrm{A})-\cos\Delta\cos\mathrm{D}]+\cos s\sin\Delta\cos\mathrm{D},\end{aligned}$$

et

$$\sin s\sin\delta-\sin(s-\Delta)\sin\mathrm{D}=\sin s[\sin\delta-\cos\Delta\sin\mathrm{D}]+\cos s\sin\Delta\sin\mathrm{D};$$

on a d'ailleurs, en considérant le triangle sphérique PVS,

$$\begin{aligned}\sin\mathrm{M}\sin\Delta&=\cos\delta\sin(\alpha-\mathrm{A}),\\\cos\mathrm{M}\sin\Delta&=\sin\delta\cos\mathrm{D}-\cos\delta\sin\mathrm{D}\cos(\alpha-\mathrm{A}),\\\cos\Delta&=\sin\delta\sin\mathrm{D}+\cos\delta\cos\mathrm{D}\cos(\alpha-\mathrm{A}),\end{aligned}$$

relations d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\mathrm{A})\cos\delta&=\cos\mathrm{D}\cos\Delta-\sin\mathrm{D}\sin\Delta\cos\mathrm{M},\\\sin\delta&=\sin\mathrm{D}\cos\Delta+\cos\mathrm{D}\sin\Delta\cos\mathrm{M}.\end{aligned}$$

On a donc

$$(9)\qquad\left\{\begin{aligned}\sin(\lambda-\mathrm{A})\cos\beta&=\sin s\sin\mathrm{M},\\\cos(\lambda-\mathrm{A})\cos\beta&=\cos s\cos\mathrm{D}-\sin s\sin\mathrm{D}\cos\mathrm{M},\\\sin\beta&=\cos s\sin\mathrm{D}+\sin s\cos\mathrm{D}\cos\mathrm{M}.\end{aligned}\right.$$

Ce sont les relations cherchées; elles permettent d'obtenir λ et β lorsque A, D et S, M sont connus.

Actuellement, soit t l'époque temps moyen de Paris pour laquelle α, δ, A et D ont été calculés; appelons μ' l'heure sidérale correspondante et soit $\mathcal{L}$ la longitude orientale du lieu dont φ est la latitude et μ l'heure sidérale, on aura

$$\mu=\mu'+\mathcal{L};$$

d'où

$$\lambda-\mu=\lambda-\mu'-\mathcal{L}.$$

En posant donc

$$(10)\qquad\left\{\begin{aligned}\Lambda&=\lambda-\mu',\\\cos\zeta&=\sin\varphi\sin\beta+\cos\varphi\cos\beta\cos(\Lambda-\mathcal{L}),\end{aligned}\right.$$

on pourra mettre l'équation (6) sous la forme

$$(11)\qquad\cos\Delta'=\cos\Delta+f\sin\Delta\cos\zeta.$$

Comme les quantités s, f, λ et β ne dépendent que de l'époque adoptée t, on voit que, si Λ et β représentent la longitude et la latitude d'un point O de la Terre supposée sphérique, ce point sera fixe, et ζ, d'après la seconde des formules (10), exprimera la distance angulaire de ce point O au lieu de la surface terrestre dont $\mathcal{L}$ est la longitude et φ la latitude. On est donc conduit au théorème suivant qui est celui de Lagrange :

« A un même instant absolu, répondant pour le premier méridien choisi au temps moyen t, et pour chaque lieu de la surface au temps moyen $t + \mathcal{L}$, la distance apparente du centre des deux astres est la même pour tous les points de la surface de la Terre, pour lesquels ζ a la même valeur, c'est-à-dire pour tous les lieux qui se trouvent situés sur la circonférence d'un cercle décrit du point O comme pôle et avec ζ pour distance polaire. »

Nous allons maintenant nous proposer de déterminer l'heure à laquelle un observateur, situé en un point $(\mathcal{L}, \varphi)$ de la surface terrestre, voit les centres des deux astres à la distance vraie Δ.

Soit $d\Delta$ la différence très petite qui existe entre la distance apparente Δ' et la distance vraie Δ, en sorte que

$$\Delta' = \Delta + d\Delta;$$

on aura, à cause de la petitesse de l'arc $d\Delta$,

$$\cos(\Delta + d\Delta) = \cos\Delta - d\Delta \sin\Delta.$$

Mais, d'après ce que nous venons de voir,

$$\cos(\Delta + d\Delta) = \cos\Delta + f \sin\Delta \cos\zeta.$$

Ainsi

$$d\Delta = -f \cos\zeta.$$

Cette équation étant divisée par dt, puis résolue par rapport à cet élément, donne

$$dt = -\frac{f\cos\zeta}{\frac{d\Delta}{dt}}. \tag{12}$$

Maintenant on a, en multipliant la première des équations (1) du § I par sin M, la seconde par cos M, puis faisant la somme,

$$\Delta = (\alpha - \mathrm{A}) \cos \tfrac{1}{2}(\delta + \mathrm{D}) \sin \mathrm{M} + (\delta + \mathrm{D}) \cos \mathrm{M},$$

relation d'où l'on déduit par la différentiation par rapport à t, et en regardant $(\delta + D)$ comme constant,

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{(\alpha - A)}{dt} \cos \tfrac{1}{2}(\delta + D) \sin M + \frac{d(\delta - D)}{dt} \cos M,$$

c'est-à-dire, en vertu des équations (2) du même paragraphe,

$$\frac{d\Delta}{dt} = n \cos(M - N).$$

L'expression ci-dessus de dt peut donc se mettre sous la forme

$$dt = -\frac{f \cos\zeta}{n \cos(M - N)}. \tag{13}$$

Ainsi, en supposant qu'un observateur placé au centre de la Terre voie à l'époque t les centres des deux astres à la distance vraie Δ, cette même distance, pour un observateur placé en un point de la surface terrestre, sera vue à l'époque

$$t + \frac{f \cos\zeta}{n \cos(M - N)}, \text{ en temps moyen du premier méridien,}$$

$$t + \frac{f \cos\zeta}{n \cos(M - N)} + \mathcal{L}, \text{ en temps moyen du lieu.}$$

Pour connaître maintenant les époques où ont lieu les contacts au point de la surface terrestre dont $\mathcal{L}$ est la longitude et φ la latitude, on n'aura qu'à remplacer dans les formules précédentes Δ par $R \pm \rho$ et M par $S = \begin{cases} N - \psi + 180° \\ N + \psi \end{cases}$; et comme alors l'expression (5) du § II, se réduit à celle-ci

$$\sin\psi = \sin(M - N), \tag{14}$$

on conclura, pour les époques des divers contacts en un lieu quelconque dont φ est la latitude et $\mathcal{L}$ la longitude,

$$(15)\quad \begin{cases} \text{Pour l'entrée..}\quad T_e = \mathfrak{T} - \dfrac{f \cos\zeta}{n \cos\psi} \quad \text{ou} \quad T_e = \mathfrak{T} - \dfrac{f \cos\zeta}{n \cos\psi} + \mathcal{L}, \\ \text{Pour la sortie .}\quad T_s = \mathfrak{T}' + \dfrac{f \cos\zeta}{n \cos\psi} \quad \text{ou} \quad T_s = \mathfrak{T}' + \dfrac{f \cos\zeta'}{n \cos\psi} + \mathcal{L}; \end{cases}$$

$\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ sont les époques de l'entrée et de la sortie calculées pour le centre de la Terre.

En remplaçant dans ces formules $\cos\zeta$ et $\cos\zeta'$ par leurs valeurs déduites des équations (10) et posant

$$\frac{f}{n\cos\psi} = g, \tag{16}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_e = {} & \mathfrak{T} - g\sin\beta\,\sin\varphi \\
& - g\cos\beta\,\cos\varphi\,\cos\mathrm{A}\,\cos\mathcal{L} - g\cos\beta\,\cos\varphi\,\sin\mathrm{A}\,\sin\mathcal{L} + \mathcal{L}, \\
\mathrm{T}_s = {} & \mathfrak{T}' + g\sin\beta'\,\sin\varphi \\
& + g\cos\beta'\,\cos\varphi\,\cos\mathrm{A}'\cos\mathcal{L} + g\cos\beta'\,\cos\varphi\,\sin\mathrm{A}'\sin\mathcal{L} + \mathcal{L}.
\end{aligned}$$

Soient

$$\begin{aligned}
& g\sin\beta = \mathrm{A}, \quad g\cos\beta\,\cos\mathrm{A} = \mathrm{B}, \quad g\cos\beta\,\sin\mathrm{A} = \mathrm{C}, \\
& g\sin\beta' = \mathrm{A}', \quad g\cos\beta'\cos\mathrm{A}' = \mathrm{B}', \quad g\cos\beta'\sin\mathrm{A}' = \mathrm{C}',
\end{aligned}$$

alors on pourra écrire

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{T}_e &= \mathfrak{T} - \mathrm{A}\,\sin\varphi - \mathrm{B}\cos\varphi\,\cos\mathcal{L} - \mathrm{C}\,\cos\varphi\,\sin\mathcal{L} + \mathcal{L}, \\
\mathrm{T}_s &= \mathfrak{T}' + \mathrm{A}'\sin\varphi + \mathrm{B}'\cos\varphi\,\cos\mathcal{L} + \mathrm{C}'\cos\varphi\,\sin\mathcal{L} + \mathcal{L}.
\end{aligned}\right. \tag{17}$$

C'est sous cette forme que les valeurs de T_e et de T_s sont données dans les *Éphémérides*. A, B, C, A′, B′, C′ étant des quantités constantes pour tous les lieux sont représentées par leurs logarithmes. Ainsi transformées, ces formules permettent de calculer aisément, comme on voit, l'époque des contacts pour un lieu quelconque de la Terre, lorsque la latitude et la longitude de ce lieu sont connues.

Nous allons faire une application de la méthode que nous venons d'exposer à la prédiction pour le centre de la Terre du passage de Vénus sur le disque du Soleil en 1882. Nous prendrons pour l'époque de la conjonction celle en temps moyen de Greenwich, afin de comparer nos résultats à ceux du *Nautical Almanac* qui sont obtenus par une méthode différente.

Éléments.

Temps moy. de la ☌ en asc. dr. Décembre 6.1882....	$4^{h}20^{m}\ 2^{s},8$
Ascension droite de Vénus et du Soleil..............	$16^{h}52^{m}43^{s},16$
Déclinaison de Vénus..............................	$22^{\circ}.44'.12'',5$ S.
Déclinaison du Soleil.............................	$22.33.\ 6,1$ S
Mouvement horaire en ascension droite de Vénus.....	$1.33,2$ O.
Mouvement horaire en ascension droite du Soleil	$2.44,0$ E.

Mouvement horaire en déclinaison de Vénus	49",3 N.
Mouvement horaire en déclinaison du Soleil.........	17,5 S.
Parallaxe horizontale équatoriale de Vénus..........	33,5
Parallaxe horizontale équatoriale du Soleil..........	9,0
Demi-diamètre vrai de Vénus......................	,31,4
Demi-diamètre vrai du Soleil......................	16.13,0

De ces éléments on déduit, pour l'époque de la conjonction en ascension droite,

$R+\rho$	16'.44",4	$\frac{1}{2}(\delta+D)$..........	22°38'39",3
$R-\rho$	15.41,6	$\frac{d}{dt}(\alpha-A)$.........	4'17",2
$\alpha-A$.................	0	$\frac{d}{dt}(\delta-D)$.........	1' 6",8
$\delta-D$.................	11. 6,4		

$$\Delta\sin M = 0,\quad \text{d'où}\quad M=0,\quad \Delta=(\delta-D)=11'6''4.$$

Calcul de N..... $\Delta\sin N$ *et* $\frac{\Delta}{n}\cos N$.

$\log\frac{d}{dt}(\alpha-A)$........	2.410272
$\log\cos\frac{1}{2}(\delta+D)$	9.965160
	2.375432
$\log\frac{d}{dt}(\delta-D)$........	1.824776
log tang N.............	0.550656
N....................	74°16'58"
$\log\Delta$..................	2.823735
log sin N	9.983451
$\log\Delta\sin N$..	2.807186

$\log\frac{d}{dt}(\delta-D)$........	1.824776
log cos N..............	9.432793
$\log n$..................	2.391983
$\log\Delta$..................	2.823735
$\log\frac{\Delta}{n}$	0.431752
$\log\frac{\Delta}{n}\cos N$...........	9.864545
$\log\frac{\Delta}{n}\cos N$...........	0.73206

Calcul des valeurs de ψ qui se rapportent aux contacts du premier bord, du centre et du deuxième bord de Vénus, avec les bords intérieurs et extérieurs du disque solaire. Valeurs de $\mathfrak{T}_e$, $\mathfrak{T}_i$, $\mathfrak{T}'_e$, $\mathfrak{T}'_i$, $\mathfrak{T}'_c$, $\mathfrak{T}'_c$ correspondantes.

$\log\Delta\sin N$..	2.807186	$\log\Delta\sin N$..	2.807186	$\log\Delta\sin N$..	2.807186
$\log R+\rho$..	3.001907	$\log R$......	2.988113	$\log R-\rho$..	2.973866
$\log\sin\psi_e$...	9.805279	$\log\sin\psi_c$...	9.819073	$\log\sin\psi_i$...	9.833320
ψ_e.........	39°41'35"	ψ_c.........	41°14'43"	ψ_i.........	42°56'35"

$\log R+\rho$	3.001907	$\log R$	2.988113
$\log n$	2.391983	$\log n$	2.391983
	0.609924		0.596130
$\log\cos\psi$	9.886196	$\log\cos\psi_c$	9.876156
$\log\frac{R+\rho}{n}\cos\psi_e$	0.496120	$\log\frac{R}{n}\cos\psi_c$	0.472286
$\frac{R+\rho}{n}\cos\psi_e$	3.13416	$\frac{R}{n}\cos\psi_c$	2.96678
$\frac{\Delta}{n}\cos N$	0.73206	$\frac{\Delta}{n}\cos N$	0.73206
$3^h.51^m.58^s,4$	3.86622	$3^h.41^m.55^s,8$	3.69884
$2.24.\ 7,6$	2.40210	$2.14.\ 5,0$	2.23472

$\log R-\rho$	2.973866
$\log n$	2.391983
	0.581883
$\log\cos\psi_i$	9.864529
$\log\frac{R-\rho}{n}\cos\psi_i$	0.446412
$\frac{R-\rho}{n}\cos\psi_i$	2.79520
$\frac{\Delta}{n}\cos N$	0.73206
$3^h.31^m.38^s,1$	3.52726
$2.\ 3.47,3$	2.06314

Entrée
- du 1^er^ bord....... $4^h.20^m.2^s,8 - 2^h.24^m.\ 7^s,6 = 1^h.55^m.55^s,2$,
- du centre........ $4.20.2,8 - 2.14.\ 5,0 = 2.\ 5.57,8$,
- du 2^e^ bord....... $4.20.2,8 - 2.\ 3.47,3 = 2.16.15,5$.

Sortie
- du 1^er^ bord........ $4.20.2,8 + 3.31.38,1 = 7.51.40,9$,
- du centre........ $4.20.2,8 + 3.41.55,8 = 8.\ 1.58,6$.
- du 2^e^ bord....... $4.20.2,8 + 3.51.58,4 = 8.12.\ 1,2$,

Calcul de l'angle pôle (image directe).

Entrée contact extér. $S = 180^\circ + 74^\circ.16'.58'' - (+39^\circ.41'.35'') = 145^\circ$ } N. E.
Entrée contact intér. $S = 180 + 74.16.58 - (+42.56.35) = 149$ }

Sortie contact intér..	S =	° 74°.16′.58″ + (+ 42°.56′.35″) = 117°	N. O.
Sortie contact extér..	S =	74.16.58 + (+ 39.41.35) = 114	
Entrée contact centre.	S =	180 + 74.16.58 — (+ 41.14.43) = 147	N. E.
Sortie contact centre.	S =	74.16.58 + (41.14.43) = 116	N. O.

Ces résultats s'accordent entièrement avec ceux donnés dans le *Nautical Almanac*.

CHAPITRE VI.

PRÉDICTION DES PHÉNOMÈNES RELATIFS AUX DISPARITIONS PÉRIODIQUES DE L'ANNEAU DE SATURNE.

I. — Disparition et réapparition de l'anneau de Saturne. Détermination des éléments qui fixent sa position.

La figure sous laquelle l'anneau de Saturne nous apparaît est celle d'une ellipse lumineuse dont le petit axe varie selon le degré d'obliquité sous lequel on l'examine, et qui s'aplatit de plus en plus jusqu'à disparaître entièrement à certaines époques. Cette disparition qui se reproduit deux fois durant la révolution de Saturne, c'est-à-dire à des intervalles de quinze ans, peut avoir lieu de trois manières différentes :

1° Lorsque le plan de l'anneau passe par le centre du Soleil, car alors l'anneau n'est plus éclairé que par sa tranche dont l'épaisseur est trop petite pour nous rendre perceptible la lumière qu'elle réfléchit.

2° Lorsque le plan de l'anneau passe par l'œil de l'observateur, puisqu'il ne voit alors l'anneau que par son épaisseur.

3° Enfin lorsque le plan de l'anneau passe entre le Soleil et la Terre, car alors la surface éclairée n'est pas tournée vers nous et devient par conséquent invisible.

Soient

Ω la longitude moyenne du nœud ascendant de l'anneau sur l'écliptique à l'instant t ;
N la longitude moyenne du nœud ascendant de l'anneau sur l'équateur ;
i l'inclinaison moyenne du plan de l'anneau sur l'écliptique ;
I l'inclinaison moyenne du plan de l'anneau sur l'équateur ;
ω l'obliquité de l'écliptique ;
α l'ascension droite géocentrique de Saturne ;

δ sa déclinaison géocentrique ;
λ la longitude héliocentrique de Saturne ;
β sa latitude héliocentrique ;
a le grand axe de l'anneau à la moyenne distance de la planète ;
Δ la distance de la Terre à Saturne ;
r la moyenne distance du Soleil à Saturne ;
p l'angle de position de la partie inférieure de l'anneau ou l'inclinaison du demi-petit axe nord de l'anneau sur le cercle de déclinaison : cet angle est positif à l'*est* et négatif à l'*ouest ;*
a' la grandeur apparente du grand axe de l'anneau extérieur ;
b' la grandeur apparente du demi-petit axe de cet anneau ;
a'', b'' les mêmes angles qui se rapportent à l'anneau intérieur ;
l, l' les hauteurs de la Terre et du Soleil au-dessous du plan de l'anneau vu de Saturne. Ces angles sont positifs au *nord* et négatifs au *sud.*

Dans le triangle sphérique PST formé par le pôle S de l'anneau, celui P de l'équateur et le lieu T de la Terre vu de Saturne, on a $\mathrm{SPT} = \alpha - \mathrm{N} - 90^\circ$, $\mathrm{PT} = 90^\circ + \delta$, $\mathrm{ST} = 90^\circ - l$, $\mathrm{PTS} = p$, $\mathrm{PS} = \mathrm{I}$; on a par suite

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos l \sin p &= \sin \mathrm{I} \cos(\alpha - \mathrm{N}),\\ \cos l \cos p &= \cos \mathrm{I} \cos\delta + \sin \mathrm{I} \sin\delta \sin(\alpha - \mathrm{N}),\\ \sin l &= \sin \mathrm{I} \cos\delta \sin(\alpha - \mathrm{N}) - \cos \mathrm{I} \sin\delta, \end{aligned}\right.$$

expressions dans lesquelles I et N sont données par les relations suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin \mathrm{I} \sin \mathrm{N} &= \sin i \sin \text{☊},\\ \sin \mathrm{I} \cos \mathrm{N} &= \cos i \sin\omega + \sin i \cos\omega \cos \text{☊},\\ \cos \mathrm{I} &= \cos i \cos\omega - \sin i \sin\omega \cos \text{☊}. \end{aligned}\right.$$

On a aussi

$$(3)\qquad \sin l' = \sin i \cos\beta \sin(\lambda - \text{☊}) - \cos i \sin\beta.$$

Quant aux valeurs de i et de ☊, on a, d'après Bessel (*Astron. Nach.*, n° 274),

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \text{☊} &= 166^\circ 53' \; 8'',9 + 46''462(t - 1800),\\ i &= \;\, 28^\circ 10' 44'',7 - \;\, 0''350(t - 1800). \end{aligned}\right.$$

Les autres éléments a', b', a'', b'' qui, avec p, l et l', fixent la position de l'anneau, se déterminent à l'aide des relations suivantes :

$$(5)\qquad a' = \frac{ar}{\Delta}, \quad b' = a' \sin l, \quad \frac{a''}{a'} = 0,665, \quad \frac{b''}{b'} = 0,665,$$

relations dans lesquelles

$$(6)\qquad r = 9{,}54301,\quad a = 39'',308,\quad \log ar = 2{,}57416.$$

II. — Transformation logarithmique des formules qui précèdent.

On peut transformer les formules (1) et (2) en d'autres plus commodes pour le calcul logarithmique. En effet, si l'on pose dans les secondes

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} k\sin\varphi &= \sin i \cos \Omega,\\ k\cos\varphi &= \cos i,\end{aligned}\right.$$

d'où

$$k = \frac{\sin i \cos \Omega}{\sin\varphi},$$

et dans les premières

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} k\sin Q &= \sin I \sin(\alpha - N).\\ k\cos Q &= \cos I,\end{aligned}\right.$$

d'où

$$k = \frac{\sin I \sin(\alpha - N)}{\sin Q},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sin I \sin N &= \sin i \sin \Omega, & \cos l \sin p &= \sin I \cos(\alpha - N),\\ \sin I \cos N &= k \sin(\varphi + \omega), & \cos l \cos p &= k\cos(Q - \delta),\\ \cos I &= k\cos(\varphi + \omega), & \sin l &= k \sin(Q - \delta);\end{aligned}$$

par suite, on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\varphi &= \operatorname{tang} i \cos \Omega,\\ \operatorname{tang} I &= \frac{\operatorname{tang}(\varphi + \omega)}{\cos N},\\ \operatorname{tang} N &= \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \omega)} \operatorname{tang}\Omega.\end{aligned}\right.$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang} Q &= \operatorname{tang} I \sin(\alpha - N),\\ \operatorname{tang} l &= \operatorname{tang}(Q - \delta)\cos p,\\ \operatorname{tang} p &= -\frac{\cot(\alpha - N)}{\cos(Q - \delta)} \sin Q.\end{aligned}\right.$$

Comme vérification du calcul, on peut employer les relations suivantes :

$$(5)\qquad \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \omega)} = \frac{\sin i \cos \Omega}{\cos N \sin I},\quad \frac{\sin Q}{\cos(Q - \delta)} = \frac{\sin I \sin(\alpha - N)}{\cos l \cos p},$$

obtenues par la division des équations

$$k \sin \varphi = \sin i \cos \Omega, \qquad k \sin Q = \sin I \sin(\alpha - N),$$
$$\sin I \cos N = k \sin(\varphi + \omega), \quad \cos l \cos p = k \cos(Q - \delta).$$

La valeur de l' fournie par l'équation (1) est l'un des éléments qui fixent la position de l'anneau de Saturne. On peut la déterminer à l'aide de cette même équation (1) ou bien en faisant usage des relations suivantes, qui en sont une transformation bien simple :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} \varphi &= \frac{\sin \beta}{\cos \beta \sin(\lambda - \Omega)}, \\ \sin l' &= \frac{\sin \beta \sin(i - \varphi)}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right.$$

Lorsque l et l' sont de même signe, la Terre voit la surface éclairée de l'anneau et cet anneau est visible ; il est invisible lorsque l et l' sont de signes différents, car alors une des faces de l'anneau se trouve tournée vers la Terre et l'autre face vers le Soleil.

III. — Application numérique.

Appliquons les formules qui précèdent au calcul, pour le 9 janvier 1881, des éléments p, l, l', a', b', a'', b''.

On déduit de la *Connaissance des Temps*, pour cette date,

$$\alpha = 21^\circ 36' 13'', \quad \delta = 6^\circ 22' 43'', \quad \log \Delta = 0,96346, \quad \omega = 23^\circ 27' 16'';$$

on a, par suite,

$$\Omega = 167^\circ 55' 52'', \quad i = 28^\circ 10' 16''.$$

log tang i	9,72880 +
log cos Ω	9,99030 —
log tang φ	9,71910 —

φ	152°21′30″
$\varphi + \omega$	175°48′46″

log sin φ	9,66646 +
log tang Ω	9,33003 —
	8,99649 —
in($\varphi + \omega$).........	8,86342 +
log tang N	0,13307 —

tang($\varphi + \omega$)........	8,86458 —
log cos N	9,77292 —
log tang I...........	9,09166 +
I....................	+ 7°2′25″

N	$126^\circ 21' 22''$
$\alpha - N$	$104^\circ 45' 9''$

$\log \operatorname{tang} I$	9,09166 +
$\log \sin(\alpha - N)$	9,98545 —
$\log \operatorname{tang} Q$	9,07711 —
Q	$173^\circ 11' 23''$
$Q - \delta$	$166^\circ 48' 40''$

$\log \sin Q$	9,07349 +
$\log \cot(\alpha - N)$	9,42050 +
	8,49399 +
$\log \cos(Q - \delta)$	9,98839 —
$\log \operatorname{tang} p$	8,50560 +
p	$+ 1^\circ 50' 1''$

$\log \operatorname{tang}(Q - \delta)$	9,36985 +
$\log \cos p$	9,99978 —
$\log \operatorname{tang} l$	9,36963
l	$- 13^\circ 11'$

$\log ar$	2,57416
$\log \Delta$	0,96346
$\log a''$	1,61070
a'	$+ 40'',80$

$\log a'$	1,61070
$\log \sin l$	9,35806 —
$\log b'$	0,96876 —
b'	$- 9'',31$

$$a'' = 40'',80 \times 0,665 = + 27'',13, \quad b'' = - 9'',31 \times 0,665 = - 6'',19.$$

Pour l'époque que nous avons choisie dans notre exemple, on a

$$\lambda = + 28^\circ 25' 15'',0, \quad \beta = - 2^\circ 28' 38'',4, \quad \lambda - \text{☊} = - 139^\circ 30' 37'';$$

on a donc (équ. 6, § II)

$\log \cos \beta$	9,99959 +
$\log \sin(\lambda - \text{☊})$	9,81246 —
	9,81205 —
$\log \sin \beta$	8,63571 —
$\log \operatorname{tang} \varphi$	8,82366 +
φ	$+ 3^\circ 48' 43''$
$i - \varphi$	$24^\circ 21' 33''$

$\log \sin \beta$	8,63571 —
$\log \sin(i - \varphi)$	9,61537 +
	8,25108 —
$\log \sin \varphi$	8,82270 +
$\log \sin l'$	9,42838 —
l'	$- 15^\circ 33',3$

QUATRIÈME PARTIE.

RÉSUMÉ

DES

FORMULES CONTENUES DANS LES PARTIES II ET III.

I. — Composition du calendrier. — Explication des principaux articles de l'Annuaire.

1° *Calendrier romain. — Réformes juliennes et grégoriennes.* — L'année composée par Romulus aux premiers temps de la République romaine était vague, et comprenait 304 jours divisés en 10 mois. En voici les noms :

Martius, 31 jours; Aprilis, 30 jours; Maïus, 31 jours; Junius, 30 jours;
Quintilis, 31 jours; Sextilis, 30 jours; September, 30 jours;
October, 31 jours; November, 30 jours; December, 30 jours.

Les intercalations fréquentes que nécessitait cette distribution du temps, pour s'accorder avec le cours des saisons, déterminèrent Numa à la réforme qui porte son nom. Ce prince, prenant pour modèle l'année dont se servaient les principaux peuples de la Grèce, ajouta à l'année romaine deux nouveaux mois : janvier, de 29 jours, et février, de 28 jours, qu'il plaça le premier au commencement de l'année de Romulus et le second à la fin de la même année, c'est-à-dire après décembre; puis, pour que l'année ainsi composée pût s'accorder avec l'année lunaire, il eut soin d'ôter un jour de chacun des six mois pairs de Romulus, ce qui rendit tous les mois de son calendrier impairs, à l'exception du mois de février, auquel il conserva une quotité paire de jours. L'ordre dans lequel se succédèrent les mois de Numa et leurs durées fut alors le suivant :

Januarius, 29 jours; Martius, 31 jours; Aprilis, 29 jours;
Maïus, 31 jours; Junius, 29 jours; Quintilis, 31 jours;
Sextilis, 29 jours; September, 29 jours; October, 31 jours;
November, 29 jours; December, 29 jours; Februarius, 28 jours.

Par cette distribution, l'année romaine s'accordait assez bien avec l'année lunaire, mais il était loin d'en être de même à l'égard de l'année solaire. Pour remédier à cet inconvénient, Numa décida que l'on ajouterait, de deux en deux années, un mois intercalaire de 22 et de 23 jours, alternativement, ce qui rendait la première année de son calendrier de 365 jours, la deuxième de 377 jours, la troisième de 365 jours, la quatrième de 378 jours; et ainsi de suite pour les autres périodes de 4 années. Comme les 1465 jours de ces quatre années donnent une moyenne de $366^j,25$, cette première institution de Numa eut pour effet, comme l'on voit, de rendre l'année moyenne romaine plus longue d'un jour que l'année solaire. Ce prince entrevit bien le vice de son calendrier et chercha à y remédier; mais les indications qu'il laissa à ce sujet furent si mal comprises ou si mal suivies par les pontifes chargés de veiller à la constitution du calendrier que, aux derniers temps de la République romaine, il en était résulté une confusion telle que l'équinoxe civil s'écartait de l'équinoxe astronomique de près de 3 mois, et que l'ordre des saisons était entièrement interverti. Jules César, qui venait d'être investi de la dignité pontificale et à qui revenait, par conséquent, la mission de veiller à la constitution du calendrier, résolut de mettre fin à ce désordre et de le prévenir pour toujours, en donnant à l'année une constitution plus régulière et plus en harmonie avec l'année astronomique. Dans cette vue, il fit venir Sosigène d'Alexandrie, et le chargea de la partie astronomique du travail, c'est-à-dire de la détermination exacte de l'année solaire. Cet astronome ayant adopté pour durée de l'année tropique un nombre de $365^j,25$, il fut décidé que, sur quatre années consécutives, trois seraient de 365 jours et la quatrième de 366 jours, pour tenir compte des 24 heures dont 4 années ordinaires diffèrent de 4 années astronomiques. Ce jour *épagomène* se plaçait 6 jours avant les calendes de mars, c'est-à-dire le 23 et le 24 février et s'appelait *bissexto-calendas;* d'où le nom de *bissextile* donné à l'année qui le porte.

Comme l'année ainsi composée avait 10 jours de plus que celle de l'ancien calendrier romain, reformé par Numa, on convint de répartir ces 10 jours entre tous les mois qui n'avaient eu jusqu'alors que 29 jours, sans toucher à ceux de mars, mai, quintilis et octobre, qui avaient été établis de 31 jours par Romulus : janvier, sextilis et décembre furent faits de 31 jours, et avril, juin, septembre et novembre de 30 jours. Quant au mois de février, il fut conservé tel que l'avait laissé Numa, c'est-à-dire de 28 jours.

La durée de l'année moyenne, supposée par Sosigène de $365^j,25$, était un peu trop longue, puisque l'année tropique n'est réellement que de $365^j,2422$. Il en résultait un avancement des équinoxes de $0^j,0078$ par an, ou de $0^j,78$ par siècle. Cette anticipation des équinoxes, qui, au commencement de l'ère julienne, n'avait qu'un effet insensible sur la marche des saisons, finit, en s'accumulant, par devenir considérable et par nécessiter une nouvelle réforme du calendrier, qui fut entreprise, au XVIᵉ siècle, par le pape Grégoire XIII avec le concours des astronomes de son temps. A cette époque, en effet (1582), l'anticipation était de 10 jours, si bien que l'équinoxe du printemps qui, au temps du concile de Nicée, c'est-à-dire en l'an 325 après J.-C., tombait le 21 mars, n'arrivait plus, à l'époque dont nous parlons, que le 11 de ce mois. Pour remettre les choses en l'état où elles se trouvaient au temps du concile, il fut décidé que l'on retrancherait les 10 jours d'anticipation de l'année 1582, et que le lendemain du 4 octobre de cette même année serait appelé non le 5 mai, mais le 15 octobre 1582; et pour qu'à l'avenir l'excès de $0^j,0078$ ne s'accumulât plus, on convint de supprimer le jour intercalaire dans les 3 années séculaires 1700, 1800, 1900 et de ne le conserver que pour l'année 2000 qui serait bissextile, ainsi que 2400, 2800, etc., de sorte que, sur 4 années séculaires, 3 fussent communes et la quatrième toujours bissextile.

2° *Des calendriers en usage chez les différents peuples.* — Voici un Tableau des subdivisions de l'année chez divers peuples :

ROMAIN.		ÉGYPTIEN		PERSAN.		ARABE.		JUIF.		GREC.	
	jours		jours.		jours		jours.		jours		jours
Januarius	31	Chôth	30	Farvardin	30	Mouharram	30	Nisan	30	Hecatombæon	29
Februarius	28-29	Paôphi	30	Ardibehescht	30	Sufar	29	Iyar	29	Metagitnion	30
Martius	31	Athyr	30	Khordâtl	30	Reby 1er	30	Sivan	30	Boedromion	29
Aprilis	30	Khoïac	30	Tir	30	Reby 2e	29	Thamouz	29	Memacterion	30
Maïus	31	Tybi	30	Amerdad	30	Djoumadi 1er	30	Ab	30	Pyanepsion	29
Junius	30	Mechir	30	Schahriver	30	Djoumadi 2e	29	Eloul	29	Posideon	30
Julius	31	Phamenôth	30	Mihir	30	Redjeb	30	Tisri	30	Gamelion	29
Augustus	31	Pharmouthi	30	Abân	30	Schaaban	29	Marchesvan	29	Anthesterion	30
September	30	Pakhôn	30	Ader	30	Rhamadân	30	Kislev	30	Elaphebolion	29
October	31	Pagni	30	Deh	30	Schewal	29	Tébeth	29	Munychion	30
November	30	Epiphi	30	Bahman	30	Dsou'lkaadah	30	Shebat	30	Thargelion	29
December	31	Mesori	30	Isfendarmad	30	Dsou'lhédjach	29-30	Adar	29	Skirophorion	30
Année bissextile tous les quatre ans.		5 jours épagomènes. Cette année est solaire vague.		5 jours épagomènes. Cette année est solaire tropique.		Année lunaire vague.		Année lunaire. Mois intercalaires embolismiques.		Année solaire fixe commençant au solstice d'été.	

3° *Comput ecclésiastique.* — En désignant par M le millésime d'une année, on a

I.	Indiction romaine...	Reste de $\frac{M+3}{15}$
II.	Nombre d'or N	Reste de $\frac{M+1}{19}$
III.	Épacte.............	Reste de $\frac{11(N-1)}{30}$
IV.	Cycle solaire.......	Reste de $\frac{M+9}{28}$
V.	Lettre dominicale...	(Table I)

4° *Fête de Pâques.* — D'après les décisions de l'Église, *la fête de Pâques doit arriver le premier dimanche après la pleine lune qui suit le* 20 *mars.* Cette fête ne peut donc jamais arriver plus tôt que le 22 mars, et jamais plus tard que le 25 avril. On la détermine à l'aide de la Table II, lorsqu'on connaît l'épacte et la lettre dominicale.

5° *Dates des fêtes mobiles. — Conventions qui règlent les fêtes immobiles.* — Parmi les fêtes inscrites au calendrier, les unes sont *immobiles,* c'est-à-dire arrivent toujours aux mêmes dates ; les autres sont *mobiles* et dépendent de la fête de Pâques. Voici les conventions qui règlent ces dernières :

Ascension....................	Jeudi 40e jour après Pâques
Pentecôte....................	Dimanche 50e jour après Pâques
Trinité	8e dimanche après Pâques
Fête-Dieu....................	Jeudi après la Trinité
Quasimodo....................	1er dimanche après Pâques
Septuagésime.................	9e dimanche avant Pâques
Quinquagésime................	Dimanche 49e jour avant Pâques
Jour des Cendres	Mercredi après la Quinquagésime
Passion	2e dimanche avant Pâques
Rameaux......................	1er dimanche avant Pâques
Quatre-Temps................	Les mercredis qui suivent : 1° les Cendres ; 2° la Pentecôte ; 3° le 14 septembre ; 4° le 13 décembre
Dimanches de l'*Avent*.........	Les 4 dimanches avant Noël

Quant aux fêtes immobiles, elles arrivent toujours aux dates suivantes :

La Circoncision...............	Le 1er janvier

L'Épiphanie ou les Rois	Le 6 janvier
La Purification ou la Chandeleur.	Le 2 février
L'Annonciation.................	Le 25 mars
La Saint-Jean d'été...........	Le 24 juin
La Saint-Pierre et la Saint-Paul.	Le 29 juin
L'Assomption..................	Le 15 août
La Saint-Louis................	Le 25 août
La Nativité de la Vierge........	Le 8 septembre
La Toussaint..................	Le 1er novembre
La Conception................	Le 8 décembre
La Noël......................	Le 25 décembre

Lorsque le dimanche de Pâques arrive le 2 avril, l'Annonciation est remise au lundi, 8 jours après Pâques.

II. — Éphémérides du Soleil.

Notations.

$\odot$, longitude vraie du Soleil.
☾, longitude de la Lune.
☊, longitude du nœud ascendant de la Lune.
ω, obliquité de l'écliptique $= 23^\circ 27' 31'',83$ en 1850.
t, nombre d'années écoulées à partir de 1850.
Ψ, précession totale.

1° *Obliquité apparente.* — Elle est égale à l'obliquité moyenne corrigée de la nutation luni-solaire. Ainsi l'on a, en 1850,

$$\begin{aligned}\text{Obliquité apparente} = 23^\circ 27' 31'',83 &- 0'',47594\,t \\ &+ 9'',2236 \cos ☊ - 0'',0897 \cos 2☊ \\ &+ 0'',0886 \cos 2☾ + 0'',5509 \cos 2\odot.\end{aligned}$$

On néglige, le plus souvent, le terme en 2☾, à cause de sa petitesse et de la brièveté de sa période. Les Tables XLVII et XLVIII de la *Théorie du Soleil* abrègent les calculs des différents termes de cette formule, en les donnant tout faits.

2° *Points équinoxiaux.* — *Précession en longitude.* — On a

$$\text{Précession totale annuelle : } \frac{d\Psi}{dt} = 50'',21129\,t + 0,0002442966\,t,$$

t désignant le nombre d'années écoulées depuis 1750. On en conclut

1° La précession pour 1 jour solaire,
2° La précession pour 10 jours solaires;

et l'addition réitérée de cette dernière quantité fournit les nombres de la première colonne.

2° *Nutation en longitude.* — On a pour l'époque actuelle

$$\Delta\mathcal{L} = -17'',2526 \sin☊ + 0'',2073 \sin 2☊ - 1'',2692 \sin 2\odot;$$

on supprime dans ce calcul le terme en $2☾$, à cause de sa petitesse et de la brièveté de sa période.

3° *Nutation en* Æ. — On a

$$\Delta Æ = \Delta\mathcal{L} \cos\omega,$$

ω étant l'obliquité qui convient à l'année pour laquelle on calcule.

4° *Commencement des saisons.* — Le commencement de chaque saison a lieu au moment où le Soleil passe au point équinoxial ou solsticial qui porte son nom, et, par conséquent, lorsque sa longitude devient égale à 0°, 90°, 180° ou 270°.

$$\text{Commencement du printemps } \mathcal{T} = \frac{360^\circ - \mathcal{L}_\odot}{\mathcal{L}'_\odot - \mathcal{L}_\odot} \times 24^{\text{h}}.$$

$\mathcal{L}_\odot$ et $\mathcal{L}'_\odot$ désignent respectivement les longitudes du Soleil immédiatement plus petites et plus grandes que 360°.

La même formule donnerait l'époque du commencement de l'été, de l'automne ou de l'hiver, en y remplaçant 360° par 90°, 180° ou 270°.

5° *Fraction de l'année.* — n désignant le nombre de jours écoulés depuis le premier de l'an jusqu'à la date proposée, on a, pour la fraction de l'année correspondante à cette date,

$$\frac{n-1}{365,24222}.$$

Tous ces nombres ayant pour différence constante 0,0027379, c'est l'addition réitérée de cette quantité qui fournit les nombres de la colonne 5°.

6° *Lever et coucher apparent du centre du Soleil.* — φ étant la latitude du lieu (à Paris $\varphi = 48^\circ 50' 11''$), on a pour l'arc semi-diurne P

$$\sin \frac{1}{2} P = \frac{\sqrt{\sin(\mu - \mathcal{D}) \sin(\mu - \varphi)}}{\cos\varphi \cos\mathcal{D}},$$

$$ZA + \mathcal{D} + \varphi = 2\mu, \quad ZA = 90^\circ + (33'45'' - 8'',86).$$

Dans ces formules, la déclinaison Ⓓ du Soleil doit être prise pour l'heure même du phénomène, heure qui est précisément ce que l'on cherche, en sorte que Ⓓ est inconnu. Mais on peut prendre pour Ⓓ la valeur approchée résultant d'une valeur supposée de l'heure, et rectifier ensuite successivement le calcul à l'aide de l'heure trouvée, jusqu'à ce qu'on parvienne à un résultat qui ne diffère pas notablement de celui que l'on a supposé.

Pour les astres autres que le Soleil et la Lune, la première approximation suffit presque toujours.

L'heure du coucher se détermine par un calcul semblable; il faut avoir soin seulement de prendre le complément de P à 12^h.

7° *Lieux du Soleil.* — (*a*) *Longitude du Soleil.* — On a

Longitude apparente ⊙ = longitude moyenne
+ équation du centre
+ aberration
+ nutation luni-solaire
+ perturbations planétaires périodiques
+ perturbation lunaire.

On obtient les différents termes de cette formule à l'aide des *Tables du Soleil* de Le Verrier.

(*b*) *Latitude du Soleil.* — Par l'effet des perturbations planétaires et lunaires, le Soleil ne se meut pas exactement dans le plan de l'écliptique; il s'écarte de part et d'autre de ce plan d'un petit arc qui constitue sa latitude et que les Tables font connaître. Voici l'expression de cette latitude :

Latitude ⊙ = perturbations de Vénus
+ perturbations de Jupiter
+ perturbations de Saturne
+ perturbations de la Lune;

les différents termes de cette expression sont donnés par les Tables XLII, XLIII, XLIV de la *Théorie du Soleil*.

(*c*) *Rayon vecteur de la Terre.* — La formule qui exprime la partie elliptique de cette distance est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{R} = a\Big[1 + \frac{1}{2}e^2 - \Big(e - \frac{3}{8}e^3 + \ldots\Big)\cos\zeta \\ - \Big(\frac{1}{2}e^2 - e^4 + \ldots\Big)\cos 2\zeta\Big] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

a est le demi-grand axe de l'orbite terrestre;
e son excentricité;
ζ l'anomalie moyenne $nt + \varepsilon - \omega$.

La Table XXXII construite sur cette formule fait connaître cette partie de R, ainsi que sa variation séculaire pour toutes les valeurs de ζ.

Lorsqu'on veut obtenir cette distance avec toute la précision que la théorie comporte, il faut avoir égard aux perturbations des planètes et de la Lune, c'est-à-dire il faut ajouter à R le terme suivant, que les Tables permettent également de calculer:

+ Perturbation de Mercure
+ perturbation de Mars
+ perturbation de Vénus
+ perturbation de Jupiter
+ perturbation de Saturne
+ perturbation lunaire.

8° *Ascension droite et déclinaison du Soleil.* — On a

$$\tang \mathcal{A} = \cos\omega \tang \odot, \quad \sin \mathcal{D} = \sin\omega \sin\odot;$$

puis

Corr. pour la latitude...... $\delta\mathcal{A} = -\dfrac{\sin\omega\cos\mathcal{A}}{\cos\mathcal{D}}\lambda_{\odot}$, $\delta\mathcal{D} = \dfrac{\cos\omega}{\cos\mathcal{D}}\lambda_{\odot}$.

La Table L donne les corrections $\delta\mathcal{A}$ et $\delta\mathcal{D}$ avec $\odot$ pour argument et dans l'hypothèse de $\lambda_{\odot} = 1''$.

9° *Temps sidéral à midi moyen à Paris.* — On a, pour l'époque $1850 + t$,

Asc. droite $\odot$ moyen $= \mathrm{L} = 280°46'43'',51 + 1296027'',6784\,t$ (en temps).

Dans le calcul des *Éphémérides*, on détermine l'ascension droite moyenne du Soleil qui correspond au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année que l'on considère, et l'on forme ensuite les autres nombres, en ajoutant successivement à cette ascension droite la quantité $3^{\mathrm{m}}56^{\mathrm{s}},5553$.

10° *Temps moyen à midi vrai à Paris.* — Soient

$\mathcal{A}_v$ l'ascension droite du Soleil vrai,
$\mathcal{A}_m$ l'ascension droite du Soleil moyen;

on a

$$\text{Équation du temps} = \mathcal{A}_v - \mathcal{A}_m.$$

Comme $\mathcal{A}_v$ et $\mathcal{A}_m$ ne sont donnés, dans la *Connaissance des Temps,* que pour midi moyen, $\mathcal{A}_v - \mathcal{A}_m$ est l'équation du temps à *midi moyen.* On l'obtient à *midi vrai* en déterminant d'abord la variation qu'éprouvent $\mathcal{A}_v$ et $\mathcal{A}_m$ dans l'intervalle de temps représenté par $\mathcal{A}_v - \mathcal{A}_m$, puis faisant la différence.

11° *Parallaxe horizontale du Soleil.* — Δ étant la distance du Soleil au centre de la Terre, on a

	Parallaxe horizontale.
A la distance moyenne...........	$\pi = 8'',86$
A la distance Δ....................	$\pi = \dfrac{8'',86}{\Delta}$

Ces nombres sont donnés dans les *Éphémérides* de cinq jours en cinq jours.

12° *Demi-diamètre du Soleil.* — On a

A la distance moyenne.........	$D = 16'\,1''82$
A la distance Δ................	$D = \dfrac{16'\,1''82}{\Delta}$

13° *Durée du passage du demi-diamètre par le méridien.* — On a

$$t = \frac{D}{15\cos D},$$

durée qu'il faut convertir en *temps sidéral.*

14° *Aberration.* — L'aberration en longitude, la seule qu'il soit nécessaire de considérer, a pour expression

$$-20''445 - 0'',341\cos(\odot - \Pi).$$

Le nombre $-20'',445$ qui y figure est ce qu'on est convenu d'appeler la constante de l'aberration; $-0'',341\cos(\odot - \Pi)$ dépend de l'excentricité et peut être obtenu à l'aide de la Table XII (Tables solaires) en prenant l'angle $\odot - \Pi = \zeta$ pour argument.

15° *Coordonnées du Soleil.* — Soient

R le rayon vecteur de la Terre;
$\odot$ la longitude vraie du Soleil comptée de l'équinoxe vrai;
λ la latitude du Soleil;
ω l'obliquité apparente de l'écliptique.

Les coordonnées rectilignes X, Y, Z du Soleil rapportées à l'équateur sont données par les formules

$$X = R\cos\odot,\quad Y = R\sin\odot\cos\omega - \lambda\sin\omega\sin 1'',$$
$$Z = R\sin\odot\sin\omega + \lambda\cos\omega\sin 1''.$$

A côté des valeurs de X, Y, Z, on trouve dans les *Éphémérides* celles de ΔX, ΔY, ΔZ déterminées par les relations suivantes :

$$\Delta X = + R\Delta\odot\sin 1''\sin\odot,$$
$$\Delta Y = - R\Delta\odot\sin 1''\cos\omega\cos\odot - R\Delta\omega\sin 1\sin\omega\sin\odot,$$
$$\Delta Z = - R\Delta\odot\sin 1''\sin\omega\cos\odot + R\Delta\omega\sin 1\cos\omega\sin\odot.$$

Δ est la somme de la précession et de la nutation en longitude et $\Delta\omega$ la somme de la nutation et de la diminution de l'obliquité de l'écliptique. Avec ces valeurs de ΔX, ΔY et ΔZ, on a

$$X' = X + \Delta X,\quad Y' = Y + \Delta Y,\quad Z' = Z + \Delta Z;$$

l'axe des X' est toujours dirigé vers l'équinoxe moyen du 1^er^ janvier.

NOTE ADDITIONNELLE.

1° *Des différentes espèces de temps.* — La révolution de la sphère céleste étant parfaitement uniforme, on s'en est servi pour mesurer le temps. On distingue trois espèces de temps : le *temps sidéral,* le *temps vrai* et le *temps moyen.* Le temps qui s'écoule depuis l'instant où une étoile passe au méridien supérieur jusqu'à celui où elle y revient, durée qui est la même pour toutes les étoiles, est ce qu'on nomme le *jour sidéral.* Cette durée est divisée en 24^h que l'on compte de 0 à 24, à partir de l'instant où le point vernal passe au méridien. C'est l'heure marquée par les pendules des Observatoires. Le *jour solaire vrai* est l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du centre du Soleil au même méridien. On le divise en 24^h solaires vraies que l'on compte de 0 à 24, d'un midi vrai au midi suivant. Cette durée constitue ce qu'on appelle le *jour astronomique.* Enfin on appelle *jour moyen* l'intervalle de temps compris entre deux passages consécutifs au même méridien du Soleil fictif qu'on imagine parcourir annuellement l'équateur avec une vitesse uniforme. Le jour moyen est divisé en 24^h moyennes, que l'on compte de 0 à 24, d'un midi au suivant, le midi moyen étant l'instant où le centre du Soleil moyen traverse le méridien supérieur. Cet astre est d'accord avec le Soleil vrai à quatre époques différentes, savoir : vers le 15 avril, le 14 juin, le 1^{er} septembre et le 24 décembre. De la première époque à la deuxième, le Soleil vrai précède le Soleil moyen ; de la deuxième à la troisième, il en est précédé ; de la troisième à la quatrième, le Soleil vrai reprend son avance sur le Soleil moyen, et ainsi de suite. La différence entre le temps vrai et le temps moyen, pour chaque jour, est ce qu'on nomme l'*équation du temps*. Cette équation change donc quatre fois de signe par an.

2° *Calcul de l'heure vraie au moyen de l'heure moyenne et réciproquement.* — Soient

h_v l'heure vraie ;
h_m l'heure moyenne ;
ε l'équation du temps.

On a

$$\varepsilon = h_m - h_v, \quad \text{d'où} \quad h_m = h_v + \varepsilon, \quad h_v = h_m - \varepsilon.$$

3° *Calcul de l'heure sidérale au moyen de l'heure moyenne et réciproquement.* — En appelant h_s l'heure sidérale, on a

$$h_s = h_m - \text{Æ}_{\odot} \text{ moyen} + \text{correct. (Table VI de la } C.\ des\ T.\text{)},$$
$$h_m = h_s - \text{Æ}_{\odot} \text{ moyen} + \text{correct. (Table V de la } C.\ des\ T.\text{)}.$$

III. — Éphémérides des Planètes.

1° *Lieux héliocentriques.* — La longitude héliocentrique rapportée à l'*équinoxe vrai* a pour expression

longitude héliocentrique vraie = longitude moyenne
+ équation du centre
+ perturbations
+ réduction à l'écliptique
+ nutation luni-solaire.

On tire les différents termes dont se compose cette expression des Tables de Le Verrier. Les autres éléments héliocentriques, c'est-à-dire la latitude et le rayon vecteur, sont également fournis par les Tables.

2° *Lieux géocentriques.* — Soient

v la longitude héliocentrique de la planète;
s sa latitude héliocentrique;
r le rayon vecteur de la planète;
L la longitude géocentrique de la planète;
λ la latitude géocentrique;
Δ la distance de la Terre à la planète;
R le rayon vecteur de la Terre;

et posons

$$\begin{aligned} r\cos s\sin v + \mathrm{R}\sin\odot &= \Sigma(\mathrm{I}),\\ r\cos s\cos v + \mathrm{R}\cos\odot &= \Sigma(\mathrm{II}),\\ r\sin s + \mathrm{R}\sin\lambda_\odot &= \Sigma(\mathrm{III}); \end{aligned}$$

on aura

$$\operatorname{tang}\mathrm{L} = \frac{\Sigma(\mathrm{I})}{\Sigma(\mathrm{II})},\quad \operatorname{tang}\lambda = \frac{\Sigma(\mathrm{III})}{\Sigma(\mathrm{II})}\cos\mathrm{L},\quad \Delta\cos\lambda = \frac{\Sigma(\mathrm{II})}{\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}\mathrm{L}}.$$

Vérification :

$$\Delta\cos\lambda\sin(\mathrm{L}-v) = \mathrm{R}\sin(\odot - v).$$

3° *Ascension droite et déclinaison.* — En posant

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin\mathrm{L}}{\operatorname{tang}\lambda},\quad \mathrm{F} = \omega - \varphi,$$

on a

$$\operatorname{tang}\mathcal{R} = \frac{\sin\mathrm{F}}{\sin\varphi}\operatorname{tang}\mathrm{L},\quad \operatorname{tang}\mathcal{D} = \frac{\sin\mathcal{R}}{\operatorname{tang}\mathrm{F}}.$$

ω est l'obliquité apparente qui convient à la date pour laquelle on calcule. $\mathcal{R}$ et $\mathcal{D}$ doivent ensuite être corrigés de l'effet de l'aberration pour devenir les coordonnées *apparentes* telles que les donne la *Connaissance des Temps.* Or, on a

$$\mathrm{A}_b = -0'',0057613\,\mathrm{M}\,\Delta,$$

expression dans laquelle M désigne le mouvement de la planète en 24 heures et Δ sa distance à la Terre. Les valeurs A_b se déterminent toujours pour les dates auxquelles l'ascension droite et la déclinaison ont été calculées.

4° *Parallaxe horizontale. — Demi-diamètre. — Durée du dassage du demi-diamètre par le méridien.* — Ces éléments, donnés dans les *Éphémérides* pour chacune des planètes principales et pour tous les jours de l'année, se déterminent à l'aide des relations suivantes :

$$\Pi = \frac{8'',86}{\Delta}, \quad D = \frac{D_m}{\Delta}, \quad t = \frac{\textcircled{D}}{15 \cos \textcircled{D}},$$

relations dans lesquelles

Δ désigne la distance de la planète à la Terre;
D_m son demi-diamètre à la distance moyenne de la Terre au Soleil;
$\textcircled{D}$ sa déclinaison.

On peut remarquer que, la parallaxe Π étant déterminée, D s'en déduit immédiatement en multipliant Π par le rapport $\frac{D_m}{8'',86}$; ainsi

$$\log D = \log \Pi + \log \frac{D_m}{8'',86}.$$

Voici les valeurs de D_m adoptées par les rédacteurs de la *Connaissance des Temps* et du *Nautical Almanac*, et celles de $\frac{D_m}{8'',86}$ qui leur correspondent.

Valeurs de D_m.

Mercure........	3'',34	(Tables de Le Verrier)
Vénus..........	8,305	(Tables de Le Verrier)
Mars...........	5,55	(Tables de Le Verrier)
Jupiter.........	99,703	(*Memoirs of the Astr. Society*, t. III)
Saturne........	81,105	(*Astronomische Nach.*, n° 189)
Uranus	37,40	(*Annuaire de Schumacher*, 1837)

Valeurs de $\frac{D_m}{8'',86}$.

	Nombre constant.	Logarithme.
Mercure............	0,379	$\bar{1}$,57864
Vénus..............	0,937	$\bar{1}$,97174
Mars...............	0,626	$\bar{1}$,79657
Jupiter............	11,253	1,05127
Saturne............	9,154	0,96161
Uranus.............	4,221	0,62542

Dans la construction des *Éphémérides,* H, D et t se calculent en même temps.

5° *Passage du centre de la planète au méridien de Paris.* — Soient

$\mathcal{A}_p$ l'ascension droite de la planète à midi moyen à Paris;
$\mathcal{A}_\odot$ l'ascension droite du Soleil au même instant;
μ le mouvement diurne de la planète;
μ' le mouvement diurne du Soleil ($\mu' = 3^{\mathrm{m}}56^{\mathrm{s}},56$);

on a

$$t = \frac{24^{\mathrm{h}}(\mathcal{A}_p - \mathcal{A}_\odot)}{24 + \mu' - \mu}.$$

μ est négatif lorsque la planète est rétrograde; il est nul lorsqu'elle est stationnaire. Dans ce dernier cas, qui est celui des étoiles, $t = \mathcal{A}_p - \mathcal{A}_\odot$.

La valeur de t donnée par ce calcul n'est qu'approchée, car elle suppose le mouvement en ascension droite de la planète uniforme. On pourrait en obtenir une plus exacte, en déterminant l'ascension droite qui répond à la valeur de t ainsi obtenue, et avec cette ascension droite recommencer tout le calcul, comme nous l'avons vu pour un cas analogue, celui du lever et du coucher des astres. Cette précision est cependant bien suffisante lorsqu'on s'en tient aux dixièmes ronds de seconde, comme le font la *Connaissance des Temps* et le *Nautical Almanac*.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que le Soleil passait au méridien avant la planète, ce qui rend la valeur de t positive, car alors $\mathcal{A}_p > \mathcal{A}_\odot$. Lorsque le contraire a lieu, on a $\mathcal{A}_p < \mathcal{A}_\odot$ et la valeur de t est négative. Dans le premier cas, le passage de la planète au méridien s'effectue avant minuit; dans le second, il a lieu après minuit et est donné par le complément de t à 12^{h}.

6° *Conjonction, opposition, quadrature, élongation.* — Ces divers phénomènes sont indiqués dans la *Connaissance des Temps,* à la deuxième page de chaque éphéméride, et sont donnés en temps moyen civil de Paris. On les distingue les uns des autres au moyen de la différence en longitude du Soleil et de la planète. Cette différence est de 0° ou de 180° dans les oppositions ou conjonctions et de 90° ou 270° dans les quadratures. On trouve aux mêmes pages les élongations de Vénus et de Mercure, c'est-à-dire les époques où ces planètes sont à leur plus grande distance du Soleil.

Une simple inspection des Tables permet d'assigner l'époque où ces phénomènes ont lieu.

IV. — Éphémérides de la Lune.

1° *Principales inégalités du mouvement de la Lune.* — Soient

$☾$ la longitude de la Lune;
$\odot$ la longitude du Soleil;
$\zeta_{☾}$ l'anomalie moyenne de la Lune;
$\zeta_{\odot}$ l'anomalie moyenne du Soleil.

Les inégalités les plus sensibles qui affectent la longitude de la Lune sont la *variation,* l'*évection* et l'*équation annuelle.* Ces trois inégalités peuvent être représentées par les expressions suivantes :

Variation...........	$0^\circ 36' \sin(\odot - ☾)$,
Équation annuelle...	$0^\circ 11' 16'' \sin \zeta_{\odot}$,
Évection............	$1^\circ 20' \sin 2[(\odot - ☾) - \zeta_{☾}]$.

En comparant les observations anciennes aux observations modernes, Halley reconnut, le premier, que le mouvement de la Lune s'accélérait. La cause de cette accélération, qui a échappé longtemps aux recherches des plus grands géomètres, est due, comme Laplace l'a fait voir, à l'action du Soleil sur la Lune combinée avec la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite terrestre; elle porte le nom d'*équation séculaire.* On peut la représenter algébriquement, en ajoutant aux longitudes moyennes de la Lune le nombre 10″ multiplié par le carré du nombre des siècles écoulés depuis l'époque 1800.

Par l'effet des attractions combinées du Soleil et de la Terre, la Lune subit deux altérations, l'une dans l'inclinaison de son orbite, par suite de laquelle le plan de cette orbite paraît osciller autour d'un état moyen, invariable avec la durée des siècles, et l'autre dans la direction de la ligne des nœuds qui, par son mouvement rétrograde, décrit un arc d'environ 19° 20′ par an ou une circonférence entière en 18 ans 7 mois et demi.

Ces deux mouvements en produisent, par leur combinaison, un troisième dans l'axe de rotation de la Lune, qui décrit une petite surface conique autour de la perpendiculaire à l'orbite de cet astre, menée par son centre, effet analogue à celui qui a lieu pour la Terre, et que l'on désigne sous le nom de *nutation lunaire*.

2° *Longitude moyenne du nœud ascendant de la Lune.* — La longitude du nœud ascendant ☊ a pour expression

$$\mathcal{A} = 33^\circ 15' 26'',9 - (19^\circ 20' 29'',53)\,t,$$

t étant rapporté à la durée de l'année tropique et compté à partir de 1800,0; 33° 15′ 26″,9 représente dans cette formule la valeur de la longitude à l'origine de 1800, et 19° 20′ 29″,53 le moyen mouvement du nœud ascendant de la Lune pendant une année tropique; on y a négligé la variation de l'année tropique, variation qui ne saurait, en effet, rien produire de sensible.

La Table VI, que nous donnons à la fin de l'Ouvrage, fait connaître la valeur de ☊ pour le commencement de chaque année tropique. On l'obtient pour une autre époque de l'année, au moyen du mouvement diurne de la Lune égal à — 3′ 10″,6394, élément que l'on trouve fractionné de 10 jours en 10 jours dans la Table VII.

3° *Passage du centre de la Lune au méridien de Paris.* — Soient

$\mathcal{A}_\odot$ l'ascension droite du Soleil;
$\mathcal{A}_☾$ l'ascension droite de la Lune;
μ' le mouvement diurne du Soleil;
μ le mouvement diurne de la Lune.

On a, pour l'heure t du passage,

$$t = \frac{24^{\text{h}}(\mathcal{A}_☾ - \mathcal{A}_\odot)}{24^{\text{h}}(\mu' - \mu)}.$$

La marche de la Lune en ascension droite n'étant pas uniforme dans l'intervalle que l'on considère, la valeur t ainsi déterminée n'est qu'approchée. Cette approximation est bien suffisante pour la prédiction des passages de la Lune, tels que les donnent les *Éphémérides*. Si l'on voulait cependant une plus grande précision, il faudrait calculer l'ascension droite qui convient à l'heure t ainsi déterminée, en tenant compte des différences secondes, et avec cette ascension droite recommencer tout le calcul, comme nous l'avons déjà vu dans plusieurs cas analogues.

Nous supposons ici $\mathcal{A}_{☾} > \mathcal{A}_{\odot}$. Si $\mathcal{A}_{☾}$ était plus petit que $\mathcal{A}_{\odot}$, la valeur de t serait négative, et le passage de la Lune s'effectuerait après minuit, c'est-à-dire à une heure du lendemain marquée par le complément de t à $12^{\rm h}$.

4° *Parallaxe horizontale équatoriale de la Lune.* — Ces arcs, qui sont donnés de $12^{\rm h}$ en $12^{\rm h}$ dans les *Éphémérides*, se tirent des Tables lunaires; on les obtient facilement pour les heures intermédiaires à l'aide de l'interpolation. On a :

Au périgée de l'astre, la parallaxe horizontale.......	61′.30″
A l'apogée..	53.53
A la distance moyenne...............................	57. 3

Lorsqu'on a une Table des valeurs de la parallaxe pour tous les jours de l'année, rien n'est plus facile que de déterminer les dates des jours où la Lune devient apogée ou périgée; car tout se réduit à trouver les dates où ces valeurs deviennent maxima ou minima. Ce sont ces nombres qui sont donnés dans la *Connaissance des Temps,* au bas de la page 40.

5° *Demi-diamètre de la Lune.* — Cet arc dépend de la distance de la Lune à la Terre et est fourni par l'expression

$$D = 0,27295\,H,$$

dans laquelle H représente la parallaxe horizontale solaire et 0,27295 le rapport $\frac{3}{11}$ qui existe entre le demi-diamètre de la Terre et celui de la Lune. La Table XI que nous donnons à la fin de l'Ouvrage dispense de tout calcul.

6° *Lever et coucher du centre Lune.* — Soient

L la latitude de Paris;
Ⓓ la déclinaison du Soleil à l'instant du phénomène;
D l'arc semi-diurne ou le temps que la Lune met à aller de l'horizon au méridien, et réciproquement.

On a

$$\sin\tfrac{1}{2}D = \frac{\sqrt{\sin(\mu - Ⓓ)\sin(\mu - L)}}{\cos L \cos Ⓓ},$$

avec

$$Za + \text{Ⓓ} + \mathrm{L} = 2\mu,$$
$$Za = 90^\circ + (\text{réfraction} - \text{parallaxe}).$$

Dans les applications, on prend pour la réfraction sa valeur moyenne égale à 33′45″. Quant à la parallaxe, il faut toujours employer celle qui convient à la latitude L du lieu, ce qui se fait, comme on sait, en retranchant de la parallaxe horizontale équatoriale, calculée pour l'heure vraie du phénomène, la quantité $p - ap\sin^2\mathrm{L}$, que l'on trouve toute calculée pour Paris dans la *Connaissance des Temps,* à la page 512. Soit alors $\mathcal{A}_{☾}$ l'ascension droite de la Lune, on a

Heure sidérale du coucher............	$\mathcal{A}_{☾} + \mathrm{D}$,
Heure sidérale du lever...............	$\mathcal{A}_{☾} - \mathrm{D}$;

et de là il est aisé de conclure l'heure moyenne du phénomène telle que la donne la *Connaissance des Temps,* heure qu'il faut corriger ensuite, comme nous l'avons expliqué, par des approximations successives, si l'on veut obtenir un plus grand degré de précision.

7° *Phases de la Lune.* — Soient $\mathcal{L}_{\odot}$ la longitude du Soleil, $\mathcal{L}_{☾}$ la longitude de la Lune à l'époque t qui précède immédiatement, dans les Tables, l'instant τ où la différence $\mathcal{L}_{☾} - \mathcal{L}_{\odot}$ devient égale à $\zeta = 0^\circ$, 90°, 180° ou 270°. On a

$$\tau = \frac{t + \zeta + \mathcal{L}_{☾} - \mathcal{L}_{\odot}}{\mu - \mu'}.$$

On peut prendre pour l'époque t le midi ou le minuit qui précède l'instant cherché τ, instant déterminé par la condition $\mathcal{L}_{☾} - \mathcal{L}_{\odot} < \zeta$, ou $\mathcal{L}_{☾} - \mathcal{L}_{\odot} > \zeta$. En remplaçant, dans cette formule, ζ successivement par 0°, 90°, 180° et 270°, on obtient les valeurs de τ correspondant respectivement à la néoménie, au premier quartier, à la pleine Lune et au dernier quartier.

8° *Lieux lunaires.* — Les inégalités que nous avons indiquées au n° 1°, sous les noms de *variation,* d'*évection* et d'*équation annuelle,* sont les plus sensibles qui affectent la longitude de la Lune, mais ce ne sont pas les seules qui altèrent cet élément. L'analyse en a fait découvrir un grand nombre d'autres, beaucoup plus petites, il est vrai, mais auxquelles on ne saurait se dispenser d'avoir égard dans la construction des Tables lunaires.

En les réunissant avec leurs signes aux trois précédentes et à la longitude moyenne, on obtient la longitude vraie telle que la donnent les *Éphémérides*. On a ainsi

$$\begin{aligned}\text{longitude vraie ☾} &= \text{longitude moyenne}\\ &+ \text{équation du centre}\\ &+ \text{variation}\\ &+ \text{évection}\\ &+ \text{équation annuelle}\\ &+ \text{perturbations.}\end{aligned}$$

Les différents termes de cette expression se tirent tous des Tables lunaires de Hansen.

9° *Ascension droite et déclinaison de la Lune.* — Les ascensions droites et déclinaisons de la Lune sont données actuellement dans la *Connaissance des Temps* pour tous les jours de l'année, et pour chaque heure de temps moyen de Paris. Les ascensions droites sont toujours croissantes de 0° à 360° et positives. Quant aux déclinaisons, elles sont boréales ou australes, c'est-à-dire positives ou négatives, selon que la Lune se trouve située au-dessus ou au-dessous de l'équateur. Les ascensions droites sont toujours comptées de l'équinoxe apparent.

Après avoir déduit des longitudes et latitudes, calculées comme nous venons de le dire à l'aide des Tables, l'ascension droite et la déclinaison de la Lune pour midi et minuit moyen ou de douze heures en douze heures, on les obtient pour chaque heure moyenne du jour par interpolation, en tenant compte des différences 1^re^, 2^e^, 3^e^, 4^e^, 5^e^ et 6^e^. Avec les ascensions droites et déclinaisons de la Lune ainsi déterminées et à l'aide des variations pour une minute, que l'on trouve inscrites en regard de chaque heure, rien n'est plus facile que d'obtenir l'ascension droite et la déclinaison pour une heure intermédiaire.

V. — Calcul des positions apparentes des étoiles.

1° *Formule de réduction.* — Soient

$\mathcal{A}_m$, $\mathcal{D}_m$ les ascension droite et déclinaison *moyennes* d'une étoile au commencement d'une certaine année;

$\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ les ascension droite et déclinaison *apparentes* rapportées au temps t, et comptées à partir de la même année;
μ, μ' les mouvements propres de l'astre en ascension droite et en déclinaison;
$\odot$ la longitude vraie du Soleil;
☊ la longitude du nœud de la Lune;
$\Delta\mathcal{L}$ la nutation luni-solaire de la longitude;
$\Delta\omega$ la nutation luni-solaire de l'obliquité;
ω l'obliquité moyenne de l'écliptique.

Posons

$$k = \frac{\sin\omega}{n}, \quad h = \cos\omega - \frac{m}{n}\sin\omega,$$

et de plus

$$\begin{aligned} A &= -20'',4451 \cos\omega \cos\odot, \\ B &= -20'',4451 \sin\odot, \\ C &= t + k\Delta\mathcal{L}, \\ D &= -\Delta\omega, \\ E &= h\Delta\mathcal{L}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a &= \cos\mathcal{A} \operatorname{séc}\mathcal{D}, \\ b &= \sin\mathcal{A} \operatorname{séc}\mathcal{D}, \\ c &= m + n \operatorname{tang}\mathcal{D} \sin\mathcal{A}, \\ d &= \cos\mathcal{A} \operatorname{tang}\mathcal{D}, \\ a' &= \operatorname{tang}\omega \cos\mathcal{D} - \sin\mathcal{A} \sin\mathcal{D}, \\ b' &= \cos\mathcal{A} \sin\mathcal{D}, \\ c' &= n \cos\mathcal{A}, \\ d' &= -\sin\mathcal{A}. \end{aligned}$$

On a, en négligeant le très petit terme $h\Delta\mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} (\text{en arc})\ \mathcal{A} &= \mathcal{A}_m + Aa + Bb + Cc + Dd + t\mu, \\ \mathcal{D} &= \mathcal{D}_m + Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + t\mu'. \end{aligned}$$

Les quantités a, b, c, d, a', b', c', d' que renferment ces formules varient d'une étoile à l'autre, mais restent sensiblement les mêmes pour une même étoile; A, B, C, D sont des facteurs communs à toutes les étoiles et varient rapidement avec le temps. Les logarithmes de ces nombres, calculés pour tous les jours de l'année à *minuit moyen*, sont donnés dans la *Connaissance des Temps* et dans le *Nautical Almanac*.

On a omis, dans leur calcul, les termes en 2☾ qui, à cause de leur petitesse et de la brièveté de leurs périodes, ne sauraient, en effet, rien produire de sensible.

2° *Transformation du* Nautical Almanac. — En posant

$$\begin{aligned} A &= h \sin H, \quad & B &= h \cos H, \quad & i &= A \operatorname{tang}\omega, \\ nC &= g \cos G, \quad & D &= g \sin G, \quad & j &= mC, \end{aligned}$$

on a

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_m + f + g \operatorname{tang}\mathcal{D} \sin(G + \mathcal{A}) + h \operatorname{séc}\mathcal{D} \sin(H + \mathcal{A}) + t\mu,$$
$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_m + i \cos\mathcal{D} + g \cos(G + \mathcal{A}) + h \sin\mathcal{D} \cos(H + \mathcal{A}) + t\mu'.$$

On trouve les valeurs de f, g, h, G, H et i toutes calculées, de jour en jour et pour minuit moyen, dans le *Nautical Almanac* et dans la *Connaissance des Temps.*

3° *Détermination numérique des éléments* t, $\odot$, Ω, ω, h, k, $\Delta\mathcal{L}$ *et* $\Delta\omega$ *qui entrent dans les formules précédentes.* — [*a*] *Calcul du temps* τ *écoulé depuis le commencement de l'année tropique.* — On a

$$\tau = \tau_0 + j.$$

Le calcul de cette formule est facilité par l'emploi des Tables VI et VII que nous donnons à la fin de l'Ouvrage. La Table VI fait connaître la valeur de τ_0 pour les années comprises entre 1870 et 1900; la Table VII donne les valeurs de j.

[*b*] *Calcul de la longitude vraie* $\odot$. — Cette longitude s'obtient à l'aide des Tables solaires, et pour la longitude moyenne

$$\mathcal{L} = 280° + (59'8'',3302)\tau.$$

[*c*] *Calcul de la longitude du nœud ascendant* Ω. — Cette longitude est donnée par l'expression

$$\Omega = 33°15'26'',9 - (19°20'29'',53)t,$$

dont le calcul est facilité, comme nous l'avons déjà dit, par l'emploi des Tables VI et VII.

[*d*] *Calcul des quantités* ω, h et k. — On a

$$\omega = 23°27'54'',8 - 0'',476t,$$

t étant rapporté à l'année tropique et compté à partir de 1800,0. On a de plus, en 1750,

$$m = 46'',02824 + 0'',0003086450\,t,$$
$$n = 20'',06442 - 0'',0000970204\,t,$$

et en 1850

$$m = 46'',06010 + 0'',00028373\,t,$$
$$n = 20'',05240 - 0'',00008663\,t.$$

De là on conclut

Pour 1750......... $\log k = 8.29785$, $\log h = 7.5241$,
Pour 1850......... $\log k = 8.29782$, $\log h = 7.4692$.

[*e*] *Calcul de* $\Delta\mathcal{L}$ *et de* $\Delta\omega$. — Ces quantités, qui représentent les nutations luni-solaire en longitude et de l'obliquité, ont pour expression

$$\Delta\mathcal{L} = 17'',2526 \sin \text{☊} + 0'',2073 \sin 2\text{☊} - 1'',2692 \sin 2\odot - 0'',2041 \sin 2\text{☾},$$
$$\Delta\omega = 9'',2236 \cos \text{☊} - 0'',0897 \cos 2\text{☊} + 0'',0886 \cos 2\text{☾} + 0'',5509 \cos 2\odot.$$

VI. — Calcul des distances lunaires.

1° *Équation fondamentale.* — Ces distances représentent les arcs qui vont du centre de la Lune au centre

1° du Soleil,
2° de Mars,
3° de Vénus,
4° de Jupiter,
5° de Saturne,
6° d'Aldébaran,
7° de α Bélier,
8° de α Pégasé,
9° d'Antarès,
10° de Pollux,
11° de Régulus,
12° de α Vierge,
13° d'Altaïr,
14° de Fomalhaut.

Les lettres E (est), O (ouest), que l'on voit placées en regard du nom de ces astres, servent à indiquer la position qu'ils occupent dans le ciel par rapport à la Lune.

Soient

P la différence en ascension droite ou en longitude des deux astres;
$\left.\begin{matrix}\mathfrak{D}' \\ \mathfrak{D}\end{matrix}\right\}$ les compléments des déclinaisons ou des latitudes;
Δ la distance vraie cherchée.

On a

$$\cos\Delta = \frac{\cos\mathfrak{D}\cos(\mathfrak{D}' - \varphi)}{\cos\varphi},$$

avec

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\mathfrak{D}\cos P.$$

Remarque. — Les arcs qui se rapportent au Soleil et à la Lune ne sont donnés dans les *Éphémérides* que pour des valeurs de l'angle P plus grandes que 34° environ et plus petites que 125°. Cela tient à ce que, pendant les trois jours qui précèdent ou qui suivent la néoménie, la Lune n'est pas visible, et que, pendant les trois jours qui précèdent ou qui suivent la pleine Lune, le Soleil se trouve à une trop grande distance de notre satellite pour qu'il soit possible d'en mesurer la distance.

VII. — Prédiction des éclipses et des configurations des satellites de Jupiter.

1° *Éclipses des satellites de Jupiter.* — Les éclipses des satellites de Jupiter données dans la *Connaissance des Temps* sont calculées à l'aide des Tables de Damoiseau, publiées par le Bureau des Longitudes en 1836. Les instants de ces phénomènes y sont indiqués en temps moyen astronomique compté de midi. On a marqué d'un astérisque ⋆ les éclipses qui sont visibles à Paris. Pour qu'une éclipse de satellite soit visible, il faut que Jupiter soit élevé sur l'horizon d'au moins 8°, et d'un autre côté que le Soleil soit à plus de 8° au-dessous de ce cercle.

Pour reconnaître aisément la place qu'occupent, par rapport à Jupiter, les satellites dont on se propose d'observer l'*immersion* ou l'*émersion*, il faut suivre les règles suivantes, que prescrivent la *Connaissance des Temps* et le *Nautical almanac*.

(*a*) Avant l'opposition, c'est-à-dire pendant tout le temps que Jupiter passe au méridien le matin, l'ombre est située à l'*occident* de cette planète et les immersions ou les émersions se font de ce côté.

(*b*) Après l'opposition, lorsque Jupiter passe au méridien avant minuit, c'est toujours à l'*orient* de la planète que sont les satellites qui doivent entrer dans l'ombre ou qui doivent en sortir.

(*c*) Avant l'opposition, on ne peut voir que les immersions du premier satellite, et après l'opposition il n'y a que les émersions qui puissent être observées. C'est, en général, la même chose pour le second satellite. Il arrive cependant quelquefois qu'on peut observer l'immersion et l'émersion lorsque Jupiter est en quadrature.

2° *Configuration des satellites de Jupiter.* — Afin de pouvoir distinguer les satellites les uns des autres et reconnaître aisément la place de celui dont on veut observer l'éclipse, la *Connaissance des Temps* donne, pour chaque jour de l'année où Jupiter est observable et pour l'heure la plus favorable aux observations, un Tableau où les positions relatives de la planète et de ses satellites se trouvent figurées.

Voici quelles sont les désignations adoptées pour marquer ces positions :

$\odot$, position de Jupiter;
•4, position du quatrième satellite : le chiffre est toujours placé du côté vers lequel le satellite se dirige;
$\bigcirc_3$, le troisième satellite est sur le disque de la planète;
$\bullet_3$, le troisième satellite est dans l'ombre projetée par la planète ou bien caché derrière son disque.

Ces configurations sont renversées, c'est-à-dire telles qu'on les voit dans des lunettes à deux verres convexes. On les détermine à l'aide des Tables de Damoiseau insérées à la suite des Tables écliptiques dont nous venons de parler.

VIII. — Prédiction des éclipses de Lune et de Soleil.

A. — *Notation.*

D, déclinaison *vraie* de la Lune;
$\mathbb{D}$, déclinaison *vraie* du Soleil;
α, différence des ascensions droites *vraies* en arc de ces deux astres où l'ascension droite de la Lune moins celle du Soleil;
D_1, mouvement *relatif* en déclinaison de la Lune ou le mouvement en déclinaison de la Lune, moins le mouvement en déclinaison du Soleil;
α_1, mouvement *relatif* en ascension droite de la Lune ou le mouvement en ascension droite de la Lune moins celui du Soleil;
∂, différence des déclinaisons au moment de l'opposition en ascension droite;
Π, parallaxe horizontale équatoriale de la Lune;
p, parallaxe horizontale équatoriale du Soleil;
$P' = (9{,}99929)(\Pi - p)$;
δ, demi-diamètre vrai de la Lune;
d, demi-diamètre vrai du Soleil;
Δ, distance vraie des centres du Soleil et de la Lune;
D', α', δ', Δ', valeurs apparentes de D, α, δ, Δ;
ω, angle LSS_1 (*fig.* 29), formé par la distance des centres SL et la plus courte distance $SS_1 = n$.

(B). — *Éclipses de Soleil. — Conditions de possibilité.*

La latitude lunaire λ doit satisfaire à l'inégalité

$$\lambda < d + \delta + \mathrm{H} - p,$$

et, suivant qu'au moment de la conjonction on aura

$\lambda < 1^\circ 24'$, l'éclipse sera certaine,
$\lambda > 1^\circ 24'$ et $< 1^\circ 34' 18''$, l'éclipse sera douteuse,
$\lambda > 1^\circ 34' 18$, il n'y aura pas d'éclipse.

(C). — *Détermination des lieux qui voient commencer ou finir l'éclipse générale, l'éclipse totale ou l'éclipse centrale.*

1° Inclinaison i de l'orbite relative :

$$\operatorname{tang} i = \frac{\mathrm{D}_1}{\alpha_1 \cos \text{☾}}.$$

2° Valeur de n :

$$n = \partial \cos i.$$

3° Temps t écoulé entre le milieu de l'éclipse et l'instant de la conjonction en ascension droite :

$$t = c \operatorname{tang} i,$$
$$c = \frac{n \sin i (3.55630)}{\mathrm{D}_1}.$$

4° Temps T_m du milieu de l'éclipse :

$$\mathrm{T}_m = \text{temps de la conjonction} - t.$$

5° Temps du commencement et de la fin de l'éclipse :

$$\cos \omega = \frac{n}{\Delta}, \quad \tau = c \operatorname{tang} \omega,$$

Temps du commencement ...... $\mathrm{H}_c = \mathrm{T}_m - \tau$
Temps de la fin .... $\mathrm{H}_f = \mathrm{T}_m + \tau$

Dans ces formules, il faut évidemment prendre pour le commencement et la fin

De l'éclipse partielle.......... $\Delta = \mathrm{P}' + \delta + d$
» totale............. $\Delta = \mathrm{P}' + \delta - d$
» annulaire......... $\Delta = \mathrm{P}' - \delta + d$
» centrale.......... $\Delta = \mathrm{P}'$

6° Longitude et latitude des lieux qui voient commencer l'éclipse :

$$a = (-i) - \omega,$$
$$\sin l' = \cos a \cos \mathscr{D},$$
$$\operatorname{tang} h = -\frac{\operatorname{tang} a}{\sin \mathscr{D}},$$
$$\text{Longitude Est} = h - \mathrm{H}_c,$$

h étant dans le même demi-cercle que a.

7° Longitude et latitude des lieux qui voient finir l'éclipse :

$$b = (-i) + \omega,$$
$$\sin l = \cos b \cos \mathscr{D},$$
$$\operatorname{tang} h' = -\frac{\operatorname{tang} b}{\sin \mathscr{D}},$$
$$\text{Longitude Est} = h' - \mathrm{H}_f,$$

h' étant dans le même demi-cercle que b.

(D). — *Courbes des lieux voyant la phase au lever ou au coucher du Soleil.*

1° Constantes du calcul :

$$p = \tfrac{1}{2}(\mathrm{P}' - \Delta'),$$
$$q = \tfrac{1}{2}(\mathrm{P}' + \Delta'),$$
$$\operatorname{tang} \omega = \frac{t}{c},$$
$$\Delta = \frac{n}{\cos \omega}.$$

ω est plus grand que 90° quand n est négatif.

2° Valeurs de S et de φ :

$\mathrm{S} = (-i) - \omega$ pour le temps écoulé avant le milieu de l'éclipse,
$\mathrm{S} = (-i) + \omega$ pour le temps écoulé après le milieu de l'éclipse.

$$\sin \tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{(\tfrac{1}{2}\Delta - p)(q - \tfrac{1}{2}\Delta)}{\mathrm{P}'\Delta}},$$

$\frac{\varphi}{2}$ étant plus petit que 90° et positif.

3° Coordonnées du lieu Z

$$\sin l = \cos \mathscr{D} \cos(\mathrm{S} - \varphi),$$
$$\operatorname{tang} h = -\frac{\operatorname{tang}(\mathrm{S} - \varphi)}{\sin \mathscr{D}}.$$

h est dans la même circonférence que $S - \varphi$.

$$\text{Longitude Est} = h - \text{H} \;(\text{H} = \text{heure vraie de Paris}).$$

4° Coordonnées du lieu Z' :

$$\sin l = \cos \textcircled{D} \cos(S + \varphi),$$
$$\operatorname{tang} h = - \frac{\operatorname{tang}(S + \varphi)}{\sin \textcircled{D}}.$$
$$\text{Longitude Est} = h - \text{H}.$$

h est dans la même demi-circonférence que $S + \varphi$.

5° Détermination plus exacte des courbes du lever et du coucher : On cherchera les valeurs de D, $\textcircled{D}$, α pour le temps donné et celle de $P' = \rho(\text{H} - p)$ pour la latitude du lieu obtenu par le calcul qui précède. Alors on aura

$$(D) = D + \alpha \,\text{correct.} \quad (\text{Table X}),$$
$$(x) = (D) - \textcircled{D}, \quad (y) = \alpha \cos(D),$$
$$\operatorname{tang} S = \frac{(y)}{(x)}, \quad \Delta = \frac{(y)}{\sin S} = \frac{x}{\cos S},$$
$$p = \tfrac{1}{2}(P' - \Delta'), \quad q = \tfrac{1}{2}(P' + \Delta'),$$
$$\sin \tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}\Delta - p)(q - \frac{1}{2}\Delta)}{P'\Delta}},$$

le quadrant dans lequel tombe S étant déterminé par le signe de (a) et de (y). Avec les valeurs de S et de φ ainsi obtenues, on procédera au calcul de l et de h comme il vient d'être dit (3° et 4°).

E. — *Lignes de simple contact nord et sud.*

1° Valeurs de Δ' pour :

Une éclipse partielle	$\Delta' = \delta + P' + d$
Une éclipse totale................	$\Delta' = \delta + P' - d$
Une éclipse annulaire...........	$\Delta' = d - \delta + P'$

On ajoute 6″ au demi-diamètre δ du Soleil, parce que cette quantité représente la moyenne des augmentations du demi-diamètre horizontal de la Lune.

2° Conditions relatives à l'existence des courbes limites nord et sud :

$n < P' - \Delta'$: les deux courbes existent.

$n > P' - \Delta'$: une seule courbe existe ; elle est située du côté *sud* si n est positif et du côté *nord* si n est négatif.

3° Détermination des instants relatifs à l'entrée et à la sortie : on a

$$\cos W = \frac{n \pm \Delta'}{P'}, \quad \tau = \left(\frac{c P'}{n}\right) \sin W;$$

on prend le signe supérieur pour la limite *nord* et le signe inférieur pour la limite *sud ;* on a ensuite

Temps de l'entrée = temps du milieu $- \tau$,
Temps de la sortie = temps du milieu $+ \tau$.

4° Positions géographiques des lieux correspondants :

Cette détermination se fait à l'aide des formules des n^os^ 6° et 7° (§ C) : ainsi l'on a

$$\text{Entrée} \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} a &= (-i) - W, \\ \sin l &= \cos a \cos \mathbb{D}, \\ \operatorname{tang} h &= -\frac{\operatorname{tang} a}{\sin \mathbb{D}}. \end{aligned} \right.$$

$$\text{Sortie} \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} b &= (-i) + W, \\ \sin l' &= \cos b \cos \mathbb{D}, \\ \operatorname{tang} h' &= -\frac{\operatorname{tang} b}{\sin \mathbb{D}}. \end{aligned} \right.$$

$$\text{Longitude Est} = h - H.$$

5° Détermination des lieux correspondant à une époque comprise entre celles de l'entrée et de la sortie :

Calcul des constantes u, D', α', W ($\mathbb{D}$ étant pris pour le moment de la conjonction) :

$$\begin{aligned} u &= \Delta' \cos i, \\ D' &= \mathbb{D} \mp u, \\ \alpha' &= \pm \frac{\Delta' \sin i}{\cos D'}, \\ E &= \frac{n}{c(n \pm \Delta')}, \\ \cos W &= \frac{n \pm \Delta'}{P'}; \end{aligned}$$

le signe + se rapporte à la limite *nord* et le signe — à la limite *sud*.

Calcul des angles Z et M (t est le temps du milieu de l'éclipse générale) :

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\omega' &= tE,\\ \sin Z &= \frac{\cos W}{\cos\omega'},\\ M &= (-i) \mp \omega'.\end{aligned}$$

Coordonnées du lieu cherché :

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\theta &= \operatorname{tang}Z\cos M,\\ \operatorname{tang}(h-\alpha') &= \frac{\sin\theta}{\cos(\theta+D')}\operatorname{tang}M,\\ \operatorname{tang}l &= \operatorname{tang}(\theta+D')\cos(h-\alpha').\end{aligned}$$

Vérification :

$$\frac{\sin\theta}{\cos(\theta+D')} = \frac{\sin Z\cos M}{\cos(h-\alpha')\cos l}.$$

6° Détermination plus exacte des coordonnées h et l :

Pour la latitude donnée par ce premier calcul, on cherche les valeurs de $P' = \rho(\Pi - p)$ et avec la valeur de Z on détermine l'augmentation du demi-diamètre de la Lune (Table XI). On a alors

$$\begin{aligned}\Delta' &= \delta_1 + d,\\ \Delta' &= \delta_1 - d,\\ \Delta' &= d - \delta_1,\end{aligned}$$

suivant que l'éclipse est *partielle, totale* ou *annulaire*. δ_1 désigne ici le demi-diamètre corrigé de la Lune.

On a ensuite pour le temps de la conjonction et avec la valeur de Z obtenue par la première approximation

$$\begin{aligned}(A) &= [0,58204]\,\alpha_1\cos D,\\ (B) &= [0,58204]\,D_1,\\ (D) &= D + \alpha \text{ correct. (Table X)},\\ (x) &= (D) - \mathcal{D}, \quad y = \alpha\cos(D).\\ \lambda\cos\nu &= \frac{(A) + (x)\sin\mathcal{D}}{P'\cos\mathcal{D}},\\ \lambda\sin\nu &= \frac{(B) - (y)\sin\mathcal{D}}{P'\cos\mathcal{D}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \sqrt{\frac{\cos Z}{2\lambda\cos\nu}},\\ \operatorname{tang}i'' &= \frac{\operatorname{tang}\nu}{\cos 2\varphi},\\ u &= \Delta'\cos i'', \quad D' = \mathcal{D} \mp u,\\ v &= \Delta'\sin i'', \quad \alpha' = \pm\frac{v}{\cos D'},\\ (D) &= D + (\alpha - \alpha') \text{ correct.}\\ y &= (\alpha - \alpha')\cos(D),\\ x &= (D) - D'.\end{aligned}$$

$$\operatorname{tang}M = \frac{y}{x}, \quad \sin Z = \frac{x}{P'\cos M} = \frac{y}{P'\sin M}.$$

Le signe supérieur est relatif à la limite *nord* et le signe inférieur à la limite *sud*. Le reste du calcul s'achève comme il vient d'être dit au n° 5°.

F. — *Détermination du lieu où une phase donnée apparaît au lever et au coucher du Soleil.*

Pour que cette détermination soit possible, il faut que l'on ait

$$n > \mathrm{P}' - \Delta'.$$

1° Calcul de $\mathrm{P}' = \rho(\Pi - p)$ pour une latitude égale à $90° - \textcircled{D}$ au moment de la conjonction.

2° Calcul du mouvement horaire μ de la Lune sur son orbite apparente relative et de l'inclinaison i' :

$$\mu \sin i' = \mathrm{D}_1,$$
$$\mu \cos i' = \alpha_1 \cos \mathrm{D} \pm (9,41796)\, \mathrm{P}' \sin \textcircled{D}.$$

3° Détermination de k :

$$k = -\frac{\partial \pm \mathrm{P}'}{\cos(i' \sim i)},$$

le signe supérieur ayant lieu quand ∂ est *positif* et le signe inférieur quand ∂ est négatif.

4° Temps écoulé depuis la conjonction jusqu'au moment considéré :

$$t = [3.55630]\, k \frac{\sin i}{\mu} \quad \text{(en secondes)}.$$

5° Heure H du lieu au moment de la conjonction vraie :

$$\mathrm{H} = 12^{\mathrm{h}} - t, \text{ si } \partial \text{ et } \textcircled{D} \text{ sont de même signe.}$$
$$\mathrm{H} = 0^{\mathrm{h}} - t, \text{ si } \partial \text{ et } \textcircled{D} \text{ sont de signes contraires;}$$

l'heure H, comparée à celle de Paris au moment de la conjonction vraie, détermine la *longitude* du lieu.

6° Calcul de la latitude du lieu : on a

$$\cos \omega = \frac{k \cos i}{\Delta'}, \quad \tau = \frac{\Delta' \sin \omega}{\mu},$$

puis

$$\operatorname{tang} l = \pm \frac{\cos(\tau . 15°)}{\operatorname{tang} \textcircled{D}}.$$

l est toujours de même nom que ∂.

G. — *Détermination des lieux qui voient le milieu de l'éclipse, le Soleil étant à l'horizon.*

(1) $$n < P' - (\delta + d).$$

1° On a

$$\tau_1 = \frac{cP'}{n},$$

$$\cos\omega_2 = \frac{n \pm (\delta + d)}{P'}, \quad \tau_2 = \left(\frac{cP'}{n}\right)\sin\omega_2,$$

$(\delta + d)$ étant pris avec le signe de n. Ces demi-durées τ_1 et τ_2 donnent deux temps du commencement et de la fin de la phase.

2° On a ensuite, pour déterminer la position des lieux qui voient la première et la dernière apparition sur la Terre :

Pour la première apparition,

$$\sin l = -\sin i \cos\omega,$$

$$\operatorname{tang} h = -\frac{\cot i}{\sin\omega};$$

pour la dernière apparition : changer le nom de la latitude précédente l et, à l'angle horaire h, appliquer ± 180°.

3° Pour les points extrêmes, on a

$$\cos\omega_3 = \frac{n \pm (\delta + d)}{P'},$$

$$\tau_3 = \left(\frac{cP'}{n}\right)\sin\omega_3,$$

et $\delta + d$ doit être pris avec un signe contraire à celui de n.

Avec ces valeurs de ω_3 et de τ_3, on procède comme pour le commencement et la fin de la phase sur la Terre.

(2) $$n > P' - (\delta + d) \quad \text{et} \quad < \delta + d.$$

On a

$$\tau_1 = \frac{cP'}{n}.$$

Le phénomène continue dans toute l'étendue de la durée τ_1 ; les deux points extrêmes sont déterminés, comme ci-dessus, avec l'angle ω_3, et la position des lieux de la première et de la dernière apparition comme précédemment.

$$(3) \qquad n > \delta + d.$$

On calcule

$$\cos\omega = \frac{n - (\delta + d)}{P'}, \quad \tau = \left(\frac{cP'}{n}\right)\sin\omega,$$

n étant considéré comme positif et $\omega > 90^\circ$ quand δ est négatif; et les points extrêmes sont déterminés en procédant, avec cette valeur de ω, comme pour le commencement et la fin de la phase.

4° *Détermination des points intermédiaires de la courbe.* — t désignant le temps écoulé depuis le milieu de l'éclipse jusqu'au moment considéré, on a

$$\sin\omega = \left(\frac{n}{cP'}\right)t,$$

et, avec cette valeur de ω, on procède comme on l'a vu pour le commencement et la fin de la phase.

5° *Détermination plus exacte.* — On calcule

1° $P' = \rho(\Pi - p)$ pour la latitude obtenue par le premier calcul;

2° $(x) = (D) - \mathcal{D}$, $(D) = D + \alpha$ correct. (Table X);

3° $(y) = \alpha\cos(D)$;

4° $\operatorname{tang} S = \dfrac{(y)}{(x)}$;

5° $\Delta = \dfrac{(y)}{\sin S} = \dfrac{(x)}{\cos S}$;

6° $(A) = (0{,}58204)\alpha_1 \cos D$;

7° $(B) = (0{,}58204)D$;

8° $\operatorname{tang}\nu = \dfrac{(B) - (y)\sin\mathcal{D}}{(A) + (x)\sin\mathcal{D}}$;

puis

$$\sin\theta = g\Delta \quad \text{en posant} \quad g = \frac{\sin(S+\nu)}{P'},$$

$$Sm = \frac{\sin(S+\nu-\theta)}{g}, \quad M = (\theta - \nu),$$

$$Sm' = \frac{\sin(S+\nu+\theta)}{g}, \quad M' = (180^\circ - \theta) - \nu,$$

θ étant positif ou négatif, mais $<$ que 90°.

On a alors

$$\sin l = \cos\binom{\text{M}}{\text{M}'}\cos\textcircled{D}, \quad \operatorname{tang} h = -\frac{\operatorname{tang}\binom{\text{M}}{\text{M}'}}{\sin\textcircled{D}}.$$

Deux positions peuvent être déterminées si $\text{S}m$ et $\text{S}m < \delta + d$; une seule de ces positions existe si $\text{S}m$ ou $\text{S}m' > \delta + d$.

II. — *Ligne de l'éclipse centrale.*

1° t désignant le temps écoulé depuis le milieu de l'éclipse, on a

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{t}{c}, \quad \Delta = \frac{n}{\cos\omega},$$

ω étant plus grand que 90° quand n est négatif.

2° On a ensuite

$$\text{S} = (-i) \mp \omega,$$

le signe *négatif* se rapportant au temps écoulé *avant* le milieu de l'éclipse, et le signe *positif* au temps écoulé *après* ce milieu.

Puis

$$\sin z = \frac{\Delta}{\text{P}'},$$

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\text{Z}\cos\text{S},$$

$$\operatorname{tang} h = \frac{\sin\theta}{\cos(\theta + \textcircled{D})}\operatorname{tang}\text{S},$$

$$\operatorname{tang} l = \operatorname{tang}(\theta + \textcircled{D})\cos h,$$

$$\text{vérific.}\ \frac{\sin\theta}{\cos(\theta + \textcircled{D})} = \frac{\sin\text{Z}\cos\text{S}}{\cos h\cos l}.$$

θ est de même signe que $\cos\text{S}$ et plus petit que 90°; h est dans le même demi-cercle que S.

3° *Lieu qui voit à midi vrai l'éclipse centrale.* — On a, pour le déterminer,

$$\sin\text{Z} = \frac{\partial}{\text{P}'}, \quad l = \textcircled{D} + \text{Z},$$

longit. Ouest du lieu = Temps de la conjonction vraie.

Z a le même signe que ∂.

IX. — Prédiction des éclipses de Lune.

1° *Conditions de possibilité des éclipses de Lune.* — La latitude lunaire λ doit satisfaire à l'inégalité

$$\lambda < \delta + \Pi + p - d$$

et, suivant que dans l'opposition

$\lambda < 52'$, l'éclipse sera certaine;
$\lambda > 52$ et $< 63'$, l'éclipse sera douteuse;
$\lambda > 63$, il n'y aura pas d'éclipse.

Dans l'inégalité ci-dessus, Π représente la parallaxe équatoriale de la Lune, p la parallaxe horizontale équatoriale du Soleil, δ le demi-diamètre de la Lune et d le demi-diamètre du Soleil.

2° *Époques du commencement, de la fin et du milieu de l'éclipse.* — Soient

$\mathcal{A}_{\odot}$ l'ascension droite du Soleil,
$\mathcal{D}$ sa déclinaison,
$\mathcal{A}_{☾}$ l'ascension droite de la Lune,
D sa déclinaison,
$P' = [9.99929]\,\Pi.$

$$A = \frac{61}{60}(\Pi + p - d)$$

$$A' = \frac{61}{60}(\Pi + p + d).$$

On aura

Ascension droite du centre de l'ombre $= \mathcal{A}_{\odot} \pm 12^{\text{h}} = \mathcal{A}$,
Déclinaison du centre de l'ombre $= -\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$;

$\alpha = \mathcal{A}_{☾} - (\mathcal{A}_{\odot} \pm 12^{\text{h}}) = \mathcal{A}_{☾} - \mathcal{A}$,
$\alpha_1 =$ mouvement horaire de α,
$x = (D + \alpha \text{ correct.}) - \mathcal{D}_1$,
$y = \alpha \cos D$,
$x_1 =$ mouvement horaire de x,
$y_1 = \alpha_1 \cos D$;

puis

$$\Delta' = A \pm \delta, \quad \Delta' = A' \pm \delta,$$

$$\operatorname{tang} S = \frac{y}{x}, \quad \cot i = \frac{y_1}{x_1}, \quad W = \frac{y}{\sin S} = \frac{y}{\cos S},$$

$$n = W \cos[-(S+i)], \quad \cos\omega = \frac{n}{\Delta'}, \quad c = \frac{W \cos i}{y_1 \cos\omega} 3600'',$$

$$t_1 = c \sin[-(S+i) - \omega], \quad t_2 = c \sin[-(S+i) + \omega],$$

et enfin

Temps du commencement...	$T + t_1$
Temps de la fin............	$T + t_2$
Temps du milieu...........	$T + \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$.

X. — Calcul des occultations d'étoiles et de planètes par la Lune.

1° *Éléments pour le calcul des occultations.* — Soient

$\pm \mathcal{L}$ la longitude du lieu par rapport à Paris, exprimée en temps ou en degré : *positive* si le lieu est à l'Est; *négative* s'il est à l'Ouest;

$\pm \varphi$ la latitude géographique } .... latitude { boréale +,
$\pm \varphi'$ la latitude géocentrique } australe — ;

$\pm$ D la déclinaison de l'astre occulté..... déclin. { boréale +, australe — ;

$\pm \delta$ la déclinaison de la Lune............ déclin. { boréale +, australe — ;

A l'ascension droite de l'astre;

α l'ascension droite de la Lune;

π la parallaxe de la Lune;

$\pm h$ l'angle horaire de l'étoile à l'instant T de la conjonction vraie en ascension droite : *positif* si l'astre est dans l'Ouest; *négatif* s'il est dans l'Est;

e l'excentricité d'un méridien terrestre supposée constante pour tous les méridiens;

r le rayon de la Terre dans le lieu considéré.

Les quantités h, p, q, p', q', données dans la *Connaissance des Temps,* et qui dépendent exclusivement de la position géocentrique de la Lune à l'époque T, temps moyen de Paris de la conjonction vraie en ascension droite, seront déterminées à l'aide des relations suivantes :

$$p = \frac{\alpha - A}{\pi} \cos\delta$$

(p étant toujours égal à zéro à l'instant de la conjonction vraie).

$$q = \frac{\delta - \mathrm{D}}{\pi},$$

$$p' = \cos\delta \, \frac{\text{variat. horaire } \alpha}{\pi},$$

$$q' = \frac{\text{variat. horaire } \delta}{\pi}.$$

2° *Calcul de l'occultation pour un lieu quelconque de la Terre.* — On calculera d'abord, par les formules suivantes $\log(r\cos\varphi')$ et $\log(r\sin\varphi')$:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= e\sin\varphi, \quad \log e = 8.9122052, \\ \log(r\cos\varphi') &= \log\cos\varphi - \log\cos\theta, \\ \log r\sin\varphi' &= (1.0848864) + \log\tang\theta; \end{aligned}$$

puis, avec T, $\mathcal{L}$ et h, on cherchera l'angle horaire de l'étoile au moment de la conjonction vraie.

On déterminera ensuite approximativement l'intervalle de temps τ qui sépare la conjonction vraie T de la conjonction apparente dans le lieu considéré, au moyen de l'expression

$$\tau = \frac{\mathrm{A}}{\mu f - \mathrm{B}}$$

(Table XVI).

Le temps moyen approché de la conjonction apparente dans le lieu et l'angle horaire (h) qui lui correspond seront alors :

$$\begin{aligned} \text{Temps moyen de la conjonction appar.} &= \mathrm{T} + \tau + \mathcal{L}, \\ (h) &= h + \mathcal{L} + \tau_1, \end{aligned}$$

τ_1 désignant la valeur en arc de l'intervalle τ préalablement converti en temps sidéral. On calculera ensuite (p), (q) à l'aide des relations

$$\begin{aligned} (p) &= p'\tau, \\ (q) &= q + q'\tau, \end{aligned}$$

et u, u', v, v' par les formules

$$\begin{aligned} u &= a, \\ u' &= b\lambda, \quad \log\lambda = 9.41916, \\ v &= c - b\sin\mathrm{D}, \\ v' &= a\lambda\sin\mathrm{D}, \end{aligned}$$

où a, b, c ont les valeurs suivantes :

$$a = r\cos\varphi'\sin(h),\quad b = r\cos\varphi'\cos(h),\quad c = r\sin\varphi'\cos D;$$

avec les valeurs de u, u', v, v' et celles de (p), (q), p', q', on procédera, comme il suit, au calcul de l'occultation.

On cherchera d'abord les valeurs de M et N, m et n par les relations

$$\begin{aligned} m\sin M &= (p) - u,\\ m\cos M &= (q) - v,\\ n\sin N &= p' - u',\\ n\cos N &= q' - v', \end{aligned}$$

dans lesquelles m et n devront être pris positivement, ce qui déterminera complètement les arcs M et N; puis on calculera l'angle $\psi < 180^\circ$ par la formule

$$\cos\psi = \frac{m}{k}\sin(M - N) \quad \text{avec} \quad \log k = 9,43609.$$

On aura alors, pour les intervalles de temps t_i, t_e compris entre l'époque $T + \tau + \mathfrak{L}$ et les instants de l'immersion et de l'émersion,

$$t_i = -3600\,\frac{m}{n}\cos(M - N) - 3600\,\frac{k}{n}\sin\psi \quad \text{pour l'immersion},$$

$$t_e = -3600\,\frac{m}{n}\cos(M - N) + 3600\,\frac{k}{n}\sin\psi \quad \text{pour l'émersion}.$$

t_i et t_e sont exprimés en secondes de temps.

On conclura de là, pour le temps de l'immersion I et pour celui de l'émersion E,

$$\begin{aligned} I &= T + \tau + \mathfrak{L} + t_i,\\ E &= T + \tau + \mathfrak{L} + t_e. \end{aligned}$$

Enfin, on aura pour l'*angle-pôle*

$$\begin{aligned} P &= 270^\circ - (N + \psi) \quad \text{pour l'immersion},\\ P' &= 270^\circ - (N - \psi) \quad \text{pour l'émersion}, \end{aligned}$$

et, pour l'*angle-zénith*,

$$Q = P + \mathfrak{L},\quad \operatorname{tang}\mathfrak{L} = \frac{\sin h}{\operatorname{tang}\varphi\cos D - \sin D\cos h} \quad \text{(Table XVIII)}.$$

Remarque. — S'il arrivait que

$$\cos\psi \quad \text{ou} \quad \frac{m}{k}\sin(M-N)$$

fût plus grand que 1, il n'y aurait pas occultation, mais seulement *appulse.*

3° *Cas où l'astre occulté est une planète.* — Dans ce cas, on doit remplacer, dans les formules précédentes,

$$k \text{ par } k \pm \frac{\sigma}{\varpi} \quad \text{et} \quad \lambda \text{ par } \lambda - 0{,}0000727\,\mu',$$

expression dans lesquelles

σ désigne le demi-diamètre de la planète;
ϖ la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune, moins celle de la planète;
μ' le mouvement horaire de la planète en ascension droite exprimée en secondes de temps : *positif* si le mouvement est *direct; négatif* s'il est *rétrograde.*

Quant au double signe qui affecte $\frac{\sigma}{\varpi}$, on peut remarquer que le signe + se rapporte à l'immersion du 1^er^ bord et à l'émersion du 2^e^, et le signe — à l'immersion du 2^e^ bord et à l'émersion du 1^er^.

Il faut ensuite appliquer à la valeur de l'angle horaire (h) donnée ci-dessus la variation $-15\mu\tau$ que subit l'ascension droite pendant l'intervalle τ_1, laquelle devient ainsi

$$(h) = \underset{\cdot}{h} + \mathcal{L} + \tau_1 - 15\mu\tau.$$

4° *Limites en latitude.* — Limites nord et sud : α_1 et D_1 ayant été obtenus pour le temps de la conjonction vraie, on a, en adoptant les notations du § XV, et posant $\frac{\delta}{P} = 0{,}2729$,

$$\tan g\, i = \frac{D_1}{\alpha_1 \cos \textcircled{D}}, \quad n = \delta \cos i, \quad \cos W_1 = \mp \frac{n}{P} - 0{,}2729,$$

$$\sin\theta = \cos \textcircled{D} \cos i, \quad \cos W_2 = \mp \frac{n}{P} + 0{,}2729,$$

$$l_1 = W_1 - \theta, \quad \sin l_2 = \mp \cos \textcircled{D} \cos(W_2 - i),$$

expressions dans lesquelles les angles W_1, W_2, i et θ doivent avoir le même signe que $\textcircled{D}$, et où l'on doit convenir de prendre le signe supérieur quand $\mathcal{L}$ est *positif*, et le signe inférieur quand $\mathcal{L}$ est *négatif*.

On peut remarquer que, lorsque

$$\left.\begin{matrix} W_1 \\ W_2 \end{matrix}\right\} \text{est imaginaire}\ldots \left\{\begin{matrix} l_1 = 90^\circ \text{ et est de même nom que } \mathcal{L}, \\ l_2 = 90^\circ - \mathcal{L} \text{ et est de nom différent avec } \mathcal{L}. \end{matrix}\right.$$

On a ensuite, pour déterminer la position de points où se font, sur le disque de la Lune, l'immersion et l'émersion :

Position directe.

A l'immersion : angle de position $= (180^\circ - i) - \omega$.
A l'émersion : angle de position $= (180^\circ - i) + \omega$.

Position inverse.

A l'immersion : angle de position $= (-i) - \omega$.
A l'émersion : angle de position $= (-i) + \omega$.

Tous ces angles sont comptés du *Nord* vers l'*Est*.

XI. — Prédiction des marées.

1° *Formules de Laplace. — Heure de la pleine mer.* — Soient

p l'heure du passage de la Lune au méridien du lieu;
H l'heure de la pleine mer qui suit ce passage;
$\left.\begin{matrix}\delta \\ \delta'\end{matrix}\right\}$ les demi-diamètres apparents du Soleil et de la Lune, 36 heures avant l'heure p;
$\left.\begin{matrix}v \\ v'\end{matrix}\right\}$ les déclinaisons de ces astres au même instant;
$\left.\begin{matrix}\psi \\ \psi'\end{matrix}\right\}$ leurs ascensions droites.

En posant

$$\psi - \psi' = \alpha, \quad A = 3{,}06\,\frac{\delta'^3}{\delta^3}\,\frac{\cos^2 v'}{\cos^2 v}, \quad C = \frac{1}{30}\,\text{arc tang}\,\frac{\sin 2\alpha}{A + \cos 2\alpha},$$

et, désignant par E l'heure de l'*établissement du port*, on a

$$H = p + C + E - 19^{\text{m}}.$$

3° *Détermination numérique des quantités* p, α, C, E, *qui* *entrent dans cette formule. — a. Calcul de l'heure p.* — On peut, sans erreur sensible, déduire cette heure de celle p' du passage de la Lune au méridien de Paris, telle qu'on la donne dans la *Connaissance des Temps,* en la corrigeant à raison de $2^{\mathrm{m}},1$ par heure de différence en longitude. Toutefois, comme dans tous nos ports de France, cette correction n'atteint pas une minute, on peut la négliger dans le calcul de l'heure des marées et prendre, pour le passage de la Lune au méridien d'un port quelconque, la même heure qu'à Paris.

b. Calcul de $\psi - \psi' = \alpha$. — Soient D la différence entre les heures du passage de la Lune au méridien de Paris, la veille et l'avant-veille du jour donné, et p' l'heure du passage de la Lune au méridien du lieu l'avant-veille, on a

$$\alpha = p' + 0,55\,\mathrm{D}.$$

Cette différence étant exprimée en temps moyen, on doit, pour l'obtenir en temps vrai, en retrancher le temps moyen à midi vrai.

c. Calcul de C *et de* E. — Les valeurs de C sont données par les Tables I et II, que publie toutes les années l'*Annuaire du Bureau des Longitudes.* Quant à la valeur de E, elle est donnée dans le même Recueil par la Table III, et pour les principaux ports des côtes de l'Europe.

4° *Hauteur de la pleine mer à l'époque des syzygies.* — Les plus grandes marées ont lieu à l'époque des syzygies, c'est-à-dire lorsque la Lune est pleine ou nouvelle; mais elles ne sont pas toutes également fortes, parce que les marées partielles dont elles résultent varient avec les déclinaisons du Soleil et de la Lune, et aussi avec les distances de ces astres à la Terre. Soient

v, v' les déclinaisons respectives du Soleil et de la Lune à l'instant de la syzygie;

i le rapport de la moyenne distance du Soleil à sa distance actuelle;

i' la parallaxe horizontale actuelle de la Lune divisée par sa valeur moyenne $57'',1$.

On a, pour la hauteur $\mathfrak{H}$ de la pleine mer à l'époque d'une syzygie,

$$\mathfrak{H} = \frac{40}{163}\left(i^3 \cos^2 v + 3\,i'^3 \cos^2 v'\right),$$

i et i' se rapportant, comme v et v', au moment de la syzygie.

XII. — Prédiction des passages de Vénus et de Mercure sur le disque du Soleil.

1° *Prédiction pour le centre de la Terre.* — Soient, pour un temps t, voisin de l'époque de la conjonction ou même coïncidant avec la conjonction,

α l'ascension droite de la planète;
δ sa déclinaison;
A l'ascension droite du Soleil;
D sa déclinaison;
Δ la distance vraie du centre des deux astres;
R et ρ leurs demi-diamètres apparents.

Après avoir calculé M, N, n et ψ par les formules suivantes :

$$\Delta \sin M = (\alpha - A)\cos\tfrac{1}{2}(\delta + D), \qquad \Delta \cos M = (\delta - D),$$

$$n \sin N = \frac{d(\alpha - A)}{dt}\cos\tfrac{1}{2}(\delta + D), \qquad n \cos N = \frac{d(\delta - D)}{dt},$$

$$\sin\psi = \frac{\Delta \sin(M - N)}{R \pm \rho},$$

on aura

$$\tau = -\frac{\Delta}{n}\cos(M - N) - \frac{R \pm \rho}{n}\cos\psi,$$

$$\tau' = -\frac{\Delta}{n}\cos(M - N) + \frac{R \pm \rho}{n}\cos\psi;$$

on aura par suite

$$\mathfrak{T} = t + \tau, \quad S = N - \psi + 180^\circ \text{ pour l'entrée,}$$

$$\mathfrak{T}' = t + \tau', \quad S = N + \psi \text{ pour la sortie.}$$

2° *Prédiction pour un lieu déterminé de la surface terrestre.* — Soient

$\mathcal{L}$ la longitude *orientale* du lieu considéré;
φ sa latitude;
H et π les parallaxes horizontales de la planète et du Soleil;
μ' le temps sidéral correspondant à l'époque T ou T';
f, s, β, λ des variables auxiliaires.

On aura

$$f \sin s = H \cos(R \pm \rho) - \pi,$$

$$f \cos s = -H \sin(R \pm \rho),$$

puis

$$\begin{aligned} \sin(\lambda - A)\cos\beta &= \sin s \sin S,\\ \cos(\lambda - A)\cos\beta &= \cos s \cos D - \sin s \sin D \cos S,\\ \sin\beta &= \cos s \sin D + \sin s \cos D \cos S, \end{aligned}$$

et, en outre,

$$\cos\zeta = \sin\varphi \sin\beta + \cos\varphi \cos\beta \cos(\Lambda - \mathcal{L}), \quad (\Lambda = \lambda - \mu').$$

Les époques de l'entrée et de la sortie seront alors données, en temps moyen du lieu, par les formules suivantes :

$$T_e = \mathfrak{T} + \mathcal{L} - \frac{f\cos\zeta}{n\cos\psi} \text{ pour l'entrée,}$$

$$T_s = \mathfrak{T}' + \mathcal{L} + \frac{f\cos\zeta'}{n\cos\psi} \text{ pour la sortie;}$$

$\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ sont les époques de l'entrée et de la sortie calculées pour le centre de la Terre.

En posant

$$\frac{f}{n\cos\psi} = g,$$

puis

$$\begin{aligned} g\sin\beta &= A, & g\cos\beta\cos\Lambda &= B, & g\cos\beta\sin\Lambda &= C,\\ g\sin\beta' &= A', & g\cos\beta'\cos\Lambda' &= B', & g\cos\beta'\sin\Lambda' &= C', \end{aligned}$$

on a aussi

$$\begin{aligned} T_e &= \mathfrak{T} - A\sin\varphi - B\cos\varphi\cos\mathcal{L} - C\cos\varphi\sin\mathcal{L} + \mathcal{L},\\ T_s &= \mathfrak{T}' + A'\sin\varphi + B'\cos\varphi\cos\mathcal{L} + C'\cos\varphi\sin\mathcal{L} + \mathcal{L}. \end{aligned}$$

C'est sous cette forme que les valeurs de T_e et de T_s sont données dans les *Éphémérides*.

XIII. — Prédiction des phénomènes relatifs aux apparences de l'anneau de Saturne.

1° *Détermination des éléments qui fixent la position de l'anneau.* — Soient

☊ la longitude moyenne du nœud ascendant de l'anneau sur l'écliptique;
N la longitude moyenne du nœud ascendant de l'anneau sur l'équateur;
i l'inclinaison moyenne du plan de l'anneau sur l'écliptique;
I l'inclinaison moyenne du plan de l'anneau sur l'équateur;

ω l'obliquité de l'écliptique;
α l'ascension droite géocentrique de Saturne;
δ sa déclinaison;
λ la longitude géocentrique de Saturne;
β la latitude géocentrique;
a le grand axe de l'anneau à la moyenne distance de la planète;
Δ la distance de la Terre à Saturne;
r la moyenne distance du Soleil à Saturne;
p l'angle de position de la partie inférieure de l'anneau, c'est-à-dire l'inclinaison du demi-petit axe nord de l'anneau sur le cercle de déclinaison : cet angle est positif à l'*est*, négatif à l'*ouest*;
a' la grandeur apparente du grand axe de l'anneau extérieur;
b' la grandeur apparente du demi-petit axe de cet anneau;
a'', b'' les mêmes angles relativement à l'anneau intérieur;
l, l' les hauteurs de la Terre et du Soleil au-dessus du plan de l'anneau vu de Saturne. Ces angles sont positifs au *nord*, négatifs au *sud*.

On a, pour calculer les éléments p, a', b', a'', b'', l, l' qui fixent la position de l'anneau,

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} i \cos ☊, \qquad \operatorname{tang} Q = \operatorname{tang} I \sin(\alpha - N),$$

$$\operatorname{tang} I = \frac{\operatorname{tang}(\varphi + \omega)}{\cos N}, \qquad \operatorname{tang} l = \operatorname{tang}(Q - \delta)\cos p,$$

$$\operatorname{tang} N = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \omega)} \operatorname{tang} ☊, \qquad \operatorname{tang} p = -\frac{\cot(\alpha - N)}{\cos(Q - \delta)} \sin Q;$$

$$a' = \frac{ar}{\Delta}, \quad b' = a' \sin l, \quad \frac{a''}{a'} = 0,665, \quad \frac{b''}{b'} = 0,665;$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin\beta}{\cos\beta \sin(\lambda - ☊)}, \quad \sin l' = \frac{\sin\beta \sin(i - \varphi)}{\sin\rho},$$

relations dans lesquelles

$$☊ = 166^\circ 53'\ 8'',9 + 46''462(t - 1800),$$
$$i = 28^\circ 10' 44'',7 - 0''350(t - 1800),$$
$$\log ar = 2,57416.$$

Vérification :

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \omega)} = \frac{\sin i \cos ☊}{\cos N \sin I},$$

$$\frac{\sin Q}{\cos(Q - \delta)} = \frac{\sin I \sin(\alpha - N)}{\cos l \cos p}.$$

2° *Disparition et réapparition de l'anneau de Saturne.* — Ce phénomène, qui se reproduit deux fois durant la révolution de Saturne, c'est-à-dire à des intervalles de 15 ans, peut avoir lieu de trois manières différentes :

1° Lorsque le plan de l'anneau passe par le centre du Soleil, car alors l'anneau n'est plus éclairé que par sa tranche dont l'épaisseur est trop petite pour nous rendre perceptible la lumière qu'elle réfléchit ;

2° Lorsque le plan de l'anneau passe par l'œil de l'observateur, puisqu'il ne voit alors l'anneau que par son épaisseur;

3° Enfin lorsque le plan de l'anneau passe entre le Soleil et la Terre, car alors la surface éclairée n'est pas tournée vers nous et devient par conséquent invisible.

CINQUIÈME PARTIE.

TABLES NUMÉRIQUES

DESTINÉES

A FACILITER LE CALCUL DES ÉPHÉMÉRIDES.

TABLE IX.

VALEUR DU LOG. DU RAYON DE LA TERRE.

Argument : latitude géoc. *l*.

l	log ρ	*l*	log ρ	*l*	log ρ
0°	0,00000	30°	9,99964	60°	9,99893
1	0,00000	31	9,99962	61	9,99891
2	0,00000	32	9,99960	62	9,99889
3	0,00000	33	9,99958	63	9,99887
4	9,99999	34	9,99955	64	9,99885
5	9,99999	35	9,99953	65	9,99883
6	9,99998	36	9,99951	66	9,99881
7	9,99998	37	9,99948	67	9,99879
8	9,99997	38	9,99946	68	9,99877
9	9,99997	39	9,99943	69	9,99876
10	9,99996	40	9,99941	70	9,99874
11	9,99995	41	9,99938	71	9,99872
12	9,99994	42	9,99936	72	9,99871
13	9,99993	43	9,99934	73	9,99870
14	9,99992	44	9,99931	74	9,99868
15	9,99990	45	9,99929	75	9,99867
16	9,99989	46	9,99926	76	9,99866
17	9,99988	47	9,99924	77	9,99865
18	9,99986	48	9,99921	78	9,99864
19	9,99985	49	9,99919	79	9,99863
20	9,99983	50	9,99916	80	9,99862
21	9,99982	51	9,99914	81	9,99861
22	9,99980	52	9,99911	82	9,99860
23	9,99978	53	9,99909	83	9,94859
24	9,99976	54	9,99907	84	9,99859
25	9,99974	55	9,99904	85	9,99858
26	9,99973	56	9,99902	86	9,99858
27	9,99971	57	9,99900	87	9,99858
28	9,99968	58	9,99897	88	9,99858
29	9,99966	59	9,99895	89	9,99857
30	9,99964	60	9,99893	90	9,99857

TABLE X.

VALEURS DE (D) — D OU DE α *correct.*

Argument horizontal α.

ARGUMENT vertical D	10′	20′	30′	40′	50′	60′	70′	80′	90′	100′
0°	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2
2	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3
3	0	0	0	1	1	2	2	3	4	5
4	0	0	1	1	2	2	3	4	5	6
5	0	0	1	1	2	3	4	5	6	8
6	0	0	1	1	2	3	4	6	7	9
7	0	0	1	2	3	4	5	7	9	11
8	0	0	1	2	3	4	6	8	10	12
9	0	1	1	2	3	5	7	9	11	13
10	0	1	1	2	4	5	7	10	12	15
11	0	1	1	3	4	6	8	10	13	16
12	0	1	2	3	4	6	9	11	14	18
13	0	1	2	3	5	7	9	12	15	19
14	0	1	2	3	5	7	10	13	17	20
15	0	1	2	3	5	8	11	14	18	22
16	0	1	2	4	6	8	11	15	19	23
17	0	1	2	4	6	9	12	16	20	24
18	0	1	2	4	6	9	13	16	21	26
19	0	1	2	4	7	10	13	17	22	27
20	0	1	3	4	7	10	14	18	23	28
21	0	1	3	5	7	11	14	19	24	29
22	0	1	3	5	8	11	15	19	25	30
23	0	1	3	5	8	11	15	20	25	31
24	0	1	3	5	8	12	16	21	26	32
25	0	1	3	5	8	12	16	21	27	33
26	0	1	3	6	9	12	17	22	28	34
27	0	1	3	6	9	13	17	23	29	35
28	0	1	3	6	9	13	18	23	29	36
29	0	1	3	6	9	13	18	24	30	37

TABLE XI.

AUGMENTATION DU DEMI-DIAMÈTRE DE LA LUNE.

Argument : distance zénithale vraie Z.

Z	POUR P = 54′.	VARIATION pour 10′ dans P.	Z	POUR P = 54′.	VARIATION pour 10′ dans P.	Z	POUR P = 54′.	VARIATION pour 10′ dans P.
°	″	″	°	′	″	°	″	″
0	14,0	5,7	30	12,1	4,9	60	6,9	2,9
1	14,0	5,7	31	12,0	4,8	61	6,7	2,8
2	14,0	5,7	32	11,9	4,8	62	6,5	2,7
3	14,0	5,7	33	11,7	4,7	63	6,2	2,6
4	14,0	5,7	34	11,6	4,7	64	6,0	2,5
5	13,9	5,7	35	11,5	4,7	65	5,8	2,4
6	13,9	5,7	36	11,3	4,6	66	5,6	2,3
7	13,9	5,7	37	11,2	4,6	67	5,4	2,2
8	13,8	5,7	38	11,0	4,5	68	5,2	2,1
9	13,8	5,7	39	10,8	4,4	69	4,9	2,0
10	13,8	5,6	40	10,7	4,4	70	4,7	1,9
11	13,7	5,6	41	10,5	4,3	71	4,5	1,8
12	13,7	5,6	42	10,3	4,3	72	4,2	1,7
13	13,6	5,6	43	10,2	4,2	73	4,0	1,6
14	13,6	5,5	44	10,0	4,1	74	3,8	1,5
15	13,5	5,5	45	9,8	4,1	75	3,5	1,4
16	13,4	5,5	46	9,7	4,0	76	3,3	1,3
17	13,4	5,4	47	9,5	3,9	77	3,1	1,2
18	13,3	5,4	48	9,3	3,9	78	2,8	1,1
19	13,2	5,4	49	9,2	3,8	79	2,6	1,1
20	13,1	5,4	50	9,0	3,7	80	2,4	1,0
21	13,0	5,4	51	8,8	3,6	81	2,1	0,9
22	12,9	5,3	52	8,6	3,5	82	1,9	0,8
23	12,8	5,3	53	8,4	3,4	83	1,7	0,7
24	12,7	5,3	54	8,2	3,3	84	1,4	0,6
25	12,6	5,2	55	8,0	3,2	85	1,2	0,5
26	12,5	5,1	56	7,8	3,2	86	1,0	0,4
27	12,4	5,1	57	7,5	3,1	87	0,7	0,3
28	12,3	5,0	58	7,3	3,1	88	0,5	0,2
29	12,2	4,9	59	7,1	3,0	89	0,3	0,1
30	12,1	4,9	60	6,9	2,9	90	0,0	0,0

TABLE XII.

RÉDUCTION DES LATITUDES GÉOCENTRIQUES EN LATITUDES GÉOGRAPHIQUES OU INVERSEMENT.

l latit. géogr., *l′* latit. géocentr.; argument : *l* ou *l′*.

l ou *l′*	*l* — *l′*	*l* ou *l′*	*l* — *l′*	*l* ou *l′*	*l* — *l′*
0°	0′. 0″	30°	9′,57″	60°	9′.59″
1	0.24	31	10. 9	61	9.47
2	0.48	32	10.20	62	9.34
3	1.12	33	10.30	63	9.20
4	1.36	34	10.40	64	9. 6
5	2.00	35	10.49	65	8.50
6	2.23	36	10.56	66	8.35
7	2.47	37	11. 4	67	8.18
8	3.10	38	11.10	68	8. 1
9	3.33	39	11.15	69	7.43
10	3.56	40	11.20	70	7.25
11	4.18	41	11.24	71	7. 7
12	4.40	42	11.27	72	6.47
13	5. 2	43	11.29	73	6.28
14	5.23	44	11.30	74	6. 7
15	5.45	45	11.31	75	5.47
16	6. 5	46	11.31	76	5.25
17	6.25	47	11.29	77	5. 4
18	6.45	48	11.27	78	4.41
19	7. 4	49	11.24	79	4.20
20	7.23	50	11.21	80	3.57
21	7.41	51	11.16	81	3.34
22	7.59	52	11.11	82	3.11
23	8.16	53	11. 5	83	2.48
24	8.32	54	10.58	84	2.24
25	8.48	55	10.40	85	2. 1
26	9. 3	56	10.41	86	1.37
27	9.18	57	10.32	87	1.13
28	9.32	58	10.12	88	0.49
29	9.45	59	10.11	89	0.24
30	9.57	60	9.59	90	0. 0

TABLE XIII.

CALCUL DES OCCULTATIONS [1].

Argument horiz. : $\pi_{☾} - \pi_{\star}$; argument vert. : $\alpha_{☾} - A_{\star}$.

$\alpha_{☾} - A_{\star}$	$\pi_{☾} - \pi_{\star} = 54^m$	$\pi_{☾} - \pi_{\star} = 58^m$	$\pi_{☾} - \pi_{\star} = 62^m$	DIFFÉRENCE.
0	1,176 109,1	1,176 111,9	1,176 114,8	— 0
10	109,1	111,8	114,7	1
20	109,0	111,7	114,6	2
30	108,8	111,5	114,5	3
40	108,5	111,3	114,2	3
50	108,2	110,9	113,8	4
60	107,7	110,5	113,4	5
70	107,2	110,0	112,9	6
80	106,7	109,4	112,4	7
90	106,0	108,8	111,7	— 7
100	1,176 105,3	1,176 108,0	1,176 111,0	— 8
110	104,5	107,2	110,2	9
120	103,6	106,4	109,3	10
130	102,7	105,4	108,3	10
140	101,6	104,4	107,3	11
150	100,5	103,3	106,2	12
160	099,3	102,1	105,0	13
170	098,1	100,8	103,7	13
180	096,7	099,5	102,4	14
190	095,3	098,1	101,0	—15
200	1,176 093,8	1,176 096,6	1,176 099,5	—16
210	092,2	095,0	097,9	17
220	090,6	093,3	096,3	17
230	088,9	091,6	094,6	18
240	087,1	089,8	092,8	19
250	085,2	087,9	090,9	20
260	083,2	086,0	088,9	20
270	081,2	084,0	086,9	21
280	079,1	081,9	084,8	22
290	076,9	079,7	082,6	—23
300	1,176 074,7	1,176 077,4	1,176 080,3	—23
310	072,3	075,1	078,0	24
320	069,9	072,7	075,6	25

---

(1) Cette Table et les deux suivantes sont dues à M. L. Schulhof.

TABLE XIII. (Suite.)

CALCUL DES OCCULTATIONS.

Argument horiz. : $\pi_{☾} - \pi_{\star}$; argument vert. : $\alpha_{☾} - A_{\star}$.

$\alpha_{☾} - A_{\star}$	$\pi_{☾} - \pi_{\star} = 54^m$	$\pi_{☾} - \pi_{\star} = 58^m$	$\pi_{☾} - \pi_{\star} = 62^m$	DIFFÉRENCE.
330^s	1,176 067,4	1,176 070,2	1,176 073,1	26
340	064,9	067,6	070,5	26
350	062,2	065,0	067,9	27
360	059,5	062,3	065,2	28
370	056,8	059,5	062,4	29
380	053,8	056,6	059,5	30
390	050,9	053,6	056,6	—30
400	1,176 047,9	1,176 050,6	1,176 053,6	—31
410	044,8	047,5	050,5	—32
420	1,176 041,6	1,176 044,3	1,176 047,3	

TABLE XIV.

CALCUL DES OCCULTATIONS.

Argum.: $\pi_{☾} - \pi_{\star}$.

	PARTIE PROPORTIONNELLE.		PARTIE PROPORTIONNELLE.
54′.30″...............	+ 3	58′.30″...............	4
55. 0...............	7	59. 0...............	7
55.30...............	1,0	59.30...............	1,1
56. 0...............	1,4	60. 0...............	1,5
56.30...............	1,7	60.30...............	1,8
57. 0...............	2,1	61. 0...............	2,2
57.30...............	+ 2,4	61.30...............	+ 2,5

Constantes.

5,560650
5,560640
5,560636
5,560640
5,560650

TABLE XV.

CALCUL DES OCCULTATIONS.

Argument horizontal : $\pi_{☾} - \pi_{\bigstar}$; argument vertical : $\delta_{☾} - D_{\bigstar}$.

$\delta_{☾} - D_{\bigstar}$	$\pi_{☾} - \pi_{\bigstar} = 54'$	$\pi_{☾} - \pi_{\bigstar} = 58'$	$\pi_{☾} - \pi_{\bigstar} = 62'$	DIFFÉRENCE.
s 0	+ 17″,9	+ 20″,6	+ 23″,5	+ 0
100	17,8	20,6	23,5	0
200	17,8	20,5	23,5	1
300	17,7	20,5	23,4	1
400	17,6	20,3	23,3	2
500	17,4	20,2	23,1	2
600	17,2	20,0	22,9	2
700	17,0	19,8	22,7	2
800	17,8	19,5	22,5	3
900	+ 16,5	+ 19,2	+ 22,2	− 4
1000	+ 16,2	+ 18,9	+ 21,8	− 3
1100	15,8	18,6	21,5	4
1200	15,4	18,2	21,1	4
1300	15,0	17,7	20,7	5
1400	14,5	17,3	20,2	5
1500	14,0	16,8	19,7	5
1600	13,5	16,3	19,2	6
1700	12,9	15,7	18,6	6
1800	12,3	15,1	18,0	6
1900	+ 11,7	+ 14,5	+ 17,4	− 7
2000	+ 11,1	+ 13,8	+ 16,7	− 7
2100	10,4	13,1	16,0	7
2200	9,6	12,4	15,3	8
2300	8,9	11,6	14,5	8
2400	8,1	10,8	13,7	8
2500	7,2	10,0	12,9	9
2600	6,4	9,1	12,0	9
2700	5,5	8,2	11,1	9
2800	4,5	7,3	10,2	10
2900	+ 3,6	+ 6,3	+ 9,2	− 10

TABLE XV (Suite).

CALCUL DES OCCULTATIONS.

Argument horizontal : $\pi_{☾} - \pi_{\star}$; argument vertical : $\delta_{☾} - D_{\star}$.

$\delta_{☾} - D_{\star}$	$\pi_{☾} - \pi_{\star} = 54'$	$\pi_{☾} - \pi_{\star} = 58'$	$\pi_{☾} - \pi_{\star} = 62'$	DIFFÉRENCE.
3000^{s}	+ 2″,5	+ 5″,3	+ 8″,2	−10
3100	1,5	4,3	7,2	11
3200	+ 0,4	3,2	6,1	11
3300	− 0,7	2,1	5,0	11
3400	1,8	+ 0,9	3,9	12
3500	3,0	− 0,2	2,7	12
3600	4,2	1,4	1,5	13
3700	5,4	2,7	+ 0,3	12
3800	6,7	4,0	− 1,0	13
3900	− 8,0	− 5,3	− 2,3	−14
4000	− 9,4	− 6,6	− 3,7	−14
4100	10,7	8,0	5,1	14
4200	12,2	9,4	6,5	14
4300	13,6	10,9	7,9	15
4400	15,1	12,3	9,4	15
4500	16,6	13,9	10,9	16
4600	18,1	15,4	12,5	16
4700	19,7	17,0	14,1	16
4800	21,3	18,6	15,7	16
4900	− 23,0	− 20,2	− 17,3	−17
5000	− 24,7	− 21,9	− 19,0	−17
5100	26,4	23,7	20,7	18
5200	28,2	25,4	22,5	18
5300	29,9	27,2	24,3	18
5400	31,8	29,0	26,1	18
5500	33,6	30,9	27,9	19
5600	35,5	32,8	29,8	19
5700	37,4	34,7	31,7	20
5800	39,4	36,6	33,7	20
5900	41,4	38,6	35,7	−20
6000	− 43,4	− 40,6	− 37,7	

TABLE XVI.

TRANSFORMATION DU TEMPS MOYEN DE LA CONJONCTION VRAIE EN ASCENSION DROITE EN TEMPS MOYEN DE LA CONJONCTION APPARENTE.

ARGUMENT ± h.		A.	B.	ARGUMENT ± h.		A.	B.
h m	h m			h m	h m		
0. 0	12. 0	0	26	3. 0	9. 0	71	19
0.10	11.50	4	26	3.10	8.50	74	18
0.20	11.40	9	26	3.20	8.40	77	17
0.30	11.30	13	26	3.30	8.30	79	16
0.40	11.20	17	26	3.40	8.20	82	15
0.50	11.10	22	26	3.50	8.10	84	14
1. 0	11. 0	26	25	4. 0	8. 0	87	13
1.10	10.50	30	25	4.10	7.50	89	12
1.20	10.40	34	25	4.20	7.40	91	11
1.30	10.30	38	24	4.30	7.30	92	10
1.40	10.20	42	24	4.40	7.20	94	9
1.50	10.10	46	23	4.50	7.10	95	8
2. 0	10. 0	50	23	5. 0	7. 0	97	7
2.10	9.50	54	22	5.10	6.50	98	5
2.20	9.40	57	21	5.20	6.40	98	4
2.30	9.30	61	21	5.30	6.30	99	3
2.40	9.20	64	20	5.40	6.20	100	2
2.50	9.10	68	19	5.50	6.10	100	1
3. 0	9. 0	71	19	6. 0	6. 0	100	0

A est toujours de même signe que h. B est *positif* quand $h < 6^h$ et *négatif* quand $h > 6^h$.

TABLE XVII.

FACTEURS D'INTERPOLATION.

n	$-\Delta'$	$+\Delta''$	n	$-\Delta'$	$+\Delta''$	n	$-\Delta'$	$+\Delta''$
1	0,005	0,003	34	0,112	0,062	67	0,111	0,049
2	0,010	0,007	35	0,114	0,063	68	0,109	0,048
3	0,015	0,010	36	0,115	0,063	69	0,107	0,047
4	0,019	0,013	37	0,117	0,063	70	0,105	0,046
5	0,024	0,016	38	0,118	0,064	71	0,103	0,044
6	0,028	0,018	39	0,119	0,064	72	0,101	0,043
7	0,033	0,021	40	0,120	0,064	73	0,099	0,042
8	0,037	0,024	41	0,121	0,064	74	0,096	0,040
9	0,041	0,026	42	0,122	0,064	75	0,094	0,039
10	0,045	0,029	43	0,123	0,064	76	0,091	0,038
11	0,049	0,031	44	0,123	0,064	77	0,089	0,036
12	0,053	0,033	45	0,124	0,064	78	0,086	0,035
13	0,057	0,035	46	0,124	0,064	79	0,083	0,034
14	0,060	0,037	47	0,125	0,063	80	0,080	0,032
15	0,064	0,039	48	0,125	0,063	81	0,077	0,031
16	0,067	0,041	49	0,125	0,063	82	0,074	0,029
17	0,071	0,043	50	0,125	0,063	83	0,071	0,027
18	0,074	0,045	51	0,125	0,062	84	0,067	0,026
19	0,077	0,046	52	0,125	0,062	85	0,064	0,025
20	0,080	0,048	53	0,125	0,061	86	0,060	0,023
21	0,083	0,050	54	0,124	0,060	87	0,057	0,021
22	0,086	0,051	55	0,124	0,060	88	0,053	0,020
23	0,089	0,052	56	0,123	0,059	89	0,049	0,018
24	0,091	0,053	57	0,123	0,058	90	0,045	0,017
25	0,094	0,055	58	0,122	0,058	91	0,041	0,015
26	0,096	0,056	59	0,121	0,057	92	0,037	0,013
27	0,099	0,057	60	0,120	0,056	93	0,033	0,012
28	0,101	0,058	61	0,119	0,055	94	0,028	0,010
29	0,103	0,059	62	0,118	0,054	95	0,024	0,008
30	0,105	0,060	63	0,117	0,053	96	0,019	0,007
31	0,107	0,060	64	0,115	0,052	97	0,015	0,005
32	0,109	0,061	65	0,114	0,051	98	0,010	0,003
33	0,111	0,062	66	0,112	0,050	99	0,005	0,002

TABLE XVIII.

ANGLE PARALLACTIQUE POUR LA LATITUDE DE PARIS.

Argument vertical : déclinaison nord; argument horizontal : angle horaire *h*.

DÉCLINAISON NORD.	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°
0°	0°	8°.7	16°.8	23°.8	29°.5	34°.0	37°.3	39°.6	40°.9	41°.4	40°.9	39°.6	37°.3
1	0	8.8	17.0	24.0	29.8	34.3	37.5	39.7	41.0	41.4	40.8	39.5	37.1
2	0	9.0	17.2	24.3	30.1	34.5	37.8	39.9	41.1	41.4	40.8	39.3	36.9
3	0	9.1	17.5	24.7	30.4	34.8	38.0	40.1	41.2	41.4	40.7	39.2	36.7
4	0	9.3	17.8	25.0	30.8	35.1	38.3	40.3	41.3	41.4	40.7	39.1	36.5
5	0	9.4	18.0	25.3	31.1	35.5	38.5	40.5	41.4	41.5	40.6	39.0	36.4
6	0	9.6	18.3	25.7	31.5	35.8	38.8	40.7	41.5	41.5	40.6	38.9	36.2
7	0	9.8	18.7	26.1	31.9	36.1	39.1	40.9	41.7	41.6	40.6	38.8	36.1
8	0	10.0	19.0	26.5	32.3	36.5	39.4	41.1	41.8	41.6	40.6	38.7	35.9
9	0	10.2	19.3	26.9	32.6	36.9	39.7	41.3	42.0	41.7	40.6	38.6	35.8
10	0	10.4	19.7	27.3	33.1	37.3	40.0	41.6	42.1	41.8	40.6	38.6	35.7
11	0	10,6	20.1	27.8	33.6	37.7	40.3	41.8	42.3	41.9	40.6	38.5	35.6
12	0	10.8	20.5	28.2	34.0	38.1	40.7	42.1	42.5	42.0	40.6	38.5	35.5
13	0	11.1	20.9	28.7	34.5	38.5	40.1	42.4	42.7	42.1	40.7	38.4	35.4
14	0	11.4	21.3	29.2	35.0	39.0	41,4	42.7	42.9	42.2	40.7	38.4	35.3
15	0	11.6	21.8	29.8	35.6	39.4	41.8	43.0	43.1	42.3	40.8	38.4	35.2
16	0	11.9	22.3	30.4	36.1	39.9	42.2	43.3	43.3	42.5	40.8	38.4	35.2
17	0	12.3	22.8	31.0	36.7	40.4	42.6	43.6	43.6	42.6	40.9	38.4	35.1
18	0	12.6	23.4	31.6	37.3	41.0	43.1	43.9	43.8	42.8	41.0	38.4	35.0
19	0	13.0	24.0	32.3	37.9	41.5	43.5	44.3	44.1	43.0	41.1	38.4	35.0
20	0	13.4	26.6	33.0	38.6	42.1	44.0	44.7	44.3	43.1	41.1	38.4	35.0
21	0	13.8	25.3	33.7	39.3	42.7	44.5	45.0	44.6	43.3	41.3	38.5	34.9
22	0	14.2	26.0	34.4	40.0	43.3	45.0	45.4	44.9	43.5	41.4	38.5	34.9
23	0	14.7	26.7	35.3	40.7	43.9	45.5	45.8	45.2	43.7	41.5	38.5	34.9
24	0	15.2	27.5	36.1	41.5	44.6	46.1	46.3	45.5	43.9	41.6	38.6	34.9
25	0	15.8	28.4	37.0	42.3	45.3	46.6	46.7	45.8	44.2	41.8	38.7	34.9
26	0	16.4	29.3	37.9	43.2	46.0	47.2	47.2	46.2	44.4	41.9	38.7	34.9
27	0	17.1	30.3	38.9	44.0	46.8	47.8	47.6	46.5	44.6	42.1	38.8	34.9
28	0	17.8	31.3	40.0	45.0	47.5	48.4	48.1	46.9	44.9	42.2	38.9	35.0
29	0	18.6	32.4	41.1	45.9	48.3	49.1	43.6	47.3	45.2	42.4	39.0	35.0

TABLE XVIII (Suite).

ANGLE PARALLACTIQUE POUR LA LATITUDE DE PARIS.

Argument vertical : déclinaison sud ; argument horizontal : angle horaire *h*.

Déclinaison sud.	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0°	8°.7	16°.8	23°.8	29°.5	34°.0	37°.3	39°.6	40°.9	41°.4
1	0	8.7	16.7	23.6	29.3	33.7	37.0	39.2	40.5	40.9
2	0	8.6	16.6	23.4	29.0	33.4	36.6	38.8	40.1	40.5
3	0	8.6	16.5	23.3	28.8	33.1	36.3	38.4	39.7	40.1
4	0	8.6	16.5	23.2	28.6	32.8	36.0	38.1	39.3	39.7
5	0	8.6	16.4	23.0	28.4	32.6	35.7	37.7	39.0	39.4
6	0	8.6	16.4	22.9	28.2	32.3	35.4	37.4	38.6	39.0
7	0	8.6	16.3	22.8	28.1	32.1	35.1	37.1	38.3	38.7
8	0	8.6	16.3	22.7	27.9	31.9	34.8	36.8	38.0	38.3
9	0	8.6	16.2	22.6	27.7	31.7	34.6	36.5	37.7	38.0
10	0	8.6	16.2	22.5	27.6	31.5	34.3	36.2	37.4	37.7
11	0	8.6	16.2	22.4	27.4	31.3	34.1	36.0	37.1	37.4
12	0	8.6	16.1	22.4	27.3	31.1	33.8	35.7	36.8	37.2
13	0	8.6	16.1	22.3	27.2	30.9	33.6	35.5	36.5	36.9
14	0	8.6	16.1	22.2	27.1	30.7	33.4	35.2	36.3	36.6
15	0	8.6	16.1	22.2	27.0	30.6	33.2	35.0	36.1	36.4
16	0	8.7	16.1	22.1	26.9	30.4	33.1	34.8	35.8	36.2
17	0	8.7	16.1	22.1	26.8	30.3	32.9	34.6	35.6	36.0
18	0	8.7	16.1	22.0	26.7	30.2	32.7	34.4	35.4	35.7
19	0	8.7	16.1	22.0	26.6	30.1	32.6	34.2	35.2	35.5
20	0	8.8	16.1	22.0	26.5	29.9	32.4	34.1	35.0	35.4
21	0	8.8	16.1	22.0	26.5	29.8	32.3	33.9	34.9	35.2
22	0	8.8	16.1	21.9	26.4	29.7	32.2	33.8	34.7	35.0
23	0	8.9	16.2	21.9	26.4	29.7	32.0	33.6	34.5	34.8
24	0	8.9	16.2	21.9	26.3	29.6	31.9	33.5	34.4	34.7
25	0	8.9	16.2	21.9	26.3	29.5	31.8	33.4	34.3	34.6
26	0	9.0	16.3	22.0	26.3	29.4	31.7	33.3	34.1	34.4
27	0	9.0	16.3	20.0	26.2	29.4	31.6	33.1	34.0	34.3
28	0	9.1	16.4	22.0	26.2	29.3	31.6	33.1	33.9	34.2
29	0	9.2	16.4	22.0	26.2	29.3	31.5	33.0	33.8	34.1

TABLE XIX.

ARCS SEMI-DIURNES DU SOLEIL.

DÉCLINAISON boréale.	ARCS semi-diurnes	DÉCLINAISON boréale.	ARCS semi-diurnes.	DÉCLINAISON boréale.	ARCS semi-diurnes.
° ′	h m	° ′	h m	° ′	h m
0. 0	6. 3,4	6. 0	6.31,1	12. 0	6.59,9
10	6. 4,2	10	6.31,9	10	7. 0,7
20	6. 5,0	20	6.32,6	20	7. 1,5
30	6. 5,7	30	6.33,4	30	7. 2,4
40	6. 6,5	40	6.34,2	40	7. 3,2
50	6. 7,2	50	6.35,0	50	7. 4,0
1. 0	6. 8,0	7. 0	6.35,8	13. 0	7. 4,9
10	6. 8,7	10	6.36,5	10	7. 5,7
20	6. 9,5	20	6.37,3	20	7. 6,5
30	6.10,3	30	6.38,1	30	7. 7,4
40	6.11,0	40	6.38,9	40	7. 8,3
50	6.11,8	50	6.39,7	50	7. 9,1
2. 0	6.12,6	8. 0	6.40,5	14. 0	7.10,0
10	6.13,3	10	6.41,3	10	7.10,8
20	6.14,1	20	6.42,1	20	7.11,7
30	6.14,9	30	6.42,9	30	7.12,5
40	6.15,6	40	6.43,7	40	7.13,4
50	6.16,4	50	6.44,5	50	7.14,2
3. 0	6.17,2	9. 0	6.45,3	15. 0	7.15,1
10	6.17,9	10	6.46,1	10	7.16,0
20	6.18,7	20	6.46,9	20	7.16,8
30	6.19,5	30	6.47,7	30	7.17,7
40	6.20,2	40	6.48,5	40	7.18,6
50	6.21,0	50	6.49,3	50	7.19,5
4. 0	6.21,8	10. 0	6.50,1	16. 0	7.20,3
10	6.22,5	10	6.50,9	10	7.21,2
20	6.23,3	20	6.51,7	20	7.22,1
30	6.24,1	30	6.52,5	30	7.23,0
40	6.24,9	40	6.53,3	40	7.23,9
50	6.25,6	50	6.54,1	50	7.24,8
5. 0	6.26,4	11. 0	6.54,9	17. 0	7.25,7
10	6.27,2	10	6.55,8	10	7.26,6
20	6.27,9	20	6.56,6	20	7.27,5
30	6.28,7	30	6.57,4	30	7.28,4
40	6.29,5	40	6.58,2	40	7.29,3
50	6.30,3	50	6.59,1	50	7.30,2
6. 0	6.31,1	12. 0	6.59,9	18. 0	7.31,1

TABLE XIX (Suite).

ARCS SEMI-DIURNES DU SOLEIL.

DÉCLINAISON boréale.	ARCS semi-diurnes.	DÉCLINAISON boréale.	ARCS semi-diurnes.	DÉCLINAISON boréale.	ARCS semi-diurnes.
° ′	h m	° ′	h m	° ′	h m
18. 0	7.31,1	24. 0	8. 6,8	30. 0	8.50,6
10	7.32,1	10	8. 7,9	10	8.52,0
20	7.33,0	20	8. 9,0	20	8.53,4
30	7.33,9	30	8.10,1	30	8.54,8
40	7.34,8	40	8.11,2	40	8.56,3
50	7.35,8	50	8.12,3	50	8.57,7
19. 0	7.36,7	25. 0	8.13,4	31. 0	8.59,2
10	7.37,6	10	8.14,5	10	9. 0,7
20	7.38,6	20	8.15,6	20	9. 2,2
30	7.39,5	30	8.16,8	30	9. 3,7
40	7.40,5	40	8.17,9	40	9. 5,2
50	7.41,4	50	8.19,1	50	9. 6,7
20. 0	7.42,4	26. 0	8.20,2	32. 0	9. 8,3
10	7.43,4	10	8.21,4	10	9. 9,9
20	7.44,3	20	8.22,6	20	9.11,5
30	7.45,3	30	8.23,7	30	9.13,1
40	7.46,3	40	8.24,9	40	9.14,7
50	7.47,3	50	8.26,1	50	9.16,4
21. 0	7.48,3	27. 0	8.27,3	33. 0	9.18,1
10	7.49,2	10	8.28,5	10	9.19,8
20	7.50,2	20	8.29,8	20	9.21,5
30	7.51,2	30	8.31,0	30	9.23,2
40	7.52,2	40	8.32,2	40	9.24,9
50	7.53,2	50	8.33,5	50	9.26,7
22. 0	7.54,3	28. 0	8.34,7	34. 0	9.28,5
10	7.55,3	10	8.36,0	10	9.30,4
20	7.56,3	20	8.37,3	20	9.32,2
30	7.57,3	30	8.38,6	30	9.34,1
40	7.58,4	40	8.39,8	40	9.36,0
50	7.59,4	50	8.41,1	50	9.38,0
23. 0	8. 0,4	29. 0	8.42,5	35. 0	9.40,0
10	8. 1,5	10	8.43,8	10	9.42,0
20	8. 2,5	20	8.45,1	20	9.44,0
30	8. 3,6	30	8.46,5	30	9.46,1
40	8. 4,7	40	8.47,8	40	9.48,2
50	8. 5,7	50	8.49,2	50	9.50,4
24. 0	8. 6,8	30. 0	8.50,6	36. 0	9.52,5

TABLE XIX. (Suite.)

ARCS SEMI-DIURNES DU SOLEIL.

DÉCLINAISON australe.	ARCS semi-diurnes.	DÉCLINAISON australe.	ARCS semi-diurnes.	DÉCLINAISON australe.	ARCS semi-diurnes.
° ′	h m	° ′	h m	° ′	h m
0. 0	6. 3,4	6. 0	5.35,8	12. 0	5. 7,3
10	6. 2,6	10	5.35,1	10	5. 6,5
20	6. 1,9	20	5.34,3	20	5. 5,7
30	6. 1,1	30	5.33,2	30	5. 4,8
40	6. 0,4	40	5.32,7	40	5. 4,0
50	5.59,6	50	5.31,9	50	5. 3,2
1. 0	5.58,8	7. 0	5.31,2	13. 0	5. 2,4
10	5.58,1	10	5.30,4	10	5. 1,5
20	5.57,3	20	5.29,6	20	5. 0,7
30	5.56,5	30	5.28,8	30	4.59,9
40	5.55,8	40	5.28,0	40	4.59,1
50	5.55,0	50	5.27,3	50	4.58,2
2. 0	5.54,3	8. 0	5.26,5	14. 0	4.57,4
10	5.53,5	10	5.25,7	10	4.56,5
20	5.52,7	20	5.24,9	20	4.55,7
30	5.51,9	30	5.24,1	30	4.54,9
40	5.51,2	40	5.23,3	40	4.54,0
50	5.50,4	50	5.22,5	50	4.53,2
3. 0	5.49,7	9. 0	5.21,8	15. 0	4.52,3
10	5.48,9	10	5.21,0	10	4.51,5
20	5.48,1	20	5.20,2	20	4.50,6
30	5.47,4	30	5.19,4	30	4.49,7
40	5.46,6	40	5.18,6	40	4.48,9
50	5.45,8	50	5.17,8	50	4.48,0
4. 0	5.45,1	10. 0	5.17,0	16. 0	4.47,2
10	5.44,3	10	5.16,2	10	4.46,3
20	5.43,5	20	5.15,4	20	4.45,4
30	5.42,8	30	5.14,6	30	4.44,6
40	5.42,0	40	5.13,8	40	4.43,7
50	5.41,2	50	5.13,0	50	4.42,8
5. 0	5.40,5	11. 0	5.12,2	17. 0	4.41,9
10	5.39,7	10	5.11,4	10	4.41,0
20	5.38,9	20	5.10,6	20	4.40,1
30	5.38,1	30	5. 9,7	30	4.39,3
40	5.37,4	40	5. 8,9	40	4.38,4
50	5.36,6	50	5. 8,1	50	4.37,5
6. 0	5.35,8	12. 0	5. 7,3	18. 0	4.36,6

TABLE XIX (Suite).

ARCS SEMI-DIURNES DU SOLEIL.

DÉCLINAISON australe.	ARCS semi-diurnes.	DÉCLINAISON australe.	ARCS semi-diurnes.	DÉCLINAISON australe.	ARCS semi-diurnes.
° ′	h m	° ′	h m	° ′	h m
18. 0	4.36,6	24. 0	4. 1,9	30. 0	3.19,9
10	4.35,7	10	4. 0,8	10	3.18,6
20	4.34,8	20	3.59,8	20	3,17,2
30	4.33,9	30	3.58,7	30	3.15,9
40	4.33,0	40	3.57,6	40	3.14,5
50	4.32,0	50	3.56,6	50	3.13,1
19. 0	4.31,1	25. 0	3.55,5	31. 0	3.11,8
10	4.30,2	10	3.54,4	10	3.10,4
20	4.29,3	20	3.53,3	20	3. 9,0
30	4.28,4	30	3.52,2	30	3. 7,5
40	4.27,4	40	3.51,1	40	3. 6,1
50	4.26,5	50	3.50,0	50	3. 4,6
20. 0	4.25,6	26. 0	3.48,9	32. 0	3. 3,2
10	4.24,6	10	3.47,8	10	3. 1,7
20	4.23,7	20	3.46,7	20	3. 0,2
30	4.22,7	30	3.45,5	30	2.58,7
40	4.21,8	40	3.44,4	40	2.57,2
50	4.20,8	50	3.43,2	50	2.55,7
21. 0	4.19,9	27. 0	3.42,1	33. 0	2.54,1
10	4.18,9	10	3.40,9	10	2.52,5
20	4.17,9	20	3.39,8	20	2.50,9
30	4.17,0	30	3.38,6	30	2.49,3
40	4.16,0	40	3.37,4	40	2.47,7
50	4.15,0	50	3.36,2	50	2.46,1
22. 0	4.14,0	28. 0	3.35,0	34. 0	2.44,4
10	4.13,0	10	3.33,8	10	2.42,7
20	4.12,0	20	3.32,6	20	2.41,0
30	4.11,0	30	3.31,3	30	2.39,3
40	4.10,0	40	3.30,1	40	2.37,5
50	4. 9,0	50	3.28,9	50	2.35,7
23. 0	4. 8,0	29. 0	3.27,6	35. 0	2.33,9
10	4. 7,0	10	3.26,3	10	2.32,1
20	4. 6,0	20	3.25,1	20	2.30,3
30	4. 5,0	30	3.23,8	30	2.28,4
40	4. 3,9	40	3.22,5	40	2.26,5
50	4. 2,9	50	3.21,2	50	2.24,6
24. 0	4. 1,9	30. 0	3.19,9	36. 0	2.22,6

TABLE XX.

RÉDUCTION DU TEMPS EN PARTIES DE L'ÉQUATEUR OU EN DEGRÉS DE LONGITUDE TERRESTRE.

TEMPS moyen.	CORRECTION.	TEMPS moyen.	CORREC-TION.	TEMPS moyen.	CORREC-TION.	TEMPS moyen.	CORREC-TION.	TEMPS moyen.	CORREC-TION.
h	m s	m	s	m	s	s	s	s	s
1	0. 9,856	1	0,164	31	5,093	1	0,003	31	0,085
2	0.19,713	2	0,329	32	5,257	2	0,005	32	0,088
3	0.29,569	3	0,493	33	5,421	3	0,008	33	0,090
4	0.39,426	4	0,657	34	5,585	4	0,011	34	0,093
5	0.49,282	5	0,821	35	5,750	5	0,014	35	0,096
6	0.59,139	6	0,986	36	5,914	6	0,016	36	0,099
7	1. 8,995	7	1,150	37	6,078	7	0,019	37	0,101
8	1.18,852	8	1,314	38	6,242	8	0,022	38	0,104
9	1.28,708	9	1,478	39	6,407	9	0,025	39	0,107
10	1.38,565	10	1,643	40	6,571	10	0,027	40	0,110
11	1.48,421	11	1,807	41	6,735	11	0,030	41	0,112
12	1.58,278	12	1,971	42	6,900	12	0,033	42	0,115
13	2. 8,134	13	2,136	43	7,064	13	0,036	43	0,118
14	2.17,991	14	2,300	44	7,228	14	0,038	44	0,120
15	2.27,847	15	2,464	45	7,392	15	0,041	45	0,123
16	2.37,704	16	2,628	46	7,557	16	0,044	46	0,126
17	2.47,560	17	2,793	47	7,721	17	0,047	47	0,129
18	2.57,417	18	2,957	48	7,885	18	0,049	48	0,131
19	3. 7,273	19	3,121	49	8,049	19	0,052	49	0,134
20	3.17,129	20	3,285	50	8,214	20	0,055	50	0,137
21	3.26,986	21	3,450	51	8,378	21	0,057	51	0,140
22	3.36,842	22	3,614	52	8,542	22	0,060	52	0,142
23	3.46,699	23	3,778	53	8,707	23	0,063	53	0,145
24	3.56,555	24	3,943	54	8,871	24	0,066	54	0,148
		25	4,107	55	9,035	25	0,068	55	0,151
		26	4,271	56	9,199	26	0,071	56	0,153
		27	4,435	57	9,364	27	0,074	57	0,156
		28	4,600	58	9,528	28	0,077	58	0,159
		29	4,764	59	9,692	29	0,079	59	0,162
		30	4,928	60	9,856	30	0,082	60	0,164

TABLE XXI.

RÉDUCTION DES PARTIES DE L'ÉQUATEUR, OU DES DEGRÉS DE LONGITUDE TERRESTRE, EN TEMPS

D.	H. M.	D.	H. M.	D.	H. M.	D.	H. M.	D.	H. M.
1	0. 4	39	2.36	77	5. 8	115	7.40	153	10.12
2	0. 8	40	2.40	78	5.12	116	7.44	154	10.16
3	0.12	41	2.44	79	5.16	117	7.48	155	10.20
4	0.16	42	2.48	80	5.20	118	7.52	156	10.24
5	0.20	43	2.52	81	5.24	119	7.56	157	10.28
6	0.24	44	2.56	82	5.28	120	8. 0	158	10.32
7	0.28	45	3. 0	83	5.32	121	8. 4	159	10.36
8	0.32	46	3. 4	84	5.36	122	8. 8	160	10.40
9	0.36	47	3. 8	85	5.40	123	8.12	161	10.44
10	0.40	48	3.12	86	5.44	124	8.16	162	10.48
11	0.44	49	3.16	87	5.48	125	8.20	163	10.52
12	0.48	50	3.20	88	5.52	126	8.24	164	10.56
13	0.52	51	3.24	89	5.56	127	8.28	165	11. 0
14	0.56	52	3.28	90	6. 0	128	8.32	166	11. 4
15	1. 0	53	3.32	91	6. 4	129	8.36	167	11. 8
16	1. 4	54	3.36	92	6. 8	130	8.40	168	11.12
17	1. 8	55	3.40	93	6.12	131	8.44	169	11.16
18	1.12	56	3.44	94	6.16	132	8.48	170	11.20
19	1.16	57	3.48	95	6.20	133	8.52	171	11.24
20	1.20	58	3.52	96	6.24	134	8.56	172	11.28
21	1.24	59	3.56	97	6.28	135	9. 0	173	11.32
22	1.28	60	4. 0	98	6.32	136	9. 4	174	11.36
23	1.32	61	4. 4	99	6.36	137	9. 8	175	11.40
24	1.36	62	4. 8	100	6.40	138	9.12	176	11.44
25	1.40	63	4.12	101	6.44	139	9.16	177	11.48
26	1.44	64	4.16	102	6.48	140	9.20	178	11.52
27	1.48	65	4.20	103	6.52	141	9.24	179	11.56
28	1.52	66	4.24	104	6.56	142	9.28	180	12. 0
29	1.56	67	4.28	105	7. 0	143	9.32	181	12. 4
30	2. 0	68	4.32	106	7. 4	144	9.36	182	12. 8
31	2. 4	69	4.36	107	7. 8	145	9.40	183	12.12
32	2. 8	70	4.40	108	7.12	146	9.44	184	12.16
33	2.12	71	4.44	109	7.16	147	9.48	185	12.20
34	2.16	72	4.48	110	7.20	148	9.52	186	12.24
35	2.20	73	4.52	111	7.24	149	9.56	187	12.28
36	2.24	74	4.56	112	7.28	150	10. 0	188	12.32
37	2.28	75	5. 0	113	7.32	151	10. 4	189	12.36
38	2.32	76	5. 4	114	7.36	152	10. 8	190	12.40

TABLE XXI (Suite).

RÉDUCTION DES PARTIES DE L'ÉQUATEUR, OU DES DEGRÉS DE LONGITUDE TERRESTRE, EN TEMPS.

D.	H. M.	D.	H. M.	D.	H. M.	D.	H. M.	D.	H. M.
191	12.44	225	15. 0	259	17.16	293	19.32	327	21.48
192	12.48	226	15. 4	260	17.20	294	19.36	328	21.52
193	12.52	227	15. 8	261	17.24	295	19.40	329	21.56
194	12.56	228	15.12	262	17.28	296	19.44	330	22. 0
195	13. 0	229	15.16	263	17.32	297	19.48	331	22. 4
196	13. 4	230	15.20	264	17.36	298	19.52	332	22. 8
197	13. 8	231	15.24	265	17.40	299	19.56	333	22.12
198	13.12	232	15.28	266	17.44	300	20. 0	334	22.16
199	13.16	233	15.32	267	17.48	301	20. 4	335	22.20
200	13.20	234	15.36	268	17.52	302	20. 8	336	22.24
201	13.24	235	15.40	269	17.56	303	20.12	337	22.28
202	13.28	236	15.44	270	18. 0	304	20.16	338	22.32
203	13.32	237	15.48	271	18. 4	305	20.20	339	22.36
204	13.36	238	15.52	272	18. 8	306	20.24	340	22.40
205	13.40	239	15.56	273	18.12	307	20.28	341	22.44
206	13.44	240	16. 0	274	18.16	308	20.32	342	22.48
207	13.48	241	16. 4	275	18.20	309	20.36	343	22.52
208	13.52	242	16. 8	276	18.24	310	20.40	344	22.56
209	13.56	243	16.12	277	18.28	311	20.44	345	23. 0
210	14. 0	244	16.16	278	18.32	312	20.48	346	23. 4
211	14. 4	245	16.20	279	18.36	313	20.52	347	23. 8
212	14. 8	246	16.24	280	18.40	314	20.56	348	23.12
213	14.12	247	16.28	281	18.44	315	21. 0	349	23.16
214	14.16	248	16.32	282	18.48	316	21. 4	350	23.20
215	14.20	249	16.36	283	18.52	317	21. 8	351	23.24
216	14.24	250	16.40	284	18.56	318	21.12	352	23.28
217	14.28	251	16.44	285	19. 0	319	21.16	353	23.32
218	14.32	252	16.48	286	19. 4	320	21.20	354	23.36
219	14.36	253	16.52	287	19. 8	321	21.24	355	23.40
220	14.40	254	16.56	288	19.12	322	21.28	356	23.44
221	14.44	255	17. 0	289	19.16	323	21.32	357	23.48
222	14.48	256	17. 4	290	19 20	324	21.36	358	23,52
223	14.52	257	17. 8	291	19 24	325	21.40	359	23.56
224	14.56	258	17.12	292	19.28	326	21.44	360	24. 0

On convertira les minutes d'arc en regardant les nombres de la Table désignés par les lettres H. M. comme des minutes et des secondes de temps.

On convertira les secondes en prenant les nombres de la Table pour des secondes et des tierces; les tierces se réduiront ensuite en fractions de seconde, en mettant 1 dixième pour 6‴, 2 dixièmes pour 12‴, et ainsi de suite.

TABLE XXII.

QUANTITÉ QU'IL FAUT AJOUTER A L'ÉQUATION DU TEMPS A MIDI VRAI, POUR AVOIR L'ÉQUATION DU TEMPS A MIDI MOYEN.

	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.
	s	s	s	s	s	s
1....	— 0,07	— 0,08	+ 0,11	+ 0,05	— 0,02	+ 0,02
2....	0,08	0,07	0,11	0,05	0,02	0,02
3....	0,09	0,06	0,11	0,04	0,01	0,02
4....	0,10	0,05	0,11	0,04	0,01	0,01
5 ...	0,11	0,05	0,11	0,03	0,01	0,01
6....	0,11	0,04	0,11	0,03	0,01	0,01
7....	0,12	0,03	0,11	0,03	0,01	0,01
8 ...	0,13	0,02	0,11	0,02	0,01	0,01
9....	0,13	0,02	0,11	0,02	0,01	0,01
10....	0,13	— 0,01	0,11	0,02	0,01	0,01
11....	0,14	0,00	0,11	0,01	— 0,01	0,01
12....	0,14	+ 0,01	0,11	0,01	0,00	+ 0,01
13 ...	0,14	0,01	0,11	+ 0,01	0,00	0,00
14 ...	0,14	0,02	0,11	0,00	0,00	0,00
15....	0,14	0,03	0,11	0,00	0,00	0,00
16....	0,14	0,04	0,11	0,00	0,00	0,00
17....	0,14	0,04	0,10	0,00	0,00	0,00
18....	0,14	0,05	0,10	— 0,01	+ 0,01	— 0,01
19 ...	0,14	0,06	0,10	0,01	0,01	0,01
20....	0,14	0.06	0,10	0,01	0,01	0,01
21....	0,14	0,07	0,09	0,01	0,01	0,01
22....	0,14	0,07	0,09	0,01	0,01	0,01
23....	0,13	0,08	0,09	0,01	0,01	0,02
24....	0,13	0,08	0,08	0,02	0,01	0,02
25....	0,12	0,09	0,08	0,02	0,01	0,02
26....	0,12	0,09	0,08	0,02	0,01	0,02
27....	0,11	0,10	0,07	0,02	0,02	0,02
28....	0,11	0,10	0,07	0,02	0,02	0,02
29....	0,10	+ 0,10	0,06	0,02	0,02	0,03
30....	0,10		0,06	— 0,02	0,02	— 0,03
31....	— 0,09		+ 0,05		+ 0,02	

TABLE XXII (Suite).

QUANTITÉ QU'IL FAUT AJOUTER A L'ÉQUATION DU TEMPS A MIDI VRAI, POUR AVOIR L'ÉQUATION DU TEMPS A MIDI MOYEN.

	JUILLET.	AOUT.	SEPTEMBRE.	OCTOBRE.	NOVEMBRE.	DÉCEMBRE.
	s	s	s	s	s	s
1....	— 0,03	+ 0,01	0,00	0,14	— 0,01	+ 0,17
2....	0,03	0,02	0,00	0,14	0,00	0,17
3....	0,03	0,02	— 0,01	0,14	+ 0,01	0,17
4....	0,03	0,02	0,01	0,14	0,01	0,16
5....	0,03	0,02	0,02	0,14	0,02	0,16
6....	0,03	0,02	0,02	0,14	0,03	0,16
7....	0,03	0,03	0,03	0,14	0,04	0,15
8....	0,03	0,03	0,03	0,14	0,05	0,15
9....	0,03	0,03	0,04	0,14	0,06	0,14
10....	0,03	0,03	0,04	0,14	0,07	0,13
11....	0,03	0,03	0,05	0,14	0,08	0,13
12....	0,03	0,03	0,05	0,14	0,09	0,12
13....	0,03	0,03	0,06	0,13	0,09	0,11
14....	0,02	0,03	0,06	0,13	0,10	0,10
15....	0,02	0,03	0,07	0,13	0,11	0,09
16....	0,02	0,03	0,07	0,12	0,12	0,09
17....	0,02	0,03	0,08	0,12	0,12	0,08
18....	0,02	0,03	0 09	0,12	0,13	0,07
19....	0,02	0,03	0,09	0,11	0,14	0,06
20....	0,01	0,03	0,10	0,10	0,14	0,05
21....	0,01	0,03	0,10	0,10	0,15	0,04
22....	0,01	0,03	0,10	0,09	0,16	0,02
23....	0,01	0,03	0,11	0,09	0,16	+ 0,01
24....	— 0,01	0,02	0,11	0,08	0,16	0,00
25....	0,00	0,02	0,12	0,07	0,17	— 0,01
26....	0,00	0,02	0,12	0,07	0,17	0,02
27....	0,00	0,02	0,12	0,06	0,17	0,03
28....	0,00	0,01	0,13	0,05	0,17	0,04
29....	0,00	0,01	0,13	0,04	0,17	0,05
30....	+ 0,01	+ 0,01	— 0,13	0,03	+ 0,17	0,06
31....	+ 0,01	0,00		— 0,02		— 0,06

TABLE XXIII.

CONVERSION DE CHAQUE JOUR DES MOIS EN JOURS DE L'ANNÉE, ET DES HEURES, MINUTES ET SECONDES EN FRACTIONS DÉCIMALES DU JOUR.

MOIS.	ANNÉE	
	commune.	bissextile.
Janv. 0	0	— 1
Févr. 0	31	30
Mars 0	59	59
Avril 0	90	90
Mai 0	120	120
Juin 0	151	151
Juillet 0	181	181
Août 0	212	212
Sept. 0	243	243
Oct. 0	273	273
Nov. 0	304	304
Déc. 0	334	334

HEURES.	PARTIES DU JOUR.
1	0,041667
2	0,083333
3	0,125000
4	0,166667
5	0,208333
6	0,250000
7	0,291667
8	0,333333
9	0,375000
10	0,416667
11	0,458333
12	0,500000
13	0,541667
14	0,583333
15	0,625000
16	0,666667
17	0,708333
18	0,750000
19	0,791667
20	0,833333
21	0,875000
22	0,916667
23	0,958333

MINUTES.	FRACTIONS décimales du jour.	MINUTES.	FRACTIONS décimales du jour.	SECONDES.	FRACTIONS décimales du jour.	SECONDES.	FRACTIONS décimales du jour.
1	0,000694	31	0,021527	1	0,000012	31	0,000358
2	0,001389	32	0,022222	2	0,000023	32	0,000370
3	0,002083	33	0,022917	3	0,000035	33	0,000382
4	0,002778	34	0,023611	4	0,000046	34	0,000394
5	0,003472	35	0,024305	5	0,000058	35	0,000405
6	0,004167	36	0,025000	6	0,000069	36	0,000416
7	0,004861	37	0,025694	7	0,000081	37	0,000428
8	0,005556	38	0,026389	8	0,000093	38	0,000440
9	0,006250	39	0,027083	9	0,000104	39	0,000451
10	0,006944	40	0,027778	10	0,000116	40	0,000463
11	0,007639	41	0,028472	11	0,000127	41	0,000475
12	0,008333	42	0,029167	12	0,000139	42	0,000486
13	0,009028	43	0,029861	13	0,000150	43	0,000497
14	0,009722	44	0,030556	14	0,000162	44	0,000509
15	0,010417	45	0,031250	15	0,000174	45	0,000521
16	0,011111	46	0,031944	16	0,000185	46	0,000532
17	0,011806	47	0,032639	17	0,000197	47	0,000544
18	0,012500	48	0,033333	18	0,000208	48	0,000556
19	0,013194	49	0,034027	19	0,000220	49	0,000567
20	0,013889	50	0,034722	20	0,000231	50	0,000579
21	0,014583	51	0,035416	21	0,000243	51	0,000590
22	0,015278	52	0,036111	22	0,000255	52	0,000602
23	0,015972	53	0,036806	23	0,000266	53	0,000613
24	0,016667	54	0,037500	24	0,000278	54	0,000625
25	0,017361	55	0,038194	25	0,000289	55	0,000637
26	0,018056	56	0,038889	26	0,000301	56	0,000648
27	0,018750	57	0,039583	27	0,000312	57	0,000659
28	0,019444	58	0,040277	28	0,000324	58	0,000671
29	0,020139	59	0,040972	29	0,000336	59	0,000683
30	0,020833	60	0,041667	30	0,000347	60	0,000694

TABLE DES MATIÈRES.

Avertissement vii

INTRODUCTION HISTORIQUE.

PREMIÈRE SECTION.

HISTOIRE DES ÉPHÉMÉRIDES ASTRONOMIQUES ET NAUTIQUES ET DES TABLES QUI ONT SERVI DE FONDEMENT A LEUR CALCUL.

I. — Éphémérides astronomiques ix
II. — Tables du mouvement de la Lune xxiii
III. — Tables du mouvement des planètes xxxvi
IV. — Tables du mouvement des satellites de Jupiter xlv
V. — Catalogues d'Étoiles lxxxi

SECONDE SECTION.

NOTICES HISTORIQUES SUR LES PRINCIPAUX PHÉNOMÈNES DONT LA PRÉDICTION FAIT LE SUJET DES ÉPHÉMÉRIDES.

I. — Éclipses de Lune et de Soleil lxxxvii
II. — Phénomène des marées xci
III. — Passages de Vénus et de Mercure sur le disque du Soleil xcii
IV. — Phénomènes relatifs aux disparitions de l'anneau de Saturne xciii

PREMIÈRE PARTIE.

CORRECTION DES POSITIONS CÉLESTES.

CHAPITRE I

DES COORDONNÉES ASTRONOMIQUES, DE LEUR TRANSFORMATION ET DE LEURS VARIATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. — Systèmes de coordonnées équatoriales et écliptiques. — Transformation d'un système dans l'autre 1

II. — Appropriation des formules précédentes au calcul logarithmique..... 3
III. — Transformation des coordonnées sphériques en coordonnées rectangles. 4
IV. — Coordonnées héliocentriques. — Passage des coordonnées héliocentriques aux coordonnées géocentriques, et inversement........... 6
V. — Variations différentielles des coordonnées équatoriales et écliptiques. 7

CHAPITRE II.

CALCUL DE LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE.

I. — Équation différentielle de la réfraction........................... 11
II. — Détermination numérique des constantes qui entrent dans l'expression précédente de ζ.. 18
III. — Cas des réfractions voisines de l'horizon........... 22
IV. — Correction pour un état quelconque de l'atmosphère............... 22

Notes additionnelles au Chapitre II.

I. — Discussion des racines de l'équation (α)......................... 25
II. — Développement en série de l'intégrale $\int_{t}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$................. 26

CHAPITRE III.

CALCUL DES PARALLAXES.

I. — Expression de la parallaxe de hauteur en fonction de la parallaxe horizontale et de la distance zénithale vraie ou apparente............ 29
II. — Influence de la parallaxe sur les coordonnées équatoriales et écliptiques. — Parallaxe d'ascension droite et de déclinaison............ 32
III. — Parallaxe de longitude et de latitude............................... 38
IV. — Correction que l'ellipticité de la Terre apporte dans le calcul des parallaxes. — Expression de la parallaxe horizontale équatoriale.... 40

CHAPITRE IV.

DÉPLACEMENT DES PLANS DE L'ÉQUATEUR ET DE L'ÉCLIPTIQUE. — VARIATIONS QUI EN RÉSULTENT DANS LES COORDONNÉES DES ASTRES. — CALCUL DE LA PRÉCESSION ET DE LA NUTATION.

I. — Des causes qui produisent la précession et la nutation............... 45
II. — Formules de précession en ascension droite et en déclinaison........ 46
III. — Formules relatives à la nutation................................ 54
IV. — Nutation solaire et lunaire en ascension droite et en déclinaison..... 55

CHAPITRE V.

CALCUL DE L'ABERRATION.

I. — Aberration des étoiles en ascension droite et en déclinaison......... 61
II. — Cas où l'on tient compte de l'excentricité de l'orbite............... 65
III. — Aberration en longitude et en latitude.............................. 67
IV. — Aberration solaire... 68
V. — Orbite apparente des étoiles autour de leur lieu moyen.............. 68
VI. — Aberration des planètes.. 69

DEUXIÈME PARTIE.

CONSTRUCTION DES ÉPHÉMÉRIDES.

CHAPITRE Ier.

COMPOSITION DU CALENDRIER. — EXPLICATION DES PRINCIPAUX ARTICLES DE L'*Annuaire*.

I. — Calendrier romain. — Réformes julienne et grégorienne............. 71
II. — Des calendriers en usage chez les différents peuples.................. 74
III. — De quelques périodes astronomiques usitées en chronologie.......... 77
IV. — Des épactes.. 79
V. — De la fête de Pâques.. 82
VI. — Composition du calendrier grégorien................................ 83

Note additionnelle au Chapitre I.

Détermination de la lettre dominicale pour une année quelconque.......... 86

CHAPITRE II.

ÉPHÉMÉRIDES DU SOLEIL.

I. — Obliquité apparente de l'écliptique.................................. 88
II. — Points équinoxiaux.. 89
III. — Commencement des saisons... 91
IV. — Fraction de l'année... 93
V. — Lever et coucher apparents du centre du Soleil........................ 93
VI. — Lieu du Soleil. — Tables de Le Verrier.................................. 96
VII. — Ascension droite et déclinaison.. 102
VIII. — Temps sidéral à midi moyen à Paris...................................... 103
IX. — Temps moyen à midi vrai à Paris... 104
X. — Parallaxe horizontale du Soleil.. 106
XI. — Demi-diamètre du Soleil.. 106
XII. — Durée du passage du demi-diamètre par le méridien.................... 107
XIII. — Aberration.. 108
XIV. — Coordonnées du Soleil... 109

Notes additionnelles au Chapitre II.

I. — Expressions complètes des valeurs de la nutation luni-solaire en longitude et de l'obliquité.................................... 110
II. — Du temps et de sa mesure : 1° des différentes espèces de temps; 2° calcul de l'heure vraie au moyen de l'heure moyenne, et réciproquement, exemples numériques; 3° calcul de l'heure sidérale au moyen de l'heure moyenne, et réciproquement; exemples numériques..... 112
III. — Tables particulières du mouvement du Soleil........................ 116

CHAPITRE III.

ÉPHÉMÉRIDES DES PLANÈTES.

I. — Calcul des lieux héliocentriques.. 119
II. — Calcul des lieux géocentriques.. 122
II. — Ascension droite et déclinaison.. 126

IV. — Parallaxe horizontale. — Demi-diamètre. — Durée du passage du demi-diamètre par le méridien.................................... 127
V. — Passage du centre de la planète au méridien de Paris................ 129
VI. — Conjonction, opposition, quadrature, élongation..................... 130

Notes additionnelles au Chapitre III.

I. — Du problème des perturbations planétaires. — Équations qui définissent le mouvement des planètes autour du Soleil, abstraction faite de leur figure.. 131
II. — De la fonction perturbatrice et de sa nature. — Distinction des termes périodiques et séculaires. — Divers ordres d'approximation par rapport aux masses.. 135
III. — Du mouvement varié et elliptique des planètes....................... 142

CHAPITRE IV.

ÉPHÉMÉRIDES DE LA LUNE.

I. — Des principales inégalités du mouvement de la Lune.............. 156
II. — Longitude moyenne du nœud ascendant de la Lune................. 162
III. — Passage du centre de la Lune au méridien de Paris.............. 163
IV. — Parallaxe horizontale équatoriale de la Lune..................... 164
V. — Demi-diamètre de la Lune.. 165
VI. — Lever et coucher du centre de la Lune............................ 166
VII. — Phases de la Lune... 167
VIII. — Des lieux lunaires.. 169
IX. — Ascension droite et déclinaison....................................... 170

CHAPITRE V.

CALCUL DES POSITIONS APPARENTES DES ÉTOILES.

I. — Formules de réduction.. 173
II. — Transformation du *Nautical Almanac*................................ 175
III. — Détermination numérique des éléments qui entrent dans les formules précédentes.. 177

CHAPITRE VI.

CALCUL DES DISTANCES LUNAIRES.

I. — Équation fondamentale.. 181
II. — Réduction des distances apparentes en distances vraies............ 183

TROISIÈME PARTIE.

PRÉDICTION DES PHÉNOMÈNES ASTRONOMIQUES.

CHAPITRE Ier.

PRÉDICTION DES ÉCLIPSES ET DES CONFIGURATIONS DES SATELLITES DE JUPITER.

I. — Des particularités que présente le phénomène des éclipses des satellites de Jupiter.. 188

II. Disposition et usage des Tables écliptiques des satellites de Jupiter. — Tables du premier satellite 189
III. — Tables du deuxième satellite 192
IV. — Tables du troisième et du quatrième satellite 195
V. — Configuration des satellites de Jupiter. — Usage des Tables de configurations 196

CHAPITRE II.

PRÉDICTION DES ÉCLIPSES DE LUNE ET DE SOLEIL.

I. — Éclipses de Lune. — Limites entre lesquelles doit se trouver comprise la latitude lunaire pour qu'il y ait éclipse 200
II. — Calcul des phases d'une éclipse de Lune et de l'instant du milieu de l'éclipse 202
III. — Calcul du commencement et de la fin de l'éclipse 203
IV. — De la pénombre. — Calcul de l'entrée dans la pénombre et de la sortie 205
V. — Grandeur de l'éclipse 205
VI. — Éclipse de Soleil (méthode de Woolhouse). — Conditions de possibilité des éclipses de Soleil 206
VII. — Détermination des lieux pour lesquels s'accomplissent les principales phases du phénomène 207
VIII. — Courbes-limites des points où l'éclipse générale commence ou finit au lever et au coucher du Soleil 215
IX. — Lignes de simple contact nord et sud 221
X. — Détermination du point d'intersection des courbes relatives aux lieux qui voient commencer ou finir l'éclipse au lever ou au coucher du Soleil 229
XI. — Courbe des lieux voyant le milieu de l'éclipse au lever et au coucher du Soleil 233
XII. — Ligne de l'éclipse centrale 239
XIII. — Éclipse de Soleil pour un lieu particulier 242
XIV. — Calcul des circonstances d'une éclipse de Soleil pour des lieux avoisinant le lieu considéré 247
XV. — Calcul des éclipses de Lune 249

CHAPITRE III.

PRÉDICTION DES OCCULTATIONS DES ÉTOILES ET DES PLANÈTES PAR LA LUNE.

I. — Calcul des phases d'une occultation d'étoiles ou de planètes. — Première approximation. — Application numérique 252
II. — Seconde approximation du calcul de l'occultation. — Première méthode : cas des occultations visibles à Paris 263
Seconde méthode : cas des occcultations invisibles à Paris 264
III. — Détermination des angles de position des points de contact par rapport au pôle et au zénith 268
IV. — Détermination des deux latitudes extrêmes entre lesquelles le phénomène de l'occultation est observable 270

CHAPITRE IV.

PRÉDICTION DES MARÉES.

I. — Des causes qui produisent ce phénomène. — Effets généraux........ 274
II. — Formules de Laplace. — Différentes espèces d'oscillations.......... 280
III. — Hauteur des marées. — Hauteur de la pleine mer à l'époque des syzygies. — Application numérique................................ 286

CHAPITRE V.

PRÉDICTION DES PASSAGES DE VÉNUS ET DE MERCURE SUR LE DISQUE DU SOLEIL.

I. — Méthode de Lagrange et d'Encke. — Prédiction du phénomène pour le centre de la Terre.. 289
II. — Calcul du phénomène pour un lieu donné. — Théorème de Lagrange. — Application numérique.. 292

CHAPITRE VI.

PRÉDICTION DES PHÉNOMÈNES RELATIFS AUX DISPARITIONS PÉRIODIQUES DE L'ANNEAU DE SATURNE.

I. — Disparition et réapparition de l'anneau de Saturne. — Détermination des éléments qui fixent sa position.............................. 303
II. — Transformation logarithmique des formules qui précèdent........... 305
III. — Application numérique.. 306

QUATRIÈME PARTIE.

RÉSUMÉ DES FORMULES CONTENUES DANS LES PARTIES II ET III.

I. — COMPOSITION DU CALENDRIER.

1° Calendrier romain. — Réformes julienne et grégorienne................. 309
2° Des calendriers en usage chez les différents peuples.................... 311
3° Comput ecclésiastique.. 313
4° Fête de Pâques.. 313
5° Dates des fêtes mobiles. — Conventions qui règlent les fêtes immobiles.. 313

II. — ÉPHÉMÉRIDES DU SOLEIL.

Notation.. 314
1° Obliquité apparente.. 314
2° Points équinoxiaux. — Précession en longitude......................... 314
3° Nutation en longitude... 315
4° Nutation en Æ... 315
5° Commencement des saisons.. 315
6° Fraction de l'année... 315
7° Lever et coucher apparent du centre du Soleil........................ 315
8° Lieux du Soleil. — (*a*) Longitude du Soleil. — (*b*) Latitude du Soleil. — (*c*) Rayon vecteur de la Terre..................................... 316
9° Ascension droite et déclinaison du Soleil............................ 317

10° Temps sidéral à midi moyen à Paris.. 317
11° Temps moyen à midi vrai à Paris.. 317
12° Parallaxe horizontale du Soleil.. 318
13° Demi-diamètre du Soleil.. 318
14° Durée du passage du demi-diamètre par le méridien.. 318
15° Coordonnées du Soleil.. 318

Note additionnelle.

Des différentes espèces de temps.. 319

III. — Éphémérides des planètes.

1° Lieux héliocentriques.. 320
2° Lieux géocentriques. — Vérification.. 321
3° Ascension droite et déclinaison.. 321
4° Parallaxe horizontale. — Demi-diamètre. — Durée du passage du demi-diamètre par le méridien.. 321
5° Passage du centre de la planète au méridien de Paris.. 323
6° Calcul de la conjonction, de l'opposition de la quadrature et de l'élongation.. 323

IV. — Éphémérides de la Lune.

1° Principales inégalités du mouvement de la Lune.. 324
2° Longitude moyenne du nœud ascendant de la Lune.. 325
3° Passage du centre de la Lune au méridien de Paris.. 325
4° Parallaxe horizontale équatoriale de la Lune.. 326
5° Demi-diamètre de la Lune.. 326
6° Lever et coucher du centre de la Lune.. 326
7° Phases lunaires.. 327
8° Lieux lunaires.. 327
9° Ascension droite et déclinaison de la Lune.. 328

V. — Calcul des positions apparentes des étoiles.

1° Formule de réduction.. 328
2° Transformation du *Nautical Almanac*.. 329
3° Détermination numérique des éléments t, ⊙, ☊, ω, h, k, $\Delta\zeta'$ et $\Delta\omega$ qui entrent dans les formules précédentes.. 555

VI. — Calcul des distances lunaires.

Équation fondamentale. — Nom des étoiles employées. — Remarque........ 331

VII. — Prédiction des éclipses et des configurations des satellites de Jupiter.

1° Éclipses des satellites de Jupiter. — Règles à suivre pour reconnaître la place qu'occupent les satellites.. 332
2° Configuration des satellites. — Désignations adoptées pour marquer leurs configurations.. 332

VIII. — Prédiction des éclipses de Lune et de Soleil.

A. Notation.. 333
B. Éclipses de Soleil. — Conditions de possibilité.. 33

C. Détermination des lieux qui voient commencer ou finir l'éclipse générale, l'éclipse totale ou l'éclipse centrale.................................... 334
D. Courbes des lieux voyant la phase au lever ou au coucher du Soleil..... 335
E. Lignes de simple contact nord et sud.................................... 336
F. Détermination du lieu où une phase donnée apparaît au lever et au coucher du Soleil.................................... 339
G. Détermination des lieux qui voient le milieu de l'éclipse, le Soleil étant à l'horizon.................................... 340
H. Ligne de l'éclipse centrale.................................... 342

IX. — Prédiction des éclipses de Lune.

1° Conditions de possibilité des éclipses de Lune.......................... 343
2° Époques du commencement, de la fin et du milieu de l'éclipse........... 343

X. — Calcul des occultations d'étoiles et de planètes par la Lune.

1° Éléments pour le calcul des occultations. — Notation..................... 344
2° Calcul de l'occultation pour un lieu quelconque de la Terre.............. 345
3° Cas où l'astre occulté est une planète.................................... 34
4° Limites en latitude.. 347

XI. — Prédiction des marées.

1° Formules de Laplace. — Notation. — Calcul du passage p de la Lune au méridien du lieu. — Calcul de la différence $\psi - \psi' = \alpha$................ 348
2° Calcul de C et de E. — Construction des Tables I et II de l'*Annuaire*.... 349
3° Hauteurs des marées. — Formule qui donne la hauteur de la pleine mer à l'époque des syzygies.................................... 349

XII. — Prédiction des passages de Vénus et de Mercure sur le disque du Soleil.

1° Prédiction du phénomène pour le centre de la Terre.................... 350
2° Calcul du phénomène pour un lieu donné................. 350

XIII. — Prédiction des phénomènes relatifs aux disparitions de l'anneau de Saturne.

1° Détermination des éléments qui fixent la position de l'anneau de Saturne. 351
2° Formules logarithmiques.................................... .. 352

CINQUIÈME PARTIE.

TABLES NUMÉRIQUES DESTINÉES A FACILITER LE CALCUL DES ÉPHÉMÉRIDES.

Table I. — Calendrier grégorien.................................... 357
Table II. — Table pour trouver la fête de Pâques.................... 359
Table III. — Conversion du temps sidéral en temps moyen............. 360
Table IV. — Conversion du temps moyen en temps sidéral............. 361
Table V. — Demi-diamètre de la Lune.......... 362
Tables VI et VII. — Calcul de τ et de ☊.................................... 363
Table VIII. — Obliquité moyenne de l'écliptique......... 364
Table IX. — Valeur du log. du rayon de la Terre...................... 365

Table X. — Valeurs de (D) — D ou de α *correction* 366
Table XI. — Augmentation du demi-diamètre de la Lune 367
Table XII. — Réduction des latitudes géocentriques en latitude géographiques ou inversement 368
Tables XIII-XV. — Tables pour le calcul des occultations... 369
Table XVI. — Transformation du temps moyen de la conjonction vraie en ascension droite en temps moyen de la conjonction apparente.................................... 373
Table XVII. — Facteurs d'interpolation..................................... 374
Table XVIII. — Angle parallactique pour la latitude de Paris........... . 375
Table XIX. — Arcs semi-diurnes du Soleil.............................. 377
Table XX. — Réduction du temps en parties de l'équateur ou en degrés de longitude terrestre.. 381
Table XXI. — Réduction des parties de l'équateur ou des degrés de longitude en temps 382
Table XXII. — Quantité qu'il faut ajouter à l'équation du temps à midi vrai, pour avoir l'équation du temps à midi moyen..... 384
Table XXIII. — Conversion de chaque jour des mois en jours de l'année, et des heures, minutes et secondes en fractions décimales du jour............. 386
TABLE DES MATIÈRES 387

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES

ERRATA.

Pages.	Lignes.	Au lieu de .	Lire :
34	7.........	$\sin z \sin ☾$	$\sin z \sin ☽$
»	12.	$\cos z' \cos l$	$\sin z' \cos$
62	16....... .	$\frac{ds}{\rho^3}$	$\frac{ds}{\rho}$
64	(équ. 6) ...	$\cos\gamma = \sin\alpha \cos\omega$	$\cos\gamma = \sin\alpha \sin\omega$
89	8 en remont.	$2A + 2l'$	$2\Lambda + 2l''$
125	12.........	$\Delta \cos\lambda = \frac{\Sigma(\mathrm{I})}{\cos L}$	$\Delta \cos\lambda = \frac{\Sigma(\mathrm{II})}{\cos L}$
133	20.........	$\rho = \overline{mm'}^2$	$\rho^2 = \overline{mm'}^2$

Pages.	Lignes	Au lieu de :	Lire :
»	21.........	$\varrho' = \overline{mm''}^2$	$\rho'^2 = \overline{mm''}^2$
142	9 et 10....	$n't$ et nt	nt et $n't$
»	10.........	l'excès de cinq fois le moyen mouvement de Jupiter sur deux fois le moyen mouvement de Saturne, etc.	l'excès de cinq fois le moyen mouvement de Saturne sur deux fois le moyen mouvement de Jupiter, etc.
154	6 en remont.	$A = \varphi$	$A = \varphi'$
155	9.........	$\sin(\theta - \theta')$	$\sin(\theta - \theta')\cos\theta$
179	13 en remont.	la ligne du jour donné que l'on écrira immédiatement au-dessous de la ligne des époques, etc.	la ligne du jour immédiatement au-dessous du jour donné que l'on écrira au-dessous, etc.
218	7 en remont.	$☾' \mp u = D'$	$☾ \mp u = D'$
297	2.........	$\Delta = \ldots + (\delta + D)\cos M$	$\Delta = \ldots + (\delta - D)\cos M$
299	9.........	$g\cos\beta\ \cos A$	$g\cos\beta\ \cos A$
»	10.........	$g\cos\beta'\cos A'$	$g\cos\beta'\cos A'$
316	2 en remont.	$-(\frac{1}{2}e^2 - e^4 + \ldots)\cos 2\zeta$	$-(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^1 + \ldots)\cos 2$
334	»	$\operatorname{tang} i = \dfrac{D_1}{\alpha_1 \cos ☾}$	$\operatorname{tang} i = \dfrac{D_1}{\alpha_1 \cos D}$
335	4.........	$\sin l' = \ldots$	$\sin l = \ldots$
»	10.........	$\sin l = \ldots$	$\sin l' = \ldots$

f296 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

ERRATA (*Suite*).

Pages.	Lignes	Au lieu de :	Lire :
XLI	13	Adam	Adams
LXXX	19	Fold	Todd
8	éq. (3) ...	$\cos\mathcal{D}\sin S\, d\mathcal{A}$	$\cos\mathcal{L}\sin\omega\, d\mathcal{A}$
9	2ᵉ éq. (5).	$\cos\lambda\sin S\,\delta\mathcal{L}$	$\cos\mathcal{A}\sin\omega\, d\mathcal{L}$
»	14 en remont.	$\sin S$	$\cos S$
14	2 en remont.	$2\left(1+\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\alpha}{1-2\alpha}\right)$	$2\left(1+\frac{\rho}{\rho_0}\frac{2\alpha}{1-2\alpha}\right)$
17	7	ρ et g	p_0 et g_0
»	éq.(11), 2ᵉ t.	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha^2}{2}$
23	2	$\frac{v}{1+mt}$	$\frac{v'}{1+mt}$
»	2 et 5 en rem.	$\tang^3 z$	$\tang z$
24	9 en remont.	$9^\circ 25'$	$9^\circ,25$
»	1	$z > 72^\circ$ ou $z > 74^\circ$	$z < 72^\circ$ ou $z < 74^\circ$
25	éq. (3)....	$p = \frac{x-3y}{3}$	$p = \frac{x^2-3y}{3}$
37	1 en remont.	$\cos\tau(\chi-\mathcal{D})$	$\tau\cos(\chi-\mathcal{D})$
40	éq. (7)....	supprimez $\sin(\chi-\lambda)$	
42	7	$(A^2+B^2)\tang^2 l$	$A^2+B^2\tang^2 l$
43	7 en remont.	μ^2	μ
49	11	$\Upsilon n \Upsilon''$	$\Upsilon' n \Upsilon''$
52	4	$E\Upsilon'$	$F\Upsilon'$
53	3	$\omega'-\omega$ (au dénominateur)	$\omega'+\omega$
»	18 en remont.	$\cos\mathcal{D}\cos\mathcal{A}\sin\theta$	$\cos\mathcal{D}\cos\mathcal{A}\cos\theta$
58	7 en remont.	$\sin\lambda\cos(\theta-\omega)$	$\frac{\sin\lambda\cos(\theta-\omega)}{\cos\omega}$
59	5 et 7 en rem.	$\tang\lambda$	$\tang\mathcal{L}$
109	6	$\lambda\sin\omega\sin 1''$	$R\lambda\sin\omega\sin 1''$
»	7	$\lambda\cos\omega\sin 1''$	$R\lambda\cos\omega\sin 1''$
114	15	$h_s = h_v + h\odot$ moyen	$h_s = h_m + h\odot$ moyen
128	4	$t = \frac{\mathcal{D}}{15\cos\mathcal{D}}$	$t = \frac{D}{15\cos\mathcal{D}}$
135	1 en remont.	$v'-v-\tau-\tau'$	$v'-v+\tau-\tau'$
136	3 en remont.	$+m'\frac{3}{2}\eta_1^4\chi^2 rr'\ldots$	$+m'6\eta_1^4\chi^2 r^2 r'^2\ldots$
»	13 et 14...	$\sin\frac{1}{2}\gamma$	$\sin^2\frac{1}{2}\gamma$
147	1 en remont.	$(1-e)$	$(1-e^2)$
»	6 et 7....	$\frac{K^2}{H}$	$-\frac{K^2}{H}$

ERRATA.

Pages	Lignes	Au lieu de:	Lire
147	4 en remont.	$\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{a(1-e^2)}\right]$ (au dénom.)	$\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{a(1-e^2)}\right]^2$
148	18........	$\frac{dr^2}{dt}$	$\frac{dr^2}{dt^2}$
»	20........	$r\,dr$	dr
1501	1 en remont.	$f(x)$	$f(z)$
154	Fig. 20 à g.	N	N′
166	7........	$\log\frac{R}{r}=3.513351$	$\log\frac{R}{r}=9.436083$
167	5........	du Soleil	de la Lune
168	15 en remont.	ascension droite	longitude
174	15 en remont.	$\cos\mathcal{A}$	$\sin\mathcal{A}$
178	9........	$1880+T$	$1800+T$
»	12........	$\mathfrak{T}_T$	$\mathfrak{M}$
181	18 en remont.	de la Lune	de la Terre
184	2 en remont.	$\sin\frac{1}{2}\Delta$	$\sin^2\frac{1}{2}\Delta$
202	12 en remont.	SP′	S′P
203	7 en remont.	$(LS-L'S)(LS+L'S)$	$\sqrt{(LS-L'S)(LS+L'S)}$
204	1 en remont.	$\mathfrak{R}+\delta>\lambda\cos\theta$	$\mathfrak{R}+\delta<\lambda\cos\theta$
212	3........	temps moyen	temps vrai
218	4 en remont.	$P\,dl$	$P\,dL$
219	5........	NSZ	PSZ
227	13........	$\sin\varphi=\frac{\sqrt{\cos Z}}{2\lambda\cos\nu}$	$\sin\varphi=\sqrt{\frac{\cos Z}{2\lambda\cos\nu}}$
232	11........	Fig. 32	Fig. 31
233	12........	temps moyen de ♈	temps vrai de ♈
245	2........	$\cot y=\frac{y_1}{x_1}$	$\cot i=\frac{y_1}{x_1}$
»	11 en remont.	s	S
246	1 en remont.	δ	$\mathcal{D}_1$
247	16........	$L_1 n$	$L_2 n$
250	2........	a	α
257	éq. 13 et 14.	$\frac{(1-e)^2}{e}$	$\frac{1-e^2}{e}$
268	14 en remont.	$N\sin Nt$	$n\sin Nt$
»	15 en remont.	$m\cos M-N\cos Nt$	$-m\cos M-n\cos Nt$
»	17 en remont.	$\mp\sin\psi$	$\mp k\sin\psi$
»	18 en remont.	$\pm\sin\psi$	$\pm k\sin\psi$
»	11 en remont.	$\cos M+\cos M\cos(\ldots)$	$-\cos M+\cos N\cos(\ldots)$
»	10 en remont.	supprimez $\sin N\sin M\cos N'$.	
9	9 en remont.	$\cos M(1+\cos^2 N)$	$-\cos M(1-\cos^2 N)$
271	8 en remont.	$-\cos\varphi$	$-\cos\psi$
272	13 en remont.	$\cos W_2\mp\frac{n}{P}+\cdots$	$\cos W_2=\mp\frac{n}{P}+\ldots$
276	13........	$(\ldots)^{-\frac{1}{2}}$	$(\ldots)^{\frac{1}{2}}$
277	10 en remont.	$2fmr\sin^2\theta$	$2fmr\sin\theta\cos\theta$
278	13 en remont.	Lune	Terre
279	1........	Terre	Lune

ERRATA.

Pages	Lignes	Au lieu de :	Lire
282	6 en remont.	$nt + \varpi - \psi' - \psi$	$nt + \varpi - \psi' - \gamma$
283	10 en remont.	$\frac{L'}{r'^3}$	$\frac{L'}{r_0'^3}$
»	3 et 5 en rem.	δ et δ'	δ_0 et δ'_0
»	2 en remont.	$\frac{\delta_0}{\delta}$ et $\frac{\delta'_0}{\delta'}$	$\frac{\delta}{\delta_0}$ et $\frac{\delta'}{\delta'_0}$
»	4 et 5	supprimez les crochets	
287	5	i'^3	i^3
»	6	i^3	i'^3
»	2 en remont.	$0^m,77112$	$0^m,78112$
288	16	$\log r$	$\log i$
291	11 en remont.	$\frac{\sqrt{1 - \Delta^2 \sin^2(M - N)}}{(\mathfrak{R} \pm \rho)^2}$	$\sqrt{1 - \frac{\Delta^2 \sin^2(M - N)}{(\mathfrak{R} \pm \rho)^2}}$
293	17	$+$	$\times$
294	5	$-$(au commencement)	$+$
295	8	les éq. (4) et (5)	les éq. (5)
»	10	$s^2(s - \Delta)$	$\sin^2(s - \Delta)$
»	2 et 5 en rem.	$\sin(s - A)$	$\sin(s - \Delta)$
298	2	$\frac{dA}{dt} = \frac{(\alpha - A)}{dt}$	$\frac{dA}{dt} = \frac{d(a - A)}{dt}$
»	4 en remont.	$f \cos \zeta$	$f \cos \zeta'$
300	10 en remont.	$\log \frac{\Delta}{n} \cos N$	$\frac{\Delta}{n} \cos N$
304	13	au-dessous	au-dessus
306	4 et 6.....	l'éq. (1)	l'éq. (3)
307	14	$\log a''$	$\log a'$
314	5 en remont.	$50'',21129\,t$	$50'',21129$
316	2 en remont.	$-\left(\frac{1}{2} e^2 - e^4 + \ldots\right) \cos 2\zeta$	$-\left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^4 + \ldots\right) \cos 2\zeta$
318	14 en remont.	$t = \frac{D}{15 \cos D}$	$t = \frac{D}{15 \cos (☾)}$
»	8 et 9....	π	Π
320	14 en remont.	$h_s = h_m - \ldots$	$h_s = h_m + \ldots$
»	13 en remont.	$+$ correct.	$-$ correct.
325	8 en remont.	$24^h(\mu' - \mu)$	$24^h + \mu' - \mu$
326	11 et 5 en rem.	du Soleil	de la Lune
331	7	$17'',2526 \sin$ ☊	$-17'',2526 \sin$ ☊
334	11	$\frac{D_1}{\alpha_1 \cos (☾)}$	$\frac{D_1}{\alpha_1 \cos D}$
335	4	$\sin l'$	$\sin l$
»	10	$\sin l$	$\sin l'$
336	11 en remont.	(a)	(x)
339	15	$k = -\frac{\partial \pm P'}{\cos(i' \sim i)}$	$k = \frac{-\partial \pm P'}{\cos(i' \sim i)}$
342	3	Sm et Sm	Sm et Sm'
347	7 et 12 ...	μ'	μ
352	4 et 5....	géocentrique	héliocentrique

Astron.

Author Souchon A

Title Traité d'Astronomie Pratique

87506

UNIVERSITY OF TORONTO
LIBRARY

Do not
remove
the card
from this
Pocket.

Acme Library Card Pocket
Under Pat. "Ref. Index File."
Made by LIBRARY BUREAU